MEMORIE
DI MATEMATICA E DI FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
DELLE SCIENZE

TOMO XV PARTE I

CONTENENTE LE MEMORIE DI MATEMATICA

VERONA
DALLA TIPOGRAFIA DI LUIGI MAINARDI
MDCCCXI

STATUTO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

1811.

I. La Società Italiana delle Scienze è composta di quaranta Socj attuali, tutti Italiani, di merito maturo, e per Opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La scienza della natura è il grande oggetto, che la Società medesima si propone. Pubblicherà pertanto, sotto il titolo di Memorie di Matematica e di Fisica, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' quaranta Membri, uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni.

IV. Avrà la Società un Segretario, ed un Vicesegretario amministratore. Il primo sarà partecipe di tutte le facoltà dei Quaranta, benchè non fosse uno d'essi, ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti. Il secondo terrà il maneggio economico.

V. §. 1. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei Quaranta, o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in quattro consecutivi tomi delle Memorie sociali.

§. 2. Ma se un Socio attuale passasse negli Emeriti dopo aver posto otto Memorie ne' tomi sociali, in tal caso seguiterà a godere, quantunque Emerito, tutte le prerogative di Attuale.

§. 3. Che se un Socio Emerito ponga Memorie in tre tomi consecutivi, sarà restituito nel ruolo degli Attuali.

VI. Un'altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l'assenso di ventuno almeno dei Quaranta, i Compilatori, eletti dal Presidente, degli elogj de' Socj attuali defunti. Inoltre, esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessennio, due Soggetti, non più, che avessero operato cosa a pro della Società, onde meritassero d'esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito nelle Scienze in qualunque parte fuori d'Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d'ogni Volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni alle classi de' Socj attuali e degli stranieri si faranno nel modo seguente. Per ogni posto che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario proporre sei nomi a ciascuno de' Socj attuali, il qual farà scelta d'uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, che, entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragi, s'intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell'acquistato Cooperatore.

IX. All'elezione del Presidente saranno invitati li Socj attuali con una lettera circolare del Segretario, al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da sè eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario, dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l'elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d'inserire negli Atti una scoperta utile, un'importante produzione, anche di persona non aggregata ma Italiana, purchè tal produzione, o scoperta sia giudicata degna degli Atti stessi anche da un altro Socio, il qual venga destinato segretamente dal Presidente di volta in volta all'esame della cosa presentata, ed il suo nome (quando approvi) si stampi insieme con quello del presentatore.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell'articolo VIII, per l'elezione d'un Socio attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d'ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi ne'Volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana e in carattere chiaro. Il Segretario dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l'opera sia voluminosa, può l'Autore distribuirla in due o più parti pe' tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò che è destinato pegli Atti dev'esser nuovo, inedito, importante, ed analogo all'indole scientifica di questi Volumi, che non ammette sfoggio d'erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XIV. I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de' Socj.

XV. La Società non si fa risponsabile delle Opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev'esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XVI. Non permette peraltro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Socio attuale, Autore d'una Memoria o d'un Elogio, avrà in dono cinquanta esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Ad ogni altro Autore saranno corrisposte dodici copie. Qualunque Autore ne desiderasse di più, non sarà aggravato d'alcuna spesa per conto della composizion tipografica.

XVIII. Nell'atto di queste spedizioni sarà trasmessa ai So-

cj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell'amministrazione tenuta dal Vicesegretario amministratore.

XIX. Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d'ogni Volume delle Memòrie sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l'osservanza dello Statuto; eleggere il Segretario ed il Vicesegretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogn' interesse della Società; rivedere, almeno una volta all'anno, i conti dell'amministrazione del Vicesegretario, alla validità de' quali fa d'uopo l'approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente: e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell' atto di rinunziargli l'Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la Persona propriamente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro, ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d'aggregazione; presiede alla stampa, ai Correttori di quella, ed all' incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d'ogni altro interesse della Società, sempre però con l'approvazione del Presidente. Egli deve pure tener registro d'ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandoli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. §. 1. Ad esempio delle principali Accademie, la Società Italiana delle Scienze avrà Membri pensionarj: e la pensione sarà d'annui zecchini ventiquattro, pagabili per metà allo spirare d'ogni semestre; non computate in verun caso, sia di morte, o di rinunzia, o di transito negli Emeriti, le frazioni di semestre.

§. 2. Saranno capaci della pensione li tre più anziani, e di permanenza non interrotta, nel ruolo de' Socj attuali; sin a tanto però che rimangano nel ruolo medesimo.

§. 3. Qualunque volta l'eguaglianza d'età accademica renda ambigua la scelta d'uno o più Pensionarj, sarà tolta l'ambiguità concedendo la preferenza alla maggior età naturale. Nel qual caso, il Segretario chiederà a ciascun de' coetanei come sopra, documento legale dell'epoca di sua nascita; e chi non lo faccia a lui pervenire entro mesi tre dopo la domanda, s'intenderà che rinunzj alla pensione.

§. 4. Due Socj (sia ciascun d'essi attuale o emerito) potranno inoltre goder la pensione, loro vita naturale durante, quando siano autori ciascuno di dieci o più Memorie stampate ne' Tomi Sociali, il valor delle quali venga giudicato degno di tal premio dalla pluralità assoluta de' Socj attuali, a proposizione del Presidente; ovvero dalla pluralità relativa, quando si tratti di giudicare del merito relativo fra più Candidati.

§. 5. In ambi questi partiti le opinioni de' Socj resteranno sempre segrete, ed a sola notizia del Presidente e del Segretario: si pubblicherà unicamente il numero de' suffragj a favore di ciascun Candidato, siccome è prescritto per le elezioni nell'articolo XVIII.

§. 6. Avranno titolo di *Pensionarj anziani* li tre del §. 2; di *Pensionarj giubilati* li due del §. 4.

§. 7. Potrà il Pensionario anziano passare a goder la pensione come giubilato, sotto le condizioni prescritte dal §. 4, e quando l'un de' due posti sia vacuo.

XXIII. A compensazion delle spese, che incontrano i Quaranta ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno, nel mese di Gennajo, sarà fatto l'esame, onde riconoscere i Membri attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell'anno antecedente, e dentro li rispettivi termini di tempo in esse specificati; ciascuno de' quali Socj avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Compagnia.

XXIV. §. 1. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò dal Presidente, il Segretario in-

viterà li Socj attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisico-Matematici, o in qualunque modo giovevoli a queste scienze, e sempre applicabili ad utile general dell'Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciascun Socio, pretermettendo quelli che uscissero dalle condizioni ora prescritte. Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell'argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura ed alla presentazione delle Memorie. Quel tema che avrà più suffragi, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.

§. 2. Tosto si comunicherà alla Compagnia l'argomento coronato, ed il numero de' suffragi riscossi da ogni argomento. Nell'atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioè, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne' quali concorrerà maggior numero di suffragi (l'uguaglianza rimovasi con la sorte), s'intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

§. 3. Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualora non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva Circolare di Lui.

§. 4. Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di concorrere al programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcun ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell'esclusion dal concorso.

§. 5. Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l'importanza di moltiplicare i programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da asse-

assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal programma: il nome degli Autori sarà occulto: ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultissima, nome, cognome, patria, domicilio e profession dell'Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

§. 6. Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l'estension delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano, e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata col nome dell'Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice neghi il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non siano concordi. Che se fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l'esito del giudizio e si passerà alla pubblicazione di nuovo programma, coi metodi stabiliti sopra.

§. 7. Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l'Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12 della propria a ciascun degli Autori coronati, 38 di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE.

CAGNOLI (Cav. Antonio) *Pensionario giubilato*. *Verona*.

Socj Attuali.

ALDINI (Cav. Giovanni) Consigliere di Stato degli Uditori. *Milano*.

AMORETTI (Cav. Ab. Carlo) Bibliotecario nell'Ambrosiana. *Milano*.

ARALDI (Cav. Michele) Segretario del R. Istituto Italiano. *Bologna*.

BONATI (Cav. Teodoro) *Pensionario Anziano*, Ispettor Generale onorario alle acque, e strade, e Professore Speciale d' Idrostatica. *Ferrara*.

BRERA (Valeriano Luigi) Professor di Clinica Medica nella R. Università. *Padova*.

BRUNACCI (Cav. Vincenzo) Professor di Matematica sublime nella R. Università. *Pavia*.

CALDANI (Floriano) Professor di Anotomia umana nella R. Università. *Padova*.

CALDANI (Leopoldo Maria) Professore emerito nella R. Università. *Padova*.

CALUSO (Cav. Ab. Tommaso Valperga) Professor di Lingue Orientali nell' Imper. Università. *Torino*.

CANTERZANI (Cav. Sebastiano) *Pensionario Anziano*, e Professore di Fisica generale nella R. Università. *Bologna*.

CESARIS (Cav. Ab. Angelo) Astronomo nel R. Osservatorio di Brera. *Milano*.

CHIMINELLO (Ab. Vincenzo) Direttore del R. Osservatorio. *Padova*.

COSSALI (D. Pietro) Professore di Matematica sublime nella R. Università . *Padova* .

DANDOLO (Cav. Vincenzo) Senatore . *Milano* .

FABBRONI (Cav. Giovanni) Direttor Generale dell' Imper. Zecca . *Firenze* .

FERRONI (Pietro) Matematico Imperiale . *Firenze* .

FOSSOMBRONI (Co. Vittorio) Senatore dell' Impero Francese . *Firenze* .

GALLINI (Stefano) Professore di Fisiologia , ed Anatomia comparata nella R. Università . *Padova* .

GIOBERT (Giannantonio) Professore di Chimica generale , e Mineralogia nell' Imperiale Università . *Torino* .

GIOVENE (Giuseppe) Presidente della Società Agraria. *Lecce.*

MAGISTRINI (Gio: Battista) Professore di Matematica sublime nella R. Università . *Bologna* .

MAIRONI (Giovanni Daponte) Professore di Storia Naturale nel R. Liceo . *Bergamo* .

MALACARNE (Vincenzo) *Pensionario giubilato*, Professore d' Istituzioni Chirurgiche , e d' Ostetricia nella R. Università . *Padova* .

MASCAGNI (Paolo) Professore d' Anatomia nell' Arcispedale. *Firenze* .

MOSCATI (Co. Pietro) *Pensionario Anziano*, Pretore del Senato . *Milano* .

PAOLI (Pietro) Professore di Matematica sublime nell' Imperiale Università . *Pisa* .

PARADISI (Co. Giovanni) Senatore . *Milano* .

PESSUTI (Gioacchino) Professore di Matematica sublime nell' Archiginnasio della Sapienza . *Roma* .

PEZZI (Francesco) Tenente Colonello nel Corpo Imperiale del Genio Francese . *Genova* .

PIAZZI (D. Giuseppe) Professore d' Astronomia . *Palermo*.

PINI (Cav. Ermenegildo) Professore di Storia Naturale, Ispettor Generale della Pubblica Istruzione . *Milano*.

RACAGNI (D. Giuseppe Maria) Professore di Fisica nel R. Liceo . *Milano* .

RE (Cav. Filippo) Professore d' Agricoltura nella R. Università . *Bologna* .

RUBINI (Pietro) Professore di Medicina nella Imperiale Università . *Parma* .

RUFFINI (Cav. Paolo) Professore di Matematica sublime nella R. Scuola Militare. *Modena*.
SALADINI (Cav. Girolamo) Professore emerito nella R. Università. *Bologna*.
TARGIONI TOZZETTI (Ottaviano) Professore d'Agricoltura, e di Botanica. *Firenze*.
VASSALLI EANDI (Cav. Antonio Maria) Professore di Fisica, e Segretario dell'Accademia Imperiale. *Torino*.
VENTUROLI (Giuseppe) Professore di Matematica applicata nella R. Università. *Bologna*.

DIVISIONE DE' SOCJ ATTUALI IN DUE CLASSI E INDICAZIONE DE' TOMI, IN CUI HANNO MEMORIE.

Classe Matematica.

Bonati	2. 5. 8. 8. 11. 15.
Brunacci	14. 15.
Cagnoli	3. 4. 4. 5. 5. 5. 6. 6. 6. 7. 7. 8. 8. 8. 9. 10. 11. 14.
Caluso	9. 12. 14.
Canterzani	2. 5. 8. 11. 14.
Cesaris	2. 10. (pag. x) 11. (pag. 176.) 14.
Chiminello	7. 8. 8. 9. 9. 10. 10. 11. 11. 11. 12. 12. 12. 13. 13. 14. 14. 14. 15.
Cossali	9. 10. 13, 15. 15.
Ferroni	5. 7. 9. 10. 10. 11. 12. 14. 15.
Fossombroni	3. 7. 9. 12. 13.
Magistrini	.
Paoli	2. 4. 4. 6. 6. 8. 9. 9. 10. 13.
Paradisi	. .
Pessuti	11. 13. 13. 14. 15.
Pezzi	4. 5. 6. 8. 11. 11. 13.
Piazzi	11. 12. 12. 13.
Racagni	10. 13.
Ruffini	9. 9. 10. 12. 12. 13.
Saladini	9. 10. 11. 12.
Venturoli	12. 14.

Classe Fisica.

Aldini	14.
Amoretti	8. 10. 12. 13. 15.
Araldi	10. 11. 12. 13. 15.
Brera	14. 15.
Caldani *Floriano*	7. 8. 12. 13.
Caldani *Leopoldo*	4. 7. 8. 9. 10. 12. 12. 13. 14. 14. 15.
Dandolo	. .
Fabbroni	10. 11. 12. 13. 14.
Gallini	14. 15.
Giobert	10. 13.
Giovene	8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 14. 14. 15.
Maironi Daponte	4. 9. 9. 11. 13. 14. 15.
Malacarne	1. 2. 3. 3. 4. 4. 5. 6. 7. 8. 8. 9. 9. 10. 11. 12. 12. 13. 14. 15.
Mascagni	8. 11. 15.
Moscati	1. 5. 10. 13.
Pini	3. 5. 6. 6. 9. 10. 12. 13. 13. 14. 15.
Re	12. 14.
Rubini	14. 15.
Targioni Tozzetti	11. 13. 13. 14.
Vassalli Eandi	4. 8. 10. 10. 13. 14.

Socj Emeriti.

BRUGNATELLI (Luigi) Professore di Chimica nella R. Università. *Pavia*.

LAGRANGE (Co. Lodovico). *Parigi*.

ORIANI (Cav. Ab. Barnaba) Astronomo nel R. Osservatorio di Brera, e Senatore. *Milano*.

POLI (Giuseppe Saverio) Direttore del R. Museo di Storia Naturale. *Napoli*.

ROSA (Cav. Michele). *Rimini*.

SALUZZO (Giuseppe Angelo). *Torino*.

SCARPA (Cav. Antonio) Professore nella R. Università. *Pavia*.

STRATICO (Cav. Simone) Senatore. *Milano*.

VENTURI (Cav. Gio: Battista). *Berna*.

VOLTA (Cav. Alessandro) Professore nella R. Università, e Senatore. *Pavia*.

Socj Onorarj.

BRAMBILLA (Paolo) Professore di Matematica nel R. Liceo. *Milano.*
DELBENE (Benedetto) Segretario perpetuo dell'Accademia d'Agricoltura, Commercio, ed Arti. *Verona.*
LANDI (Ferdinando). *Piacenza.*
LOMBARDI (Antonio) Bibliotecario publico. *Modena.*
PINDEMONTE (Ippolito). *Venezia.*
POZZETTI (D. Pompilio) Prefetto della R. Biblioteca. *Bologna.*
ROSSI (Cav. Luigi) Segretario generale alla Direzion generale della Pubblica Istruzione. *Milano.*
VIVORIO (Ab. Agostino) Ispettor generale onorario d'acque e strade. *Vicenza.*

Socj Stranieri.

ACHARD. *Berlino.*
BANCKS. *Londra.*
Co. CHAPTAL. *Parigi.*
DELAMBRE. *Parigi.*
HERSCHEL. *Londra.*
HAUY. *Parigi.*
Co. LAPLACE. *Parigi.*
MASKELINE. *Londra.*
OLBERS. *Brema.*
GAUSS. *Gottinga.*
ZACH. *Gota.*
BODE. *Berlino.*

Segretario.

. . . .

Vice Segretario Amministratore.

OTTAVIO CAGNOLI.

ANNALI

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

Dall' Aprile MDCCCIX all' Aprile MDCCCXI

CONTINUATI DAL SIG. OTTAVIO CAGNOLI

VICESEGRETARIO AMMINISTRATORE DELLA MEDESIMA.

152. Tre giorni prima che incominciasse Aprile fu resa pubblica la Carta intitolata *Risposta de' Reggenti dell' Accademia d' Agricoltura ec. alla Lettera circolare del Sig. Cav. Antonio Cagnoli ec.* senza data, e senza sottoscrizione d'alcuno, nella quale si oppugnava la detta Lettera Cagnoli con osservazioni meramente gratuite, e con citazioni di carte mutilate, alla quale contrappose il Sig. Cav. Presidente lo schiarimento, che per amor della pace si contentò di render noto a pochissimi degli Accademici, e col quale credè egli sgravarsi sufficientemente dalle taccie impostegli.

153. Intanto il bimestre assegnato ebbe fine ai 23 Maggio per l'elezione del nuovo Presidente; e col primo ordinario la diligenza dell' egregio Sig. Pozzetti trasmise alla Segreteria il risultato delle votazioni, per le quali a gran pluralità rimaneva eletto per un terzo sessennio il Sig. Cav. Antonio Cagnoli: e confermata fu tal notizia dall' altro Deputato Sig. Lombardi.

154. Comunicata tal novella riprova dell' attaccamento dei Quaranta al Presidente riconfermato nell' esercizio delle sue funzioni, egli ascoltando gli impulsi del proprio cuore, e i sentimenti di vera gratitudine ai Colleghi, più del debolissimo stato di sua salute, rispose sottomettendosi al peso della Presidenza, nominando Vicesegretario Amministratore coll' incombenze provvisorie di Segretario l' attual Prosegretario, e chiamando il medesimo ad invitare i Socj a presentar problemi sugli oggetti spettanti alla Società, onde esporre un Programma per le soluzioni d' un problema Fisico, e d' un Matematico.

155. Essendosi soltanto alla metà del mese di Maggio, in conseguenza dello turbolenze guerresche, dato fine all'edizione del Tomo XIV, e fatta la relativa spedizione all'Autorità Governativa ed ai Socj, S. E. il Sig. Ministro dell'Interno sotto il 25 di Maggio accusò la ricevuta del detto Tomo con frasi lusinghiere per la Società.

156. Fu in questo turno di tempo, che pervennero le risposte Sociali alla circolare 4 Febbrajo (151), e la pluralità, approvando l'operato del Sig. Presidente, dissentì da quello dell'Accademia d'Agricoltura, Commercio, ed Arti.

157. Col dì 29 Maggio l'enciclica del Vicesegretario Amministratore, notificò ciò tutto che fu esposto dal Sig. Presidente (154), e fu dichiarato il numero di voti ottenuto da ciascun Candidato. In questo incontro stesso fu invitato il fervore de' Socj ad allestire nuove Memorie pel Tomo XV.

158. Nel termine prefisso i Socj risposero alla detta circolare, e il loro voto fe' nascere la lettera del Vicesegretario 25 Luglio 1809 colla quale furono essi invitati a trascegliere un Problema di Matematica, tra gli 11 proposti, ed uno di Fisica tra i 13, facendo pervenir la risposta entro i 40 giorni successivi, ed additando il tempo da prescriver al concorso, e il premio da assegnar ad ognun de' problemi da esporsi.

159. Sotto lo stesso giorno il Sig. Cav. Presidente invitò pure i Socj ad esprimere il loro voto sull'argomento importante delle Memorie *presentate* di Autori non Socj, a ciò spronato dalla proposizione di un Membro, che *tali Memorie dovessero stamparsi in Tomi separati*. Assoggettò quindi il prefato Sig. Cav. Presidente alla Compagnia il nuovo articolo X dello Statuto concepito in questi termini = *Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d'inserire negli Atti una scoperta utile, un'importante produzione, anco di Persona non aggregata, ma Italiana, purchè tal produzione, o scoperta sia giudicata degna degli Atti stessi, anche da un altro Socio, il quale venga destinato segretamente dal Presidente di volta in volta all'esame della cosa presentata, ed il suo nome (quando approvi) si stampi con quello del presentatore*.

160. Colla Circolare del Vicesegretario 11 Settembre 1809 furono resi consapevoli i Socj, che la pluralità assoluta avea deciso sull'accettazione del nuovo Articolo Statutario suddet-

to,

to, che si vedrebbe impresso nello Statuto premesso al Tomo XV: fu notificata la scelta del problema Fisico, e del Matematico, la maggioranza dei voti avendo prescelto l'VIII di Matematica cioè " VIII. Presentare un esatto e definitivo esame e confronto delle due teorie del Newton e dell'Eulero sulla luce ,, e l'XI di Fisica, cioè " XI. Determinar col mezzo di accurati esperimenti, se vi abbia una differenza positiva tra l'azione, che esercita sul corpo umano la Pila di Volta, e quella che vi esercita la macchina elettrica comune: indicando in che questa differenza consista; e quali deduzioni possano trarsi da questi principj per servirsi dell'uno o dell'altro mezzo di preferenza nella cura delle malattie ,, .

Venne spedito il programma a stampa a ciascun dei Membri, e fu publicato nei Giornali d'Italia; e finalmente furono invitati i Socj a sceglier dal loro novero tre Giudici per l'argomento di Matematica, e tre per quello di Fisica, non senza partecipar loro che il premio d'Italiane L. 600, e il tempo d'un anno erano stati assegnati dalla pluralità alle soluzioni di ciascun dei detti Problemi.

161. Compiti i 40 giorni prefissi nella suddetta enciclica, fu scrupolosamente osservato dal Vicesegretario quali Socj resultavano eletti Giudici, e si fece sollecito di comunicar a ciascuno la relativa nomina, alla qual lettera tutti risposero con quell'attaccamento al Corpo, che caratterizza la bontà di questo, e l'ottima concordia che regna in esso.

162. Scadendo nel Gennajo 1810 l'esecuzione dell'Art. XXIII dello Statuto pel 1809, fu nelli primi giorni di quello che il Sig. Cav. Presidente col Vicesegretario fece l'esame della corrispondenza Sociale relativa alle circolari 4 Febbrajo, 25 Luglio per le due sotto tale data, e 11 Settembre, escludendo la circolare 23 Marzo 1809 riguardante la nomina del Presidente, mentre le risposte dei Socj a quella, tuttora occulte alla Segreteria, furono dirette ai Socj Onorarj Pozzetti e Lombardi. Si rinvennero capaci della compensazione per la spesa delle lettere i Signori Brera, Cav. Brunacci, Cav. Canterzani, Chiminello, Delanges, Ferroni, Pessuti, Cav. Ruffini, Venturoli, Caldani *Leopoldo*, e *Floriano*, Giovene, Maironi, e Cav. Re.

163. Colla enciclica poi 9 Gennajo il Vicesegretario partecipò la data esecuzione al detto articolo, ed invitò i Mem-

bri a surrogare nella classe dei Socj Stranieri, per l'accaduta morte del celebre Fourcroy, altro individuo tra i sei, che il Sig. Cav. Presidente proponeva.

164. La pluralità relativa volle prescelto il Sig. Gauss, e di ciò ne fu reso avvertito il Corpo colla circolare 9 Marzo, e l'eletto in questa: vennero inoltre invitati i Membri ad elegger altro Socio straniero per riempiere il vacuo lasciato dal defunto Saussure, e il Sig. Cav. Presidente assoggettò alla scelta il nome di sei soggetti.

165. Avendo S. M. I. R. disposto che il Sig. Consigliere di Stato Scopoli fosse Direttor Generale della Pubblica Istruzione nel Regno, il Sig. Cav. Presidente offrì allo stesso gli Annali della Società, da questi potendo la prefata Autorità rilevar facilmente lo Stato di un Corpo, che incessantemente dimostrò al pubblico la propria attività a decoro dell'Italia, e del Governo benefico che lo riguardò sempre con ispezial protezione. Gradì il Sig. Consigliere di Stato l'offerta come lo dichiara esuberantemente il di lui foglio N.° 1811.

166. Trascorso il bimestre dalla data 9 Marzo dell'ultima circolare, i Socj espressero il loro voto in modo che i più scelsero il Sig. Bode, il quale contemporaneamente ai Quaranta fu reso consapevole della sua nomina.

167. Col giorno 11 Settembre 1810 avendo termine l'anno assegnato al pubblico concorso nel programma 11 Settembre 1809 per le soluzioni d'un problema in materia Fisica, e d'uno in Matematica, il Vicesegretario ebbe a riconoscere che due erano i Concorrenti al primo, ed uno al secondo. Le epigrafi che erano apposte a ciascuno scritto sono le seguenti = *Fungar vice cotis. Hor. Poetic.* = *Numquam autem invenietur, si contenti fuerimus inventis. Præterea qui alium sequitur, nihil sequitur, immo nec quærit. Quid ergo non ibo per priorum vestigia? Ego vero utar via veteri: Sed si priorem invenero hanc muniam etc.* Seneca Epist. XXXIII. = *Natura est maxime sibi consona. Newton* =.

Considerato dal Sig. Cav. Presidente che un mese di tempo a ciascuno dei Giudici era sufficiente ad esaminare i Manoscritti trasmessi sono stati con tal limite invitati i Giudici di cui parla il (N.° 161) a dare la loro sentenza.

168. Accaduta la morte del Socio attuale Sig. Paolo Delanges, furono con enciclica 15 Novembre 1810 invitati i

Quaranta a sceglierne uno tra i varj, che loro venivan proposti dal Sig. Cav. Presidente, e nel tempo stesso fu invitata la compiacenza di ciascun Socio soggiornante nelle Provincie Italiane ora aggregate all'Impero, ad indicare al Vicesegretario Amministratore il modo di spedir in quelle i Tomi Sociali, dopocchè alcune misure del Governo Francese lo impedivano.

169. Nel Gennajo 1811 scadendo l'esecuzione dell'Art. XXIII dello Statuto, il Sig. Cav. Presidente nel giorno 16 esaminò accuratamente col Vicesegretario quali erano le circolari nel 1810, che meritassero risposta, e furono rinvenute quelle dei 9 Gennajo, 9 Marzo, e 15 Novembre decorso: i Socj poi, la diligenza de' quali corrispose a tutte le suddette circolari, furono 25, cioè i Signori Cav. Amoretti, Cav. Bonati, Brera, Cav. Brunacci, Cav. Canterzani, Caldani Floriano, Caldani L. M. A., Cav. Cesaris, Chiminello, Cossali, Ferroni, Gallini, Giobert, Giovene, Maironi, Malacarne, Paoli, Pessuti, Pezzi, Racagni, Cav. Re, Cav. Ruffini, Cav. Saladini, Cav. Vassalli, Venturoli.

170. Fu partecipato ciò a ciaschedun Socio nell'enciclica 18 Gennajo del Vicesegretario, allorchè egli notificò la nomina fatta dalla pluralità de' Membri del Sig. Gio: Battista Magistrini Professore di Matematica sublime nella R. Università di Bologna in surrogazione al defunto Delanges.

171. Restituite alla Segreteria nel 20 Marzo tutte le Memorie concorse al Programma 11 Settembre 1809 (160) dai sei Giudici appositamente eletti per decidere sulla loro importanza il Sig. Cav. Presidente insiememente al Vicesegretario istituì il più preciso esame sul voto di ciascun Socio, ed appalesossi manifestamente, che due Giudici sulla Dissertazione Matematica del motto, *Natura est maxime sibi consona* negarono il premio alla medesima, il che rende inefficace a senso dell'Art. XXIV dello Statuto il voto del terzo Giudice, che la volle coronata. Sull'argomento fisico poi i tre Giudici concordemente, dissentirono dal premiar la Memoria dell'epigrafe — *Fungar vice cotis* — e sull'altra intitolata *Numquam autem invenietur si contenti fuerimus etc.* le opinioni dei Signori Giudici furono tali, che il Sig. Cav. Presidente stimò meglio dipender, come sempre, dalla volontà dei Socj anzicchè decider esso sulli tre Giudizj.

Il primo di questi infatti dopo moltissime osservazioni sul detto Manoscritto opina che *esso sia premiato* con che siano rese pubbliche anco le da sè fatte osservazioni: il secondo giudizio importa *che sia fatta menzione onorevole della Memoria, e che sarebbe utile se l'Autore la producesse al Pubblico, sopprimendo per altro le molte digressioni, o inutili, o poco opportune:* dal terzo finalmente risulta, che la Memoria anzidetta è troppo letteralmente uniforme all'opera di Gardini, *de effectis elettricitatis*, ma che per l'estensione de' lumi in essa contenuti sarebbe da accordarsi alla medesima l'*Accessit* con che fosse rinnovata la redazione del Manoscritto, meglio digerita, e sistemata.

172. Il Sig. Cav. Presidente ben considerato il § 6 dell' Art. XXIV non trovò in esso contemplato pienamente il caso presente: quindi lasciò che il voto dei Quaranta sia quello, che decida sulla significazione di tali giudizj. Frattanto fu prescritto al Vicesegretario dal Sig. Presidente che fosse dato esecuzione al citato articolo statutario nella parte che riguarda il compenso a ciascun Giudice per essergli stato vietato il concorso al suddetto Programma.

173. L'Istituto Nazionale Italiano, l'Accademia Imp. di Torino, e il Museo Imp. di Firenze vollero nelle produzioni de'loro Atti ricordar il loro attaccamento alla Società, il primo trasmettendo la Parte I del Tomo II per la Classe Fisico-Matematica, e il Tomo I per la Classe di Letteratura, Morale e Belle Arti, e la seconda il Tomo III per la Classe di Scienze, e per quello della letteratura: il terzo poi inviò il Tomo I dei propri Annali. Varj Autori inoltre si fecero pregio di presentar alla Società le loro Opere, nel che oltre ai Socj attuali Vassalli Eandi, Caldani *Floriano*, Malacarne e Brera annoverarsi denno i nomi dei Socj stranieri Delambre ed Haüy, ed inoltre i Signori Calandrelli, Conti, Comparetti, Bellardi, Guidotti, Sgagnoni, e Grossi.

Rendendo ciò palese al Publico la Società crede di soddisfare a quella gratitudine, che professa veracemente ai Donatori.

Cav. Pier-Antonio Bondioli

ELOGIO

DEL SIGNOR

PIETRO ANTONIO BONDIOLI

PROFESSORE ec. ec.

Scritto dal Sig. Mario Pieri

Ricevuto il primo Febbrajo 1810.

Mentre tutta Europa è fornita, anzi abbonda, di Università, di Licei, di Accademie, di luoghi insomma d'ogni maniera, che destinati sono a diffondere la dottrina per ogni dove; mentre non vi ha forse nè castello, nè villaggio, che non vanti qualche pubblico stabilimento per istituzione della gioventù, e non v'ha nessuno, sol che il voglia, che raccor non possa a pochissime spese tutto il tesoro dello scibile umano; vi sono qua e là di quegl'infelici paesi, dai governi o dalla fortuna dimenticati, che nella oscura notte del medio-evo ravvolti ancora ed oppressi sembran giacere. Tale, non per vizio di lei, ma per malignità di politici influssi, era non ha guari Corfù mia patria, cui più non restava che una sterile memoria delle sue prische virtudi. In un paese dunque, che non offeriva nè Università, nè Licei, nè Collegi, nè (pare incredibile, ma è vero pur troppo!) una Scuola Normale, in un paese per lungo tratto di mare e di terra da tutto il culto Mondo diviso, in un paese da barbari confinanti circondato, che non contava un librajo, nè una tipografia, anneghittiva la misera gioventù nell'ozio e nell'effemminatezza, e quell'attività d'ingegno, che dai gloriosi Antenati e dal clima ricevuto avea, a frivole e me-

schine occupazioni vedeasi rivolgere. Quindi in chi tali circostanze considera meraviglia somma dee ridestare colui, che, superate queste quasi insuperabili difficoltà, giunse a far qualche passo nella carriera delle lettere. Che direm poi di colui, che potè acquistarsi in tal carriera un gran nome, quale s'acquistò certamente Pietro Antonio Bondioli?

Egli nacque in Corfù l'anno 1765, di Giacomo Bondioli, e di Chiara Marsilli. Spiegò per tempo inclinazione alle lettere. Era tenero giovanetto quando i suoi lo smarrivano talora per un'intera giornata, cercandolo qua e là non senza inquietudine, ed egli intanto nel fondo della Biblioteca d'un Monastero, ch'era un buon miglio dalla cittade lontano, appiattato si stava. Applicatosi allo studio delle Umane Lettere sotto la disciplina di *Luigi de' Rossi*, il solo che ivi desse qualche sana lezione di Logica e di Rettorica, non tardò molto a dar prove de' suoi talenti, e della sua attitudine alla Poesia Italiana. Si strinse tosto d'amicizia con alcuni giovani del paese, cultori de' medesimi studj, i quali, tolta a pigione una stanza, venivano a formare quasi un'Accademia, nella quale il Bondioli avea il primo luogo; Accademia, che si rendette alquanto famosa nella città, per certe mascherate carnovalesche principalmente, nelle quali ciò che dovea non poco sorprendere in giovani di sì tenera età e di greca nazione, si recitavano cicalate e versi secondo l'uso della Toscana.

Ma queste cose non poteano occupare, che ne' primi suoi anni, l'uomo, di cui parliamo, e ch'entrò sin d'allora in pensiero di abbandonare le belle lettere per le scienze più utili, quasi sdegnando di divertire e solazzare i suoi simili, dove potea sovvenirli e soccorrerli. Quindi, imbarcatosi tutto acceso di questo desiderio, e con la permissione de' suoi genitori, approdò in Venezia, ma non fece altro quasi che passare per quella incantatrice metropoli, volando subito a Padova, dove, impetrato un posto nel Collegio Greco, fermò sua stanza: non perchè egli pensasse di fare

in quel Collegio i suoi studj, ma perchè quella Scuola, da persona pia instituita, gli offeriva mensa ed abitazione senza dispendio, e riparava così un poco alla sua non troppo larga fortuna. Le Scienze Fisico-Mediche erano il suo scopo. Per queste ei si fece ascrivere tosto nel ruolo degli alunni di quella celebre Università, e con tanta furia intorno ad esse si pose, ch'egli solea tenere stretta in mano, come più volte un nostro comune amico narrommi, una palla di ferro, per essere risvegliato dal cadere o dall'urto di questa, nel caso che il sonno venisse a sorprenderlo. La sua singolare applicazione allo studio, la sodezza de' suoi costumi, e la soavità delle sue maniere, gli ottennero in breve la benevolenza degli uomini più chiari di quella dotta città, e dei Professori di quel celebre Studio. E già nulla tanto standogli a cuore, quanto la maniera di corrispondere alla favorevole opinione, che di lui sì tosto formata s'era, scrisse, anche prima di ottenere la laurea, tre dotte Memorie, da lui lette successivamente negli anni 1787. 88. 89 all'Accademia di Scienze Lettere ed Arti di Padova, alla quale già come Alunno egli appartenea.

La prima è sull'uso medico delle fregagioni. L'influenza di queste sopra le più importanti funzioni del corpo animale, la corrispondenza del loro uso con l'uso dell'elettricismo, le varie specie di fregagioni addattate alle malattie particolari, e i metodi da osservarsi per ciascheduna, tutto è ivi discusso con accuratezza e dottrina. Sarebbe desiderabile, che tutti gli specifici della Scienza Medica si riducessero ad una tale semplicità. Le persone a noi più care diverrebbero forse in tal caso i nostri più abili medici, ed il misero infermo vedrebbe sopra il suo letto, in luogo delle ciglia aggrottate e delle facce seriose di tanti mediconi impostori, gli affettuosi sembianti di una madre, di un fratello, di un amico, che col loro aspetto accrescerebbero sempre più l'efficacia del rimedio. Non so se questo sia per accadere giammai; ma è certo, che que' medici, i quali colla

loro dottrina, e colle loro esperienze a questo segno tentano di condur l'arte loro, più ancora per la loro generosa umanità, che per la loro medica valentia si fanno ammirare.

La seconda Memoria, che tratta dell'elettricismo prodotto dalle fregagioni mediche, si può dire un'appendice della prima. Questa parte del suo argomento sembrò all'autore degna di una dissertazion separata, in cui potesse per tutte le particolarità e per tutte le teorie del tanto applaudito e combattuto elettricismo, quanto ampiamente faceasi mestieri, senza ceppi spaziare. Bollivano in quel tempo più che mai le controversie sopra l'utilità dell'elettricismo nella Medicina: chi lo bandiva capitalmente da tutte le provincie di quella Scienza; e chi a cielo esaltavalo come la panacèa universale di qualunque specie d'infermità. I soli Medici filosofi tenevansi entro i limiti di un' illuminata moderazione, non credendolo nè l'unico, nè il più vano ed inutile dei rimedj. Il nostro giovane fisico, persuaso della salutare influenza del fluido elettrico sul corpo umano, ma non pago abbastanza delle ragioni finora addotte per dimostrarla, si fa a rintracciarne di nuove, dopo aver posto nel vaglio tutt' i sistemi, che in questa nuova Scienza Medica venner formati.

Il Sonno, fenomeno singolarissimo, che costò invano finora tante veglie ai più accreditati fisiologi, è l'argomento della terza Memoria. In questa il Bondioli tenta di piantare una nuova teoria del Sonno, fondata sopra i fatti comprovati e più semplici, e dipendente soltanto dalla struttura fisica dei vasi del cerebro, e dalle leggi costanti della circolazione del sangue nel detto viscere. Stabilisce egli, che la forza impressa nel sangue, il quale scorre nel cervello, soffra una vicenda regolare d'aumento, e di degradazione, e che la velocità e quindi la massa di questo fluido debba esser maggiore nell'ingresso che nell'uscita; dal che ne segue, che in capo ad alcune ore debba farsi nel cervello una pletora parziale, che comprimendolo, produca il sonno con un periodo infallibile, e che poi questa pletora medesima,

sforzando a più viva contrazione l'arterie di esso, in grazia della maggior distensione delle loro pareti, risospinga di nuovo il sangue colà in soverchia copia raccolto, e quindi si termini la compressione rinnovandosi regolarmente la veglia. Una tal teoria, non discordando colle altre più sensate e più celebri, come osserva l'autore, anzi contenendole in sè quasi tutte, merita la considerazione di tutt'i fisiologi, e se non è ancora sufficiente a sciogliere uno de' più complicati problemi della fisica animale, può nondimeno procacciare un grido d'applauso al giovane fisiologo, trattandosi in ispezieltà di un argomento, nel quale nè anche i più veterani giunsero a soddisfar pienamente.

Compiuti i suoi studj, ed ottenuta la laurea nel sacro Collegio de' Filosofi e Medici di Padova il dì primo Luglio 1789, ecco farglisi incontro un campione, che lo disfida a battaglia. Aveva poco prima il Bondioli indirizzato una lettera al Ch. D.r *Aglietti*, pubblicata con questo titolo: *Lettera sulle Vaginali del Testicolo, e sull'epoca di alcune scoperte Anatomiche. Vicenza* 1789. Egli dassi a difendere in essa, con tutto l'ardore della più viva gratitudine, e con somma perizia anatomica, il suo celebre Maestro Professore *Caldani*, contro il quale era uscito in campo il Professore *Girardi* Anatomico di Parma, che negava l'esistenza della vaginale comune del Testicolo, ammessa dal Professore *Caldani*. La gratitudine e l'amicizia, che al suo Maestro strignevalo, non arrivarono per altro a far dimenticare al Bondioli il rispetto dovuto al di lui illustre avversario. Tanto non bastò al Sig. *Enrico Calane*, alunno del *Girardi*, che volle provarsi di rompere una lancia in difesa del suo Maestro, stampando una lettera in risposta a quella del Bondioli. Bellissima e generosa gara poteva esser questa di due giovani campioni, mossi da una causa nobile del paro e generosa, se il Sig. *Callane* entrato fosse nella tenzone con modi più urbani, e più cavallereschi. La lettera di questo rimise in mano la penna a quello, e fu cagione dell'opusco-

lo intitolato: *Sul numero delle Vaginali del Testicolo Esame Anatomico del D.r P. A. Bondioli relativo alla Dottrina sullo stesso argomento del Sig. Michele Girardi Professor di Notomia e di Storia Naturale in Parma — Padova* 1790. Nè il Bondioli imitò il tuono scortese del suo avversario, ma osservò una moderazione veramente filosofica, e propria dei veraci ed ingenui indagatori del vero; come ad ogni passo il dimostra il suo *Esame Anatomico*, dove, in vece di giurare in *verba magistri*, e di lasciarsi incantare dalle autorità di un *Haller*, di un *Neübauer*, di un *Wrisberg*, ec. spiega un corredo di osservazioni proprie, di esperienze, e di prove dedotte da un gran numero di cadaveri incisi colle sue mani.

Un fenomeno, che la notte più fitta quasi in un rilucente giorno trasmuta, un fenomeno che ne' campi del cielo presenta or globi or colonne di fuoco, ed ora mille luminose figure in mille singolari guise conformate, ora scaglia rapidissimi fulmini di luce purpurea, ora in un istante tutto l'orizzonte raggiorna; questo fenomeno singolarissimo, che tanto affaticò la penna e l'ingegno de' Fisici, non potea non suscitare la fantasia naturalmente poetica, e dimandare le indagini del nostro Bondioli. Egli vi si accinse con sommo genio e fervore, e l'esito dimostrò, che tutte quante le provincie del Fisico regno avea ne' suoi studj ben corse e viaggiate. Difatti, l'opera, che fu a lui più feconda d'incoraggiamenti e d'applausi, e che lo mise in corrispondenza co' più insigni Fisici dell'Italia, si è la *Memoria sopra l'Aurora Boreale*, letta all'Accademia di Padova il dì 15 Decembre 1790, ed ecco il giudizio, che ne portò l'Accademia per mezzo de' suoi illustri Censori *Giuseppe Toaldo*, e *Simone Stratico*. „ La Memoria, ella dice, del Sig. D.r Pietro Antonio Bondioli sopra l'*Aurora Boreale*, letta nella Sessione de' 15 Decembre 1790 della nostra Accademia, contiene una di quelle felici vedute, che si presentano agl' ingegni fertili, pronti, ed esercitati nelle fisiche cognizioni, e medita-

zioni per la spiegazione di qualche difficile fenomeno. Quello dell'Aurora Boreale diede esercizio ad illustri Fisici, ed il Sig. Bondioli riferisce tre delle più recenti opinioni, che furono proposte, indicando le difficoltà a cui soggiacciono. Indi presenta la sua Teoria fondata sulle più dilicate esperienze elettriche, e corredata di ragionamenti dedotti dalle più recenti scoperte fisiche e chimiche. Consiste questa Teoria nella combinazione di due verità di fatto, cioè, che i vapori si caricano di fluido elettrico nell'atto di formarsi, e di sollevarsi dai corpi, e lo conservano, e che qualora sieno addensati dal freddo lo depongono negli spazii e corpi vicini, nel qual caso il fluido stesso sprigionato si manifesta con lo splendore e la luce colorata, che sparge con moto rapido ed irregolare, atto per conseguenza a formare varie apparenze, quali sono quelle, che accompagnano le Aurore Boreali, e nelle regioni polari, e nelle altre ancora, dove le vicende atmosferiche portano questa aggregazione di vapori ridondanti di fluido elettrico, e trovasi il grado di freddo, che si richiede per separare dai vapori il fluido stesso. Lo stile animato da molta dottrina rende interessante la lettura di questa Memoria, e la pubblicazione della medesima non può che riuscire graditissima ai cultori della Fisica, e di somma lode all'autore „. Fin qui l'Accademia di Padova: nè tacerò di un altro giudizio, che val per quello di un'intera Accademia, quello cioè del celebre Alessandro Volta, cui *piacque molto* questa Memoria, che fu da lui illustrata di Note, ed inserita per opera sua nel Tomo I del Giornale Fisico-Medico del Ch. Professore *Brugnatelli*, anno 1792; onore, che il Bondioli con somma compiacenza gia rammentando, onore tanto più segnalato, che il *Volta* mostrò poscia di dissentire dall'opinione di lui, non restando per altro mai dall'applaudire al suo scritto.

Ritornò dopo varj anni il Bondioli sopra lo stesso argomento, ma con qualche diversità, e fece presentare il dì 19 ottobre 1801 alla Società Italiana la sua Memoria sopra

le *Aurore Boreali Locali*, che quella illustre Società si piacque d'inserire nel Tomo IX de' suoi Atti. Accennati di volo e in compendio i principj su i quali è fondata la Teoria sull'Aurora Boreale, esposta nella precedente Memoria, passa il nostro Autore a stabilire, che questa Meteora non è propria soltanto delle regioni Polari, ma che può aver luogo altresì ne' climi più temperati, solchè un freddo improvviso condensi di subito una gran massa di vapori pregni di elettricità. È vero che tali accidenti più di frequente incontrandosi ne' climi freddissimi del Polo, più frequenti e più estese ivi comparir debbono sì fatte aurore, ma ciò non toglie, dice l'Autore, che in qualunque parte del cielo affacciarsi non possano, proprie soltanto del luogo dove risplendono, che non possano esservi, vale a dire, delle Aurore Boreali Locali.

Alzare non si può un edifizio nuovo nel luogo di un altro senza prima distrugger l'antico. Il perchè l'autor nostro si dà valorosamente ad atterrare l'opinione tanto comune, che l'Aurora Boreale si formi esclusivamente al Polo. Le opposizioni, ch' egli scaglia contro questa opinione le cava principalmente dalla sterminata distanza in cui dovrebbero essere le Aurore Boreali Polari per rendersi visibili ne' nostri climi, e dall'indole degli accidenti, che precedono, ed accompagnano le Aurore Boreali Locali; accidenti spesso affatto proprj della nostra atmosfera, e del nostro clima, e tali che provano in molti casi la limitata altezza dell'Aurora Boreale medesima. Siccome poi tutte le ricerche istituite dai Fisici per rinvenire le cause dell'Aurora Boreale partono dal supposto, che questa Meteora abbia la sua sede soltanto nelle regioni polari, così riesce facile al nostro autore di far sentire le imperfezioni delle ipotesi imaginate dal *Mairan*, dal *Savioli*, da *Hervien*, e da varj altri, per conchiudere finalmente, mercè il confronto e l'esame delle opinioni altrui, che la Teoria da lui esposta è, a differenza delle altre, in pieno accordo colla storia dei fatti.

Questa

Questa si fu la prima ed ultima infedeltà, che il *Bondioli* abbia usato alla sua Scienza prediletta, alla Medicina, nè valsero più a distrarnelo punto tutte le carezze delle Scienze sorelle; infedeltà, che ci fece vedere con quanta fortuna egli corteggiar poteva anche la Fisica propriamente detta, e che se dell'amore di questa egli non ebbe prove ulteriori fu solo per non averle cercate.

Ma tutte le più profonde dottrine della Scienza vagliono forse a formare il buon Medico? Il letto dell'infermo è il campo dove il Medico miete i più gloriosi suoi lauri. Ivi sopra tutto egli spiega il suo augusto carattere, la sua celeste destinazione. Ivi stassi in agguato, spiando gli andamenti dell' inimico, e da un cambiamento di fisonomia, da uno sguardo, da un gemito dell'infermo giugne talora a conoscere la sede del male, e si appresta a dargli battaglia. Quindi facilmente si scorge quanta profondità d'intelligenza, quanto stuolo di fatti comprovati e sicuri, quanta esattezza d'esperienze, qual rapidità di concepimento, qual sagacia filosofica, e qual cognizione profonda dell'uomo fisico e dell'uom morale, che discorrere il faccia i varj e moltiplici aspetti, che prende una stessa malattia dall'età, dal temperamento, dal carattere, dal costume, dalle passioni, dalla profession, dal paese, da tutte insomma le circostanze generali o particolari, abituali od accidentali, che un infermo circondano, in un valente Clinico si richiegga. Aggiungasi un coraggio, un' intrepidezza, una serenità di mente, una costanza immutabile, sciolta peraltro di asprezza e durezza, e di quella fredda impassibilità, che tanto incresce ad ogni uomo, e che irrita sopra tutto le fibre tanto irritabili de' miseri infermi: nè mancar gli dee quell'eloquenza insinuante e persuasiva, che accarezzi l'anima afflitta dell'infermo, e le infonda coraggio e speranza, i più efficaci spesso, ed i soli farmachi, che un Medico possa al suo infermo somministrare.

Tutti questi pregi possedea nel più alto grado il nostro *Bondioli*, e l'ultimo più di tutti. Era una edificazione il ve-

derlo sopra il letto dell'ammalato. Come tingea sempre il suo viso di compassione, dalla quale traspariva un raggio di speranza promettitore di un felice riuscimento! Con qual soavità di modi e di parole riconfortava quel misero, che gli occhi fissando nel volto del Medico, e le di lui parole con avide orecchie bevendo, ivi di leggere il suo destino tentava! Il perchè sempre finiva col rendere amici, anzi innamorati a sè quegl'infermi alla cura de' quali egli presiedeva.

A forza di studio e di osservazione, e non distaccando mai la teoria dalla pratica, egli arrivò molto presto a formarsi quel che si chiama *colpo d'occhio medico*, che distingue i Medici insigni dai vulgari, e che consiste in un'attitudine a cogliere di primo lancio il carattere della malattia, e presagirne i progressi, e le conseguenze. Con tutti questi sussidj egli passò ad esercitare la Medicina in Venezia: indi fu mandato dal Governo a Montona, paese dell'Istria, ad assistere (tanta fiducia egli erasi già guadagnata!) a quella popolazione, colta da una febbre contagiosa, che attaccò poscia lui medesimo, e quasi miselo a morte: e con tal esito quella pubblica commissione eseguì, che salito in gran rinomanza ritornò a Venezia a cercar un teatro più degno di lui. Ivi la gelosia di mestiere, e la sua giovane età molti ostacoli opposero alla sua fortuna, ma il suo valore di mezzo alle prevenzioni e all'invidia sempre innalzossi e spiccò.

Dopo aver così passati in Venezia alcuni anni, offerendosegli l'occasione di fare un viaggio più lungo, e di salutare anche per un istante la patria, i parenti, gli amici, che da sì gran tempo lasciati avea, colse egli assai di buon grado una tale occasione. *Francesco Vendramin* andava a Costantinopoli in figura di Ambasciatore della Veneta Repubblica. Nutrendo egli, insieme alla degna di lui consorte, che accompagnollo coraggiosamente, una stima particolare pel nostro *Bondioli*, il vollero seco loro in quel non breve, e non facil viaggio.

Il soggiorno di Costantinopoli non fu sterile al *Bondioli*

nè di onore, nè di utilità. Molte cure egli fece, che levarono grido, e quella sola basterebbe con cui venne a capo di risanare il Sig. *Fornetti* ex-Dragomano di Francia, afflitto da un male stimato incurabile da tutti gli altri Medici, e che il *Bondioli* in tre soli giorni, con meraviglia di tutti, trasse fuor di pericolo. Varie volte ebbe anche a sperimentare la sua capacità verso i suoi protettori, e tutta la Corte dell'Ambasciatore, e sempre col più felice successo sperimentolla.

Viveasi così lieto e onorato, quando quella rivoluzione scoppiata alcuni anni prima in Francia, valicò l'alpi, e tutta Italia inondò, indi sollecita, l'Adriatico tragittato, nelle Isole Jonie sen venne: rivoluzione, che, su le prime facendosi bella ed ornandosi delle divise di libertade e virtude, e nelle labbra sempre volgendo gli augusti nomi di Grecia e di Roma antica, di rigenerazion, d'uguaglianza, era atta a sedurre qualunque uomo d'anima non vulgare, e di vivace imaginativa, non che il capo ed il cuore d'un giovane greco, pieno de' vaghi fantasmi, e delle care reminiscenze dell'antica sua patria. Che meraviglia dunque se il *Bondioli* lasciossi vincere a quelle care illusioni, e date le spalle a Costantinopoli, ch'egli allora doveva abborrire come il vero soggiorno della tirannide, volò in patria a respirare un'aura più libera, forse anche coll'intenzione di cooperare nel ricondurla alla sua primiera illustre fortuna? Ivi dimorò quanto l'armata francese, occupando sempre i più importanti impieghi, facendo tutto quel bene, che per lui si potea, e conservando sempre una virtuosa moderazione, siccome quello, che se dalle prime promesse lasciossi illudere un cotal poco, da mire secondarie e malvage, che in taluni erano forse le uniche, ingannar mai non lasciossi. Il giusto e l'onesto, e la vera libertà e indipendenza idolatrando egli sempre, i forsennati furori del *terrorismo*, e l'avidità del guadagno, e la privata vendetta, mascherate di patriotico zelo, riconoscea di leggeri, e abborriva. I suoi ragionamenti letti in quel tempo al-

la Società Patriotica, con uno zelo sano e sincero, non meno che con sana e schietta facondia, sono dettati. Nè il Medico era già sparito in quel tempo sotto l'uom politico; che anzi allora intraprese, e mandò a termine una cura, che levò gran rumore, quando una Dama del paese, *Bulgari* di famiglia, che da gran tempo inferma giaceasi, gli venne fatto di risanare.

All'entrar de' Russi e Turchi in Corfù, egli vi uscì coll' armata francese, tutto impensierito e malinconoso, avendo sempre dinanzi agli occhi la misera patria, i congiunti, gli amici, e la sua periclitante, e più che mai dubbiosa fortuna. Ma che? Le vicende di questa vita son così fatte, che spesso quando uno crede di toccare il cielo, sprofonda, e quando nell'abisso si crede, giugne chi d'improvviso fino al cielo il solleva. Questo viaggio, che tanto al nostro *Bondioli* increscea, fu la prima origine della sua futura sorte; giacchè, arrivato a Parigi, fu tosto cortesemente raccolto e onorato, ed accarezzato da tutti que' dotti, i quali fecero a gara nel sollevarlo da' suoi tormentosi pensieri per tutti que' diciasette mesi, che in quella grande metropoli si fermò. In Parigi egli scrisse con somma lode, per ordine dell'Uffizio centrale di Sanità Militare, un Trattato su le malattie più comuni negli Spedali Militari d'Italia, Trattato, ch'egli si restò dal pubblicare, non avendo mai, da altri lavori forse impedito, potuto ridurlo a quella perfezione, che la sua difficile contentatura appagasse.

Egli era partito di Corfù con una commissione, segnatagli (solo per agevolargli e rendergli men dispendioso quel viaggio) dal Commissario *Du Bois*, di Medico dell'armata francese, nè si pensò più di cancellare il suo nome dal ruolo di que' Medici. Il perchè vi si trovò egli ascritto inaspettatamente; e dopo la battaglia di Marengo scese in Italia con un breve del primo Console, che il collocava fra i trenta Medici dell'Armata d'Italia. Corse coll'armata varie città, ora in questa ora in quella più o men soggiornando, intento sem-

pre fino allo scrupolo ai doveri del grave suo incarico, e lasciando sempre dietro di sè buon odore di perizia medica, e di onesti e dolci costumi. In Milano scrisse un libro su le malattie contagiose, che non si sa perchè non vide mai la pubblica luce. Nè si dee tacere come a Brescia, nelle cure di quello Spedale, ebbe una sorte singolarissima, e quasi incredibile, non essendogli mancato, a quel che dicesi, per ben due mesi nè anche un ammalato de' moltissimi da lui curati. E in Parma ancora si fece lodare ed amar sommamente, prova quell' amicizia, che ivi strinse col celebre Professor *Tommasini*, amicizia, che equivale a qualunque elogio.

Stanco e rifinito da quella vita errante, e tutta militare, assai poco addattata al suo temperamento, che non fu mai d'uom robusto, e dalle dure fatiche, che offre sempre uno spedal militare ad un Medico umano e diligente, egli anelava ad un posto più riposato e tranquillo; ed il Governo, grato alle di lui moltiplici benemerenze, si affrettò a contentarlo, conferendogli la cattedra di Materia Medica nella celebre Università di Bologna. Egli l'aperse il giorno 29 Novembre 1803 con un *Discorso Inaugurale sopra l'Esperienza ed il metodo da seguirsi nelle ricerche di Materia Medica*, ove si prefigge di far conoscere la necessità e l'utilità dell'esperienze per l'avanzamento della dottrina de' medicamenti; di esaminare le diverse cagioni di errore, che alterano i risultamenti della stessa sperienza, e di esporre infine il metodo più atto a condurre alla sua perfezione questa importantissima parte della Medicina. Egli accenna rapidamente la prima origine, e le diverse vicende della Materia Medica presso tutte le nazioni, facendo sempre vedere, che tutt'i progressi di essa all'esperienza si deggiono. Ma l'esperienza non basta, ove accompagnata non sia con una Logica pura e sincera, che sedur non si lasci all'amor del sistema, ed alla smania di una sollècita ed abbagliante riputazione. Egli rinforza le sue asserzioni con varj esempj di Medici famigerati, in contraddizione tra loro sul valore di alcuni rimedj; tocca di vo-

lo gli errori dove altri può inciampare in tali operazioni; dopo di che egli passa a segnare le norme, che seguir dee chi non ama di smarrirsi nelle ricerche di Materia Medica, e chiude il suo discorso coll' esporre brevemente i sommi vantaggi, che dal suo metodo lo studio della Materia Medica può raccogliere. Su tali fondamenti non è malagevole il congliietturare quale e quanto edifizio egli abbia innalzato. È incredibile il concorso e l'applauso, che le sue lezioni ottenevano. Oltre i giovani suoi scolari, che per dovere lo ascoltavano, vi avea quasi tutt' i giorni un numero di Medici riputati, e di dotte persone, che alle sue lezioni assistevano, e con tale entusiasmo, che spesso con grida di applauso e con batter di palme fino alla sua casa amavano di accompagnarlo: entusiasmo tanto più straordinario, e da farne gran conto, quanto che la dotta Bologna passa per ischifiltosa anzi che no nel donar la sua stima, e le sue lodi ai Professori stranieri.

In questo mezzo egli fu decorato d'un fregio luminosissimo, venendo eletto uno dei quaranta Socj attuali della più famosa Accademia d'Italia, cioè della Società Italiana. Un tal posto, cui sempre anelano i dotti più illustri d'Italia, come una ratificazione necessaria del loro merito, era un onore ancor più segnalato per lui, che avea nel concorso competitori di tal fatta, da cui sarebbe, direi quasi, un onore il rimaner vinto. Egli giustificò pienamente la scelta de' suoi dotti elettori, non mancando mai di pagare il tributo, che il suo nuovo posto imponeagli. Varie Memorie di lui si trovano inserite negli Atti di quella illustre Società, ed a qualcuna già da noi mentovata si può aggiugnere quella intitolata *Ricerche sopra le Forme particolari delle Malattie Universali*, e l'altra sull'*Azione Irritativa*. Delle quali Memorie noi non diremo più oltre, perciocchè essendo queste stampate negli Atti della Società, che sono in mano di tutti, ed in tutte le Biblioteche, ognuno può, sol che il voglia, la sua dotta curiosità soddisfare; diremo bensì, che in tutte ri-

levansi quelle mire profonde ed originali, quella forza e fecondità d'ingegno, e que'semi di nuove ed utili dottrine, ch'egli solea spargere per tutto, e ch'erano i fondamenti d'un sodo e cospicuo edifizio, a cui da qualche tempo il nostro Autore attendeva. Egli studiava d'innalzare la Medicina al titolo ed al grado di Scienza, grado che molti, forse non a torto, le hanno finora niegato.

Nel mentre ch'egli salìa con tanto successo la cattedra di Bologna, la munificenza Sovrana andò a visitarlo di nuovo, recandogli la decorazione del Regal Ordine della Corona di Ferro tosto che fu instituito; e questa visita non fu l'ultima.

Correano parecchi anni che l'Università di Padova, per le politiche e per le naturali vicende, che varj valenti Professori le aveano rapito, andava ogni giorno più illanguidendo; quando per volere Sovrano fu chiamato il *Bondioli* ad occupar in essa la cattedra di Medicina Clinica, dappoichè mancò il celebre *Comparetti* rimasta vacante: elezione ancor più onorevole al *Bondioli* come quella, che fu il primo segnale della rigenerazione di quella celebre Università; imperciocchè d'allora in poi nuove cattedre, nuovi Professori crearonsi, e nuova vita a quello studio s'infuse, e cogli altri del Regno si affratellò. Ma quantunque la sua nuova destinazione, e per la sua importanza, e per lo lucro maggiore, e perchè l'aria di Padova più si affaceva al suo fisico, e perchè in mezzo riconducealo agli antichi suoi amici, ed a'suoi Maestri de'quali era bello il sedere collega, più lusinghiera, più onorata, più cara dovesse parergli, ciò non pertanto con non picciolo dispiacere egli da Bologna si distaccò, nè a Bologna increbbe meno il vederlo partire: chè un uomo di gentile e grato animo come il *Bondioli* abbandonar non sa tranquillamente un soggiorno, in cui le persone più chiare per dottrina e per nascita (e tutti sanno se queste scarseggiano in una Bologna) gareggiavano nell'accoglierlo e nel bramarlo, dove la sua riputazione sempre più rassodando si venne, e dove a cercarlo andarono le più solenni onorificenze.

L'argomento del suo nuovo discorso inaugurale è *Dell' Istituzione Clinica più atta a formar veri Medici*. V' ha una Scienza Medica, dice l'Autore, ma imperfetta. Gli elementi di questa sono le dottrine ed i fatti esistenti, ma questi sono una massa informe, un caos. Il Professore Clinico, che non è lo storico delle opinioni altrui, nè ad alcuno sistema sposato, dee migliorar di per sè la sua Scienza, prima d'insegnarla, dee sviluppare quella gran massa, raffrontar le dottrine ed i fatti tra di loro, e con quelli osservati da lui, discomporli in fatti semplici, e recarsi a questa operazione con quel metodo, che fece progredire tutte le altre scienze, col metodo dell'osservazione e dell'analisi. Le opinioni altrui, per imperfette che sieno, studiate ed esaminate in tal guisa, possono offrirci de' materiali utilissimi; e molto più lo studio dei fatti, il quale ci darà più esatte idee sulle malattie, e sui rimedj. Il Clinico sceverar dee dalla somma delle dottrine mediche quelle, che più appartengono alla pratica, ed insegnarle, ampliate e perfezionate, a' suoi alunni; dee formare in loro e coltivare il tatto medico, e suscitar l'amore e sviluppare il genio dell'arte, l'attitudine cioè di ragionare, e di computare con esattezza, e di prevedere il futuro. Ecco un saggio delle principali idee, e la storia delle giornaliere operazioni del nostro *Bondioli*.

La cattedra di Clinica parea per verità la più confacente di tutte al *Bondioli*, come colui, ch'era versatissimo nelle più profonde cognizioni teoriche, che da' lunghi suoi studi potè raccogliere, avvalorate, rettificate, ed aumentate dalle cognizioni pratiche, che dall'uso quasi continuo degli Spedali ebbe campo di procacciarsi. Ma dall'altro canto a cui non s'appaga di rimanere ripetitore delle asserzioni altrui, spesso mal fondate e vacillanti, le difficoltà in gran folla si presentavano. Imperciocchè i testi mal tessuti, e male ordinati, e spesso anche inesatti e mancanti, volevano esser sempre rettificati e corretti, ed il *Bondioli*, scrivendo ogni giorno per intero le sue lezioni, tanto li correggeva, rettificava,

con-

confutava, e tanto vi aggiugneva del suo, che veniva egli a comporre di pianta un testo novello: del che coloro, che udito lo hanno, ed il corso M.S. di Clinica da lui lasciato, far fede potrebbono.

Ne' due anni, ch'egli occupò quella cattedra, trattò compiutamente delle Febbri, delle Infiammazioni, degli Esantemi febbrili, non che di parecchie malattie non febbrili, che per la loro forma particolare serbavano grande analogia con alcune malattie infiammatorie.

Il lungo ed esteso esercizio negli Spedali militari gli avea dato campo di fare uno studio profondo sulle febbri di contagio, alle quali dava esclusivamente il nome di Tifo, qualunque fosse l'apparenza, o la complicazione loro. Il Sinoco stesso veniva da lui riguardato come un vero Tifo, congiunto a valida reazione del sistema sanguigno. Ricordava come una prova di questo fatto tutto ciò che del Sinoco fu scritto dagli Autori di Medicina, e faceva singolarmente riflettere essergli occorso in molti casi di veder sorgere il così detto Sinoco in persone, che preso aveano il contagio febbrile da altre afflitte da un tifo lento, ed accompagnato da soli fenomeni nervosi. Ammetteva pure il possibile sviluppo tra noi del contagio tifico in ammalati, che non l'aveano bevuto da altri. Le petecchie non erano, a suo credere, un esantema necessario nel tifo, ma dovunque esistevano doveansi tenere come una prova certissima della presenza di quel contagio. Considerava stenica necessariamente la diatesi primitiva del tifo, attribuendo il potere stimolante al principio contagioso, il quale essendo d'altronde dotato, a detta del *Bondioli*, della facoltà irritativa, turbava le funzioni tutte del sistema, alterava l'indole delle secrezioni, privava l'*organismo* degli stimoli naturali, facendo loro acquistare caratteri diversi da quelli dello stato di salute, e preparava così indirettamente, e più o meno lentamente, il passaggio della diatesi iperstenica nell'opposta. Simile cambiamento nella diatesi non avea però, secondo *Bondioli*, sempre luogo, potendo il tifo

perseverare nello stato stenico sino al suo termine, e ciò singolarmente ne' casi meno gravi, e nelle persone ben nodrite e robuste.

La cura era semplicissima, e consisteva nell'amministrazione degli antimoniali, e singolarmente del Kermes, minerale stimato come la sostanza deprimente la più atta, pel suo modo particolare di agire, ad indurre quelle mutazioni, che doveano causar la salute, ricomponendo l'eccessivo eccitamento, e favorendo l'*eliminazion* del contagio. La Clinica offrì spesso l'occasione di applicare alla pratica questa dottrina, e le cure furono felicissime. Il Kermes, di conosciuta attività, era portato in alcuni casi ad alte dosi, ed assai bene sostenuto dagli ammalati, che ne aveano scarichi, orine, e sudori abbondanti e salutari. Nella primavera dell'anno 1808 sette giovani, che intervenivano alla Clinica come studenti, incontrarono il tifo, che fu in tutti molto grave, con petecchie sino da' primi giorni della malattia, e tutti guarirono con questo metodo. Due di questi arrivarono a prendere oltre a trenta grani di Kermes nelle ventiquattr'ore per molti giorni di seguito.

Quando occorreva di passare all'uso degli stimolanti cominciava sempre da picciolissime dosi, ed era assai cauto nell'aumentarle, onde non ridestare appena spenta la diatesi iperstenica. Non amava di prescrivere in simile malattia le preparazioni oppiate, perchè capaci di opporsi alla più facile *eliminazione* del contagio, chiudendo le vie dell'alvo.

Facea gran conto de' vescicatorj, in tutt'i casi massimamente in cui era attaccato qualche viscere, ed attribuiva ad essi il potere di arrestare i progressi dell'interna irritazione, suscitandone esternamente una nuova, non ripetendo mai i loro salutari effetti da una valida e persistente mutazione, indotta per essi nell'eccitamento universale.

La Teoria della diatesi, quella del controstimolo, e le particolari sue idee sul modo di azione, proprio delle varie potenze nocive, come de' varj rimedj, sulla maniera di esi-

stere della diatesi nelle diverse forme particolari delle malattie, e sul carattere irritativo di alcuni agenti morbosi, considerati come causa di parecchie malattie, o di molti fenomeni di esse, servirono sempre di guida alle sue dotte lezioni, a' suoi discorsi, ed alle sue prescrizioni al letto degli ammalati, ove spiegava ad ogni tratto sapere profondo, ingegno sublime, e gran felicità nell'esprimere le sue idee.

A questi principj erano appoggiate le tanto applaudite sue lezioni di materia Medica, le quali, insieme con tutte le altre sue carte, l'Autore, morendo, raccomandò caldamente che fosser gittate al fuoco, forse perchè non potea dar loro l'ultima mano. Tristo incarico, ch'egli affidò al suo antico e caro amico e benefattore il ch. Professore *Stefano Gallino*, destinato da lui commissario delle ultime sue volontà.

Egli aveva inoltre preparati molti materiali per estendere una Memoria rivolta ad illustrare la teorìa delle *Malattie infiammatorie*. Nelle sue lezioni preliminari al Trattato delle Infiammazioni le considerò sotto il triplice aspetto di *Steniche*, *Asteniche*, *Irritative*. Nelle Steniche egli riguardava la *piressia*, e la infiammazione come il prodotto immediato delle medesime cause stimolanti, e come due elementi patologici, che concorrevano necessariamente a costituire quella composta malattia, che chiamasi *Febbre infiammatoria*, o *Flemassia*. Rifletteva, che l'infiammazione stenica si desta in una data parte solamente, quando essendo in essa più valida l'azione stimolante, il suo eccitamento è portato ad un punto così eccessivo, che ne rimane lesa la sua organizzazione, e viene minacciata finanche la sua distruzione. L'infiammazione stenica dunque, considerata nella sua località, incomincia, seguendo le tracce di *Bondioli*, per un soverchio eccitamento locale, ma sviluppata che sia è una vera alterazione organica del tessuto membranoso, fibroso, vascolare, o parenchimatoso della parte infiammata, alterazione, che progredisce con leggi sue proprie, e persiste talora anche minorata, o cangiata la diatesi. Traeva egli quindi motivo di

far sentire quanto sia impropria l'espressione di *malattie infiammatorie* ove vogliasi significare unicamente le malattie di diatesi stenica, perciocchè in queste l'eccitamento universale eccede bensì i confini della salute, ma non è in esse, come nelle infiammatorie, minacciata la *disorganizzazione* di qualche parte del sistema.

Le infiammazioni di diatesi *astenica*, sono, secondo lui, o la conseguenza di una infiammazione *stenica* degenerata, o il prodotto di potenze irritative, che agendo *fisico-chimicamente* sopra individui astenici risvegliano in una data parte il processo infiammatorio, il quale, lungi dal cospirare a mutar la diatesi dominante, non fa che risentirne la fatale influenza. Le ferite negli astenici, i gravi accidenti a cui vanno soggetti gl'idropici per la soverchia distensione passiva di alcune loro parti, gli effetti locali di alcuni contagi sopra individui deboli, ec. offrono altrettanti esempj di simili infiammazioni asteniche, che sogliono terminare con una suppurazione di cattivo carattere, e spesso finanche passar assai presto in cangrena. Che se le infiammazioni destate dalle potenze irritative succedono senza veruna precedente condizione stenica od astenica, allora esse sono vere infiammazioni irritative, perchè non esiste nelle cause che le produssero il potere di diffondere alcuna azione stimolante oltre il luogo dove sono applicate. In simili infiammazioni manca originariamente ogni fenomeno di diatesi, e la febbre, che le accompagna è, a differenza degli altri casi d'infiammazione, un puro effetto consensuale della infiammazione destata per irritazione. I molesti accidenti infiammatorj, che accompagnano prontamente l'introduzione di una spina in una mano, o di qualche grano di arena negli occhi, ec. e che prontamente si dileguano, tolti in breve questi corpi estranei, appartengono alle infiammazioni irritative. Questi pochi cenni, raccolti dalle sue lezioni, provano senza dubbio quanta luce filosofica avrebbe sparso anche su questo punto di Medicina colla Memoria, ch'egli stava apparecchiando.

Aveva scritta, varj anni sono, e comunicata a varj dotti suoi amici, anche una Memoria sulla *Distensione Organica*, che giace ancora inedita, e che mira a provare, che gli esseri organici, e singolarmente gli animali, hanno tutte le loro fibre dotate nello stato di vita della proprietà di distendersi per una forza inerente all'organizzazione medesima. Questa forza, considerata da lui come propria della fibra organica, è ben diversa da quella turgenza, che per l'azione degli stimoli manifestasi in certe parti, e sopra tutto nel sistema cellulare, fenomeno di cui parlò *Hebenstreit* nella celebre sua Dissertazione *De turgore vitali*. Il rapido accrescimento del feto, e del fanciullo, l'aumento del volume dell' utero anche nelle gravidanze estrauterine, il pronto sviluppo di alcune parti de'vegetabili, gli accidenti che accompagnano le infiammazioni de' varj organi, i fenomeni che osservansi ne'diversi stadj delle febbri, ec. ottengono, mercè la teorìa del *Bondioli*, una plausibile spiegazione.

In pronto era già da gran tempo un altro suo scritto sulla natura dell'aria, e sulle malattie, che regnano più generalmente nell'Istria, frutto delle osservazioni da lui fatte quando ivi trovavasi in figura di Medico pubblico.

Queste, e cento altre opere aveva il nostro *Bondioli* ideate, o cominciate, o compiute, le quali, invece di andare alla stampa, e girar per l'Europa in varie lingue tradotte, come le loro sorelle più anziane, diverranno, pur troppo! pascolo delle fiamme. E veramente d'una molto più ferma salute, e d'una vita molto più lunga abbisognava per compiere tutto ciò che aveva intrapreso. Egli era sempre minacciato, e talora anche attaccato nel petto, ed affannato da un'asma continua, e da una pinguedine straordinaria, e viziosa. I suoi fluidi per ogni poco si sbilanciavano, e non tanto di rado, dopo un lungo camminare, andava soggetto a qualche sputo sanguigno. Conosceva egli assai bene il suo temperamento, e più volte l'udimmo presagire a sè stesso una breve esistenza. E pure egli non si restava dall'accorciarla ancor più con

la soverchia applicazione, logorando così, e consumando que' pochi e deboli fili, che a questo mondo il legavano. Per altro, nè egli di lasciarci, nè alcuno di noi di perderlo così tosto s'imaginava.

Recatosi in Bologna il 29 Agosto 1808, come elettore del Collegio dei Dotti, che ivi per ordine Sovrano si raccoglieva, preso da una malattia infiammatoria, dopo aver soddisfatto a tutt'i doveri della pietà, il giorno 16 Settembre alle 7 ore della sera mancò. I suoi antichi Colleghi in quella Università gli posero una bella Iscrizione, che si troverà qui sotto, e ch'è opera del dottissimo Ab. *Schiassi*.

Impareggiali erano il suo fervore, e l'assiduità sua nello studio. Abborriva oltre ogni credere le distrazioni tutte, e gli costava sempre qualche rimorso tutto quel tempo, che in compagnia della cara sua scienza non era da lui consumato. Dai conviti, quando eravi dentro, si lasciava talvolta tentare, ma non li cercava. Dallo Spedale alla casa, e dalla casa allo Spedale, e rade volte alla bottega da caffè, e queste per vedere i colleghi e gli amici, che ivi solean ragunarsi, ecco la vita ch'egli in Padova conducea. Ed erasi talmente alla medicina donato, che sentendo molto avanti nelle Belle Lettere, prime cure della sua gioventù, e che poscia offerirgli poteano alquanto di sollievo, si facea coscienza di lasciar loro anche un minuto di tempo, per non rubarlo alla sua occupazion prediletta; e così di Medicina erano i suoi studj, e le sue distrazioni di Medicina. Quando volea studiare, pensava e scrivea sopra la Medicina; quando volea divertirsi, leggea libri medici. Tanto era l'amore, ch'egli alla sua Scienza portava! Nè la sua Scienza ingannollo. Anzi alta riputazione guadagnato gli avea tra gli Italiani, e tra' più illustri forestieri, che spesso di lui dimandavano o per conoscerlo, o per consultarlo nelle lor malattie. Una volta, trovandosi in Venezia, guarì sua Madre, che si trovava in Corfù, e mentre ch'ei pure giacea nel letto ammalato. Di questi consulti a voce e in iscritto qua e là, richiesto, ne mandava.

Come prima giugneva in una città la sua abitazione s'empiea di gente, che a consultarlo accorrevano.

Di senso squisito per le cose della bella Letteratura, ed autore nella sua prima gioventù di non pochi versi, ultimamente ei rigettava gli ornamenti dello stile, come tanti belletti, che avrebbono deturpato la faccia di una grave e saggia matrona qual è la sua Scienza. Il suo stile per altro non ha tutta quella rusticità, che avevan le sue parole.

Sanguigno di temperamento, era divenuto melanconico per riflessione; e forse anche per le vicende della fortuna, da cui fu spesso travagliato; e per la sua mal ferma salute. Comechè assai pronto allo sdegno, facendo forza all'indole sua, di rado assai si sdegnava. Aveva acquistato, forse a sue spese, una cognizione profonda degli uomini, ch'erasi convertita in una somma prudenza. La quale per altro non gli impedì mai di por sua fiducia in chi n'era degno, e di stringere varie amicizie, delle quali era osservator fedelissimo.

Aveva una dolcezza, una insinuazione di tratto, che si facea strada per tutto. Umanità grande. Quando trovavasi alla corte dell'Ambasciatore, ei medicava con la stessa premura il più infimo de' di lui famigli, che l'Ambasciatore medesimo Nel soccorrere gli amici bisognosi, ad onta delle sue scarse fortune, più che in ogni altra cosa, sollecito. Non è dunque meraviglia s'egli nelle sue sventure trovò più volte negli amici soccorso.

Tutta questa dolcezza, tutta questa umanità, mista con una gravità decorosa, egli alla sua scuola portava. Amavanlo quindi qual padre i suoi discepoli, lo adoravano, lo idolatravano; ed egli quai figli li riguardava, e dai loro progressi somma compiacenza traeva. A chi ottenne la stima e l'affetto di una persona più non riesce difficile d'indurre in essa le proprie inclinazioni, ed il proprio entusiasmo raccendere. L'ardore per lo studio, che il Professore *Bondioli* a'suoi alunni inspirava, farà epoca nei fasti della Clinica di Padova; ardore, ch'era ben mantenuto ed alimentato dal suo valoroso

ripetitore il Sig. Dott. *Giuseppe Montesanto* di Mantova, cui debbo in gran parte le notizie mediche, che in questo Elogio si trovano, e a cui non farò che render giustizia s'io dico, che per dottrina, per ingegno, per candidi costumi, e gentili, ben meritava quell'alta stima, e quella viva amicizia, che per lui nudriva il *Bondioli*.

Con un corredo di tante sode, luminose, ed amabili qualità ognun s'avvede, che il *Bondioli* non può aver mancato di estimatori, e di amici; e grande infatti erane il numero, di ogni età, di ogni sesso, di ogni condizione. Basterebbe nominar per tutti il gran *Cesarotti*, che onorarlo solea del titolo di suo figlio, e figlio suo primogenito, e che nella ultima sua infermità parea temere, più che per sè medesimo, per lui, ch'era infermo in Bologna di quel male, che il trasse al sepolcro. E mi si permetta ancora di dire, che uno di coloro, che amollo, e ne fu amato, e che ne pianse forse più di tutti amaramente la perdita, e ne serberà eterna la memoria, fu chi scrisse questo Elogio: nè senza qualche rimorso lo scrisse, temendo che questo non venga a defraudar l'amico delle più degne laudi, che una penna più valorosa gli avrebbe invece tessute. Che dove qui fossegli permesso di parlar più a lungo di sè, e di sfogare alquanto il suo animo, chi sa che le lagrime dell'amicizia, e della riconoscenza, non facesser le veci di un più magnifico Elogio? Senonchè sembrerà forse anche troppo questo breve sfogo, ch'io prego il lettore di perdonare ad un uomo, il quale, comechè giovane ancora, fu più volte dalla fortuna in simil guisa colpito.

A . ☧ . Ω

A . ☧ . Ω

PETRO . ANT . BONDIOLIO

DOMO . CORCYRA

EQVITI . CORONAE . FERREAE

COOPTATO . IN . COLLEGIVM . CC . VIRORVM

ELECTORVM . REGNI . DOCTORVM

PHILOSOPHO . ET . MEDICO

QVI

THERAPEVTICEN . IN . ARCHIGYMN . BONONIENSI

CLINICEN . IN . ARCHIGYMN . PATAVINO

EXPLANAVIT

VIR . INGENIO . ET . ERVDITIONE . PRAECELLENS

EDITIS . OPERIBVS . CLARVS

AVDITORIBVS . ACCEPTISSIMVS

GRAVITATE . ET . CONSTANTIA . NEMINI . SECVNDVS

BONONIAE

QVO . AD . COMITIA . COLLEGII . SVI

CONVENERAT

OBIIT . A. D. XVI . K. OCT. A. MDCCCVIII

NATVS . ANN. XXXXIII

DOCTORES . ARCHIGYMNASII . BONONIENSIS

COLLEGAE . VETERI . PRAESTANTISSIMO

F. C.

ELOGIO

DEL SIG. GIAN-FRANCESCO MALFATTI

SCRITTO DAL SIG. GIUSEPPE VENTUROLI.

Ricevuto li 26 Febbrajo 1810.

Gian-Francesco Malfatti nato del 1731 in Ala di Roveredo di nobile e titolata famiglia, aspirò di buon'ora ad un titolo che non retaggio degli avi, ma fosse premio di sua propria virtù. Di che diede non fallace presagio l'età sua giovanile, apparendo nel giovanetto tal felicità di natura, e tanta fermezza di volontà, che dovea scorgerlo ad alta meta, a qualunque parte della letteratura gli fosse piaciuto avviarsi. Studiò belle lettere in Trento, e in Verona; indi voglioso delle più gravi discipline si recò a Bologna, sede in ogni tempo celebratissima delle scienze. Fioriva allora quella città più che mai per concorso di chiari ingegni; e d'ogni maniera di dottrina avresti potuto trovarvi ed insegnamenti ed esempj. Quivi nella scuola dell'immortale *Francesco Maria Zanotti* la filosofia gli si presentò sotto gentili sembianze, ornata di tutte le grazie, che non si disdicono al suo nativo decoro. Nè meno schietta eleganza trovò dappoi presso la celebre *Laura Bassi*, allorchè preso dagli allettamenti della fisica, a lei si diede discepolo. Così per piano e piacevol cammino fu il *Malfatti* introdotto agli studj della filosofia; nè gli toccò, come a molti di quel tempo, d'avvolgersi fra il bujo della vecchia scuola, e sostenerne la disgustosa barbarie.

Sebbene non era l'animo suo di tal tempra, che l'austerità degli studj lo spaventasse; e la verità seppe piacergli, comechè incolta e disadorna. E ben ne fece la prova, allorchè sotto la severa disciplina del P. *Vincenzo Riccati* tutto s'internò e si nascose nelle scienze matematiche. Soleva que-

Gianfrancesco Malfatti

sto celebre geometra condurre i suoi più cari e più ingegnosi allievi per via non guari dissimile a quella per cui *Giovanni Bernulli* educò già a tanta gloria il giovane *Eulero*. Appena delibati i primi rudimenti, proponevasi tosto al giovanetto alcun problema, su cui dovesse far prova delle sue forze. Ascendeasi di grado in grado a quistioni più ardue; e a mano a mano che s'invigoriva la mente, gli si opponeano più duri contrasti a superare; e quando per avventura perduta si fosse la traccia, appena concedeasi allo smarrito intelletto l'ajuto d'un lieve cenno, onde rimettersi sul sentiero. Era così quella scuola un difficile esperimento non meno che un utilissima esercitazione d'ingegno.

Dopo alquanti anni di siffatta istituzione, uscì il *Malfatti* dalla scuola di *Riccati*, già degno di stare a paro co' primi geometri dell'Italia. I suoi maestri spargevano largamente la fama del suo sapere, ed il Marchese *Cristino Bevilacqua* si tenne lieto d'invitarlo presso di sè a Ferrara con assai larghe proferte. Avea questo Signore raccolto in sua casa una scelta biblioteca, e un bel gabinetto di fisica; confidò l'una e l'altro a *Malfatti*, ed accordogli una pension vitalizia, nobile alloggio e trattamento, con libertà intera di darsi tutto a' geniali suoi studj: condizion liberale sopra d'ogni altra, senza la quale egli avrebbe avuto a vile tutt'altro dono, siccome prezzo di schiavitù.

La liberalità del Marchese *Bevilacqua* è degna di lode tanto maggiore quanto a più alto scopo mirava che non era la sua privata soddisfazione: poichè alla patria non meno che alla sua famiglia ei volle coll'opera di sì preclaro ingegno procacciare ornamento ed utilità. Quindi confortollo ad aprire scuola in sua casa, ed istruire nelle scienze fisiche e matematiche la gioventù Ferrarese: il qual consiglio volonterosamente abbracciato da *Malfatti* diè nuova vita in Ferrara a questi studj che per lo innanzi vi erano in poca stima, e che poscia per opera di lui e del suo egregio collega *Teodoro Bonati* prosperarono lietamente. Era il *Malfatti* non meno

valente maestro, che sagace e profondo coltivator della scienza; le sue lezioni tessute con esatto metodo, esposte con singolare chiarezza, sparse di soave facondia erano tanto più ad istruire efficaci, quanto più ad udir dilettevoli. E questi pregi con maggior lustro comparvero, quando nel 1771 la ristaurazione dell' Università di Ferrara accaduta per opera del Cardinale *Riminaldi* tolse il *Malfatti* all' ombra della domestica scuola, e nella pubblica luce lo collocò.

Fregiato allora d' un titolo ragguardevole, sedendogli compagni al fianco gli uomini più riputati e più scelti in ogni maniera di lettere, conobbe *Malfatti* essere omai tempo di sormontare quella modestia che sino allora lo avea ritenuto dall' esporre al pubblico i frutti delle sue veglie: chiedere ed aspettarsi da lui che con durevoli monumenti del suo sapere accrescesse fama alla nuova Università, ed a quella città rendesse onore che egli oggimai riguardar doveva come sua patria. Non tardo a rispondere all' onorevole aspettazione, egli segnò il primo anno della nuova carriera colla pubblicazione del suo tentativo per la risoluzione delle equazioni di quinto grado. A commendazione della quale opera non sarà poco il dire che egli gareggiò in quella ricerca coll' immortale *La-Grange*, e in qualche parte gli precorse. Poichè mentre questi inteso a perfezionare i metodi di *Eulero* e di *Bezout* giunge a scoprire come la trasformata da quelli proposta possa dal ventesimo quarto grado abbassarsi al sesto, ecco nello stesso tempo *Malfatti* per una via tutta nuova e tutta sua perviene dirittamente a quella stessa equazione di sesto grado, e non solo il primo coefficiente, come *La-Grange* avea fatto, ma l' intera trasformata ne pone sotto gli occhi. E procedendo più innanzi, accenna come da quella del sesto grado una seconda trasformata derivi del grado decimo, e da questa una terza, e così si proceda oltre ogni limite. Il quale infinito progresso perpetua per dir così, la speranza di conseguire in ultimo la bramata risoluzione; bastando a ciò che fra le infinite trasformate che di mano in mano si derivano,

una s'incontri divisibile per alcun fattore di grado inferiore al quinto. Confortato da questa lusinga, egli non tenne mai per disperata la riduzione delle equazioni del quinto grado: nè volea consentire al chiarissimo *Ruffini* che di ottenerne la risoluzion generale ci togliesse la speranza.

Intorno a quel tempo avvenne cosa al nostro *Malfatti* tanto cara, quanto preziose sono le amicizie conciliate dalla conformità dell'ingegno, e de' costumi. Gli sopravvenne compagno il Veneziano esgesuita *Alessandro Zorzi*, giovane di candida indole, di vasto e celere ingegno, cui il Marchese *Bevilacqua* quanto generoso altrettanto giusto apprezzatore degli uomini avea confidata l'educazione di due giovanetti nipoti. Strettissima fu la famigliarità di *Malfatti* con questo giovane ne' pochi anni che passarono insieme. Egli aveva ispirato al suo amico il genio degli studj matematici, e si prendea diletto nel coltivarlo; ed a vicenda la conversazione del *Zorzi* piena d'ingegno, d'amenità, di dottrina, era piacevol sollievo alla severità delle sue meditazioni. La società dei due dotti amici fu desideratissima a quanti in Ferrara avean fama di sapere; e pressochè ogni sera in casa *Bevilacqua*, come nell'albergo delle Muse raccolti D. *Alfonso di Varano*, e l'Abate *Barotti*, sublime il primo, l'altro grazioso poeta e puro scrittore, e l'eloquente *Minzoni*, e il dotto esgesuita *Valentino* D. *Tommaso Serrano*, e più altri nobili ingegni passavano lunghe ore con iscambievole giocondità, ponendo in comune i frutti di loro non volgare dottrina. Il celebre *Clementino Vanetti* Roveredano cugino del nostro *Malfatti*, e a tutti questi per genio e per amistà congiuntissimo, prendea parte per lettere agli eruditi loro trattenimenti, e godea di dar moto ed eccitamento alle quistioni che tra loro di sovente s'agitavano con pari urbanità e sottigliezza. Più volte ho inteso dal mio egregio Collega il Signor Professore *Antonio Giuseppe Testa* ricordar con diletto e con desiderio quella invidiabile compagnia. Egli ancor giovanetto e scolare di *Malfatti* eravi sovente introdotto, e dai ragionamenti

di tali uomini sentiva sorgersi in cuore i primi germi della virtù e il nobile desio della gloria.

Un prezioso frutto di quella dotta adunanza avrebbe raccolto il pubblico, se poteasi compiere il progetto che pur in essa nacque, di riformare, anzi di tutto rifondere l'immenso lavoro della Francese Enciclopedia. Quel fervido ingegno del *Zorzi*, primo autor del Progetto, non risparmiò a tanta impresa nè sè stesso, nè altrui. Egli seppe così fortemente eccitare gli studj de' letterati Italiani, e tanti ajuti procacciarne, quanto ne fa fede il Prodromo che uscì alla luce fra il comune applauso: e se l'immatura morte di lui non avesse interrotto il disegno, a grande onor dell'Italia ne sarebbe tornata l'esecuzione. In quella occasione non mancò *Malfatti* all'amico, ed ornò quel Prodromo della soluzion d'un problema sulla partizione de' numeri. Quest' articolo è uno de' più profondi ed estesi che adornino quel libro. E forse una cotanto lunga e spiegata analisi d'un particolare problema potrebbe parere meno acconcia ad un articolo enciclopedico; ma non è per questo di meno onore al *Malfatti*. Il qual poscia sempre più invaghito di quella quistione la ritrattò più volte, ed a maggiore ampiezza la estese. E veramente ancora dappoichè il chiarissimo Sig. *Paoli* additò nel calcolo delle differenze finite la via diretta a sciogliere le questioni risguardanti la partizione de' numeri, il problema di *Malfatti* non lascia di meritare particolar trattazione per le difficoltà cui soggiace, e pe' sottili artificj onde conviene ajutarsi.

Volle poco appresso il Malfatti mostrare a' suoi discepoli coll' esempio quello che spesse volte inculcava loro col discorso dell' eccellenza del metodo sintetico nella Geometria, e quant' oltre possa con esso procedersi eziandio nelle più difficili ed intricate ricerche. Però prese a svolgere in una elegantissima operetta le proprietà dell' Ellisse Cassiniana. Quest' ellisse nelle piccole eccentricità di poco si allontana dalla forma della notissima ellisse di Apollonio; se non che il *Cassini* la credette più acconcia a rappresentare le orbite

de' pianeti. Ma il pensiero del *Cassini* andò fallito, e la sua ellisse proscritta dal Cielo si rifugiò negli studj de' geometri, ai quali per affannarsi intorno a una curva non è d'uopo che la natura o ne' celesti spazj, o quaggiù in terra ne figuri la traccia. Spiaron essi curiosamente come ella cangi d'aspetto, e in altre ed altre forme si muti, a misura che l'eccentricità va crescendo. A grado a grado il suo colmo si viene schiacciando, a tal che comincia a ripiegarsi in dentro, sminuendosi ognora più l'ordinata del centro. Giungesi al segno che questa ordinata sparisce del tutto, e la curva allora ti si presenta composta di due ovali annodate nel centro. Se si procede più avanti, le due ovali si staccano, e vanno sempre più scostandosi fra loro, e tuttavia impiccolendo; sinchè all'ultimo la curva si raccoglie e si ristringe tutta in due soli punti posti di qua e di là dal centro ad infinita lontananza.

Queste metamorfosi onde una curva può sfigurarsi per modo che agli occhi del volgo non rassembri più quella, non sogliono già ingannare i Geometri, usi a riconoscer le curve da ben altri caratteri che dalla loro visibile apparenza. Di che tanto più dobbiamo maravigliarci che la nostra ellisse anche agli occhi loro potesse talvolta mascherarsi così, che più non sapessero raffigurarla.

Pure allor quando i due fratelli *Bernulli* intesi a costruire l'isocrona paracentrica di *Leibnizio* delinearono quella curva, cui dalla forma d'un nastro diedero nome di Lemniscata, quanto non andaron lontani dal riconoscere in questa loro lemniscata una delle forme sì varie della ellisse Cassiniana? Nobilitarono poscia la lemniscata gli studj sublimi del Conte *Giulio Fagnani*, il quale insegnò a rettificarla cogli archi delle sezioni coniche, e con questo pose i fondamenti della nobilissima teoria delle trascendenti ellittiche, cotanto promossa a' nostri giorni. Nè questa pure, nè molt'altre particolarità che vi discoprì il *Fagnani*, non bastarono a fare accorti i geometri della identità delle due curve. Questa non che ad altri, potè nascondersi a *D'Alembert*, il quale nella

Enciclopedia così ragiona della Cassinoide e della Lemniscata, come se fossero due curve differenti.

Una singolare proprietà meccanica della nostra curva dovea finalmente porgerne indizio. Venne in mente al nostro Socio Sig. *Teodoro Bonati* di ricercare per via d'analisi quella linea, lungo la quale scorrendo un grave spenderebbe egual tempo nella caduta, o scendesse per l'arco, o per la corda ad esso arco sottesa. Trovata l'equazione della curva, piacquegli imporle il nome di Curva isocrona. Ora eccoti che il nostro *Malfatti* nell'indagare sinteticamente le affezioni della curva Cassiniana, vi ravvisa appunto questa proprietà stessa. E questo fu, s'io non erro, il primo sentore a riconoscer per ultimo che l'Ellisse del *Cassini*, e la Lemniscata de' *Bernulli*, e l'Isocrona di *Bonati* altro poi non sono che una sola e medesima curva, cui sotto diverso nome vagheggiarono diversi geometri, rivali senza avvedersene.

A questo Trattato sull'Ellisse Cassiniana tenner dietro altri ed altri lavori del nostro *Malfatti*. Lungo sarebbe il dar di tutti contezza. Per tutto vedi il degno allievo di *Riccati* premer le orme del Maestro, e di là dov'egli fermossi, sovente prender le mosse a più alte investigazioni. Il vedi prescegliere que' soggetti che erano stati argomento degli studj del *Riccati*, e dar compimento e lume alle ricerche di lui e sulle serie ricorrenti, e sulle integrazioni per archi d'ellisse o d'iperbola. Il vedi giovarsi sovente nella risoluzione de' problemi geometrici o della pura sintesi, o d'un industrioso accoppiamento di quella coll'analisi; metodo che fu famigliare al *Riccati*, studioso ricercatore dell'eleganza geometrica. Fu anche al par di *Riccati* sottilissimo indagatore di que' paralogismi ne' quali inciampano non rade volte anche i più svegliati ingegni: nè credette far onta a molti insigni geometri, nè poco onore a sè stesso, quando col supplire alcune teorie difettose, quando collo svelar qualche equivoco, quando col richiamare al rigor geometrico alcune dimostrazioni meno severe.

Fu

Fu pure una conformità del suo genio con quello del *Riccati* il tenersi ch'ei fece nella piena luce della geometria e dell'algebra pura, e raro o non mai discendere alle applicazioni fisiche. Que' problemi che trattò di Meccanica, essi pure appartengono alla scienza speculativa, e si fermano nell' astratta nozione dell'equilibrio. Di tal maniera è l'ingegnoso suo tentativo di sciogliere quel sì famoso problema del come si comparta la pressione d'un peso fra gli appoggi che lo sostentano. Questo problema diventa indeterminato tostochè gli appoggi sono in più numero di tre, ed ella è forse un' ostinazione d'alcuni geometri il tenere che esso debba pur essere determinato nella realtà delle cose. Certo è che la natura non offrendo mai punti d'appoggio d'eguale ed invincibil fermezza, non ha mai d'uopo di scioglierlo. Privi di saldo fondamento, si rivolsero alle conghietture ed alle ipotesi, la varietà delle quali portò varietà e discordanza nelle diverse soluzioni che ne furon prodotte. Accadde ad *Eulero* che la sua ipotesi fosse trovata non pure precaria, ma assurda; di che meno debbono dolersi *Lorgna* e *Delanges* che anche nelle ipotesi o ne' calcoli loro alcuna fallacia si discoprisse. Non isconfortato da tali naufragj il nostro *Malfatti* volle egli pure affacciarsi al guado periglioso, ed è forse il solo che ne sia uscito senza rimprovero. La sua divinazione ebbe lode d'ingegnosa, di verisimile, di conforme alle leggi dell'equilibrio, ed all'analogia di que' casi ne' quali il comparto delle pressioni può assegnarsi con sicurezza. Ella è, se vogliamo, una divinazione e nulla più. Ma chi vorrà di questo accusarla, quando e la natura dell'argomento non può ad altro piegarsi, ed egli stesso d'averla per tale si dichiarò schiettamente?

Questo suo lavoro non men degli altri che o prima o dopo di questo il tennero occupato, erano quasi tributi de' quali egli si credeva obbligato alle molte ed illustri Accademie che si pregiarono di annoverarlo fra suoi. Dee sopra tutte la Società Italiana serbar grata memoria della preferenza

che egli parve accordarle; poichè i più copiosi frutti delle sue fatiche furono ad essa consecrati. Eravi stato ascritto fra' primi dal benemerito Autor della Società Cavalier *Lorgna*; e non v'è per avventura Volume di queste Memorie che ornato di qualche dotto e profondo suo scritto non attesti l'attività non mai stanca di quella mente. Quindi non più per l'età che per il sostenuto travaglio egli ben meritò la pensione decretata dalla Società ai veterani ed operosi colleghi.

Tra questi studj e tra i doveri puntualissimamente adempinti della scuola partiva egli il suo tempo. Una scelta ed erudita società, della quale egli era delizia ed ornamento, porgea dolce sollievo alla mente affaticata, nè gli lasciava desiderare i romorosi sollazzi. La tranquillità domestica e la pubblica stima appagano i modesti voti d'un letterato non ambizioso. Così egli vivea felice; e la sua felicità sarebbe stata perpetua, se sul declinar de' suoi giorni, le vicende politiche dell' Italia non avessero portato sino ne' più solitarj recessi il turbamento, e l'inquietudine. Pur se umano consiglio potea bastare a dirigersi in mezzo a tanta procella, egli non trascurò le misure della più accorta prudenza. Sebbene io gli fo ingiuria ascrivendo ad accortezza quello che fu moderazion di natura, educata dalla filosofia e dalla religione. Egli non alterò d'un punto l'equabil tenore di sua vita; punto non si frammischiò ne' pubblici affari; la sua mente non concepì un pensiero ambizioso, non fuggì dal suo labbro una parola imprudente. La sommissione alle leggi, il rispetto ai magistrati furono le invariabili norme d'ogni suo atto; e quelle stesse dichiarazioni che si vollero da lui, furono per suo antivedimento scorte dal consiglio di personaggi autorevoli, invocati da lui quai testimonj e garanti di sua condotta.

Tanta moderazione congiunta a tanta prudenza non valsero a fargli schermo da' colpi dell' ingiustizia. Appena invasa Ferrara dagli Austro-Russi, eccoti il venerabile vecchio condannato senza difesa, preso il suo antivedimento a ludibrio,

eccolo spogliato d'ogni incarico, d'ogni onore, d'ogni ricompensa. La folgore che colpì molti, parve che sopra lui principalmente piombasse; ed egli ebbe per suo affanno maggiore, chiusa la bocca a scolparsi, ed oppresse a forza sul labbro le più giuste querele.

Ora qual dura tempra di cuore avria potuto così rinforzarlo, che a tanta ingiuria si rimanesse insensibile? Ben più che il proprio danno lo ferì altamente il vile ritrarsi di coloro che consapevoli e mallevadori di sua incolpabile condotta, non avrebber dovuto negargliene in così grave occasione libera e leale testimonianza. Tale ei ne risentì, non so s'io dica sdegno, o dolore, che non pure la sua robusta salute ne ricevè detrimento, ma parve ancora ne rimanesse infievolito il vigor della mente, insino allora vegeta e giovanile.

Ridotto nella solitudine del suo gabinetto, l'amore de' geniali studj temprò l'acerbità del rammarico, e fecegli a poco a poco dimenticare l'iniquità de' tempi e degli uomini. Nè molto andò che col risorgere del governo Cisalpino riebbe quanto aveva perduto, e fra breve intervallo ottenne anche il riposo meritato con tanti anni di utile ed onorato servigio.

Sciolto dell' obbligo della scuola, si diede interamente allo studio non interrotto giammai nè dalle malattie che di tratto in tratto lo afflissero, nè dalla cecità pure che negli ultimi anni gli sopravvenne. A toglier la quale si restituì a Bologna, ove depresse le cateratte per mano dello spertissimo Professore *Giuseppe Atti*, racquistò facoltà di leggere, sebbene con ajuto di opportune lenti, e non senza stento. Ma non volle già che questo disagio lo ritraesse dalle fatiche usate, rammentando quel che avea fatto il grande *Eulero* già cieco, e quello che nella piena cecità avea potuto egli stesso. Si rimise adunque nel consueto tenor di vita, fattogli omai per lunga abitudine necessario. E fu appunto nel più forte d'un difficile lavoro analitico, che il soprapprese il primo attacco d'una ritenzione d'orina, che in pochi giorni lo condusse agli estremi. L'appressar della morte nè gli tolse

l'uso de'sensi, nè sbigottì il suo coraggio; e la religione di cui fu sincero cultore, siccome avea raddolcito i travagliosi momenti della vita, così sparse di consolazione gli estremi giorni. Finì di vivere il dì 9 di Ottobre del 1807 avendo toccato l'anno settantesimo settimo di sua età.

Qual fosse la dignità del suo aspetto, appare dall'effigie prefissa a queste carte, delineata dall'amica e celebre mano di *Clementino Vanetti*. Così potessero queste carte medesime degnamente ritrarre l'immagine del suo ingegno, e delle sue virtù. Ma la memoria di queste vivrà lungamente nell' amore e nel desiderio di quanti il conobbero: le prove del suo sapere ne'molti suoi scritti, e singolarmente ne' Fasti della Società Italiana dureranno immortali.

Clarina Mosconi del. A. Gajani scul.

Gian-Verardo Zeviani

ELOGIO

DEL SIG. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI

MEDICO E FILOSOFO

SCRITTO DAL SIG. ANTONIO GUARIENTI VERONESE.

Ricevuto il primo Gennajo 1811.

Se ad ogni Consolo vittorioso, se a qualunque poco più che ordinario oratore, se a' comuni maestrati tutti, e a' mezzani filosofanti si fosse prodigalizzato l'onor del trionfo, le epigrafi, i pubblici funerali, o le statue, meno illustri poscia ne sarebbono pervenuti gli *Emilj*, i *Demosteni*, gli *Agrippi*, e' *Demetrj*; e per assai meno sagge, e meno assai giuste ora avremmo le Romane, e le Greche ordinanze. Da sì chiarissimi esempli manifestamente apparisce, quanto errino quelle Città, ed Accademie, che le laudi loro ordinar sogliono indistintamente, pur anche a coloro, i quali poco più là de' confini della nativa lor terra abbiano fatto sibilar il suo nome, che senza di esse ignoto passeria bene spesso ai meno tardi nepoti. Per la quale irregolarità e soverchianza di elogj addiviene, che se per ventura sia poi da esse Accademie e Città messo in non cale un qualche nobile personaggio, il quale per opere di mano, o d'ingegno abbia la vita sua segnalata, di tanto minor fregio ne defraudano la memoria di lui, quanto maggiore si è il disonoramento, ch'elle con ciò procacciano a sè medesime. Ma a riparare sì fatti sconcj egli non è solo in pronto l'esempio autorevole della Greca, e Romana Repubblica; ma sì ancora il consiglio provvidentissimo di alcune Letterarie Adunanze, dalle quali, conosciutosi il disordine, che ne viene, abbandonando le costumanze della veneranda Antichità, fu sapientemente ordinato, che soltan-

to a' sovrani ingegni si dovessero le solennità degli onori tributare pubblicamente. Ed una infra l'altre di sì fatte Adunanze ne viene indicando questo, qualunque siesi, mio scritto; e dessa è la Società Italiana, la quale, fondata a sostegno delle Scienze, e ad onore del bel paese, cui'l mar circonda e l'Alpe, ha per costume di tramandare a' posteri la memoria solo de' grandi; perchè solo de' grandi fra gl' Italiani ingegni Ella intreccia sempre a sè stessa la sua corona. Perciò, lo stile suo seguitando, patir non può che si taccia di quel perspicace filosofo, e medico sagacissimo, che, non ha guari, disciolto dal terreno suo carcere, rinnovellò alla mia patria l'epoca dei *Montani*, e de' *Fracastori*; e la gloria de' suoi più celebri sozj ritornò ai Letterarj Consessi, cui era ascritto. Con che, senza aggiugner più innanzi, già il mio leggitor mi previene ch' io intendo dire *Giovanverardo Zeviani*. Le pregiate scritture, che di questo egregio suo membro pur ne' volumi della Società stessa già pubblicaronsi, bastano ad appalesarlo per grande, ed a perpetuarne il suo nome: ma a disbramare non bastano lo intendimento, ch' ella ha conceputo di onorarlo, volendo essa pur anche ogni più bella azione e virtù di lui particolarmente encomiata, e ad altrui stimolo e norma nelle sue Memorie descritta. A sì difficile eseguimento invitata dal Veronese *Galilei*, Presidente di quell' insigne Istituto, l' inesperta mia penna, datomi tosto divisatamente a considerare, e conoscere quanto di più singolare e pregevole v' ha intorno di lui, io non ne avvisai appena la vastità di sue cognizioni, la profondità del sapere, e l' eccellenza dell' Opere, che maravigliar ne dovetti altamente, e credere di lui ben degni e dovuti i diversi onori, che gliene vennero, a tale che n' ebbi a sclamare:

Quanto lo miro più, tanto più luce.

Che se altrettanto non avvenga a chi questi fogli avrà a leggere, ella è per altro sì fattamente universale la celebrità di *Verardo*, che mestieri già non sarebbe di fare altrui persuaso ciò provenire dalla giovanile insufficienza dello scritto-

re, anzichè da imperfezion del subbietto. La quale insufficienza mia, se mal per ventura saprà reggere alla gravezza di tanto peso, io spero che mi sarà fatto almen buono lo aver tentato, e voluto.

E nel dar mano al lavoro, volendo l'ordin proposto, che dall'origine di lui s'incominci, n'andrà taluno forse scontento, assai corrucciandosi con l'ingiusta fortuna, dovendo io dire qui in su le prime che un sì ragguardevole personaggio abbia avuto a patria San Michele, contado un miglio da Verona, ed a genitori (1) *Vincenzo*, e *Maddalena Sandri*, di progenie amendue, la quale, quanto proba ed onesta, difettava altrettanto di cospicue aderenze, e d'illustri maggiori, e per mediocrità di patrimonio, se non ignota del tutto, non però mai certo distinta. Cotale scontentezza io già avvisava dovere in alcuno avvenire; ma insieme avvisando di qual maniera questi, ed altrettali fortuiti beni sogliano sovente senza merito di chi li possiede, il conseguimento ottenere della celebrità, e degli onori, cominciò quindi a piacermi un tal difetto in *Verardo*; avvertendo che a maggior sua nobiltà, ed a più vera tornava il non dover riconoscere, che da sè stesso i bei progressi della sua gloria. Questa, come vedrassi, a grado così elevato innalzollo, che a chi non sa farsi bello, se non di fregi non proprj, avria egli potuto rinfacciare le argute risposte (2) da *Ificrate*, e da *Anacarsi* date a quegli altezzosi, che l'ignobiltà del casato e della patria loro rimproveravano; ed una non inferior chiarezza pur anche potuto avrìa contrapporre al vivo lume di quelli, che co' loro proprj gli aviti ornamenti avessero e conservati e accresciuti. E a pronosticare ch'ei divenir non dovesse di picciol conto, aspettar non convenne che nel ginnasio de' Padri

(1) Da essi nacque *Verardo* il dì 29 Maggio 1725.

(2) Lo Scita *Anacarsi*, oltraggiato da un Ateniese per l'oscurità della Patria, rispose: *mihi Patria probro, tu Patriæ*. Ed *Ificrate* ad *Armodio*, che l'ignobiltà del sangue rimproveravagli, disse: *la nobiltà mia incomincia da me, e in te finisce la tua*.

Gesuiti in Verona il corso della scolastica istituzion terminasse con esso l'ammirazione dei Precettori: conciossiachè fin dagli anni più giovanili e l'ottima indole, e più assai l'affezion per lo studio ciò manifestava oltremodo. La quale sua nobil passione non impedì però mai ch'egli non si assoggettasse del miglior buon volere alle disposizioni de' suoi Genitori pur ad essa contrarie. Dal che manifestò egli vieppiù quel rispetto, che inverso loro si aveva. E vaglia il vero; di cinque fratelli, tutti di sommo ingegno (tra' quali *Agostino* sarà per sempre di tenera rimembranza alla Repubblica delle Lettere) destinato egli all' Uficio delle Ragioni Pubbliche, comecchè per sua inclinazione tendesse alle mediche e filosofiche discipline, pur vi si acconciò con tanta docilità, quant' era l'avversion ch'ei ci avea. Per la quale avvisando il Padre che ogni sforzo del figliuolo tornava inutile per riuscirvi, deliberò alla perfine di secondare la tendenza di lui; anche perchè insistendo a volerlo applicato a quell' esercizio, a cui la naturale inabilità contrastava, come avvenne di *Aperiandro*, non avesse pur egli a meritare in qualche parte il rimprovero, che questo cattivo poeta n' ebbe da *Archidamo*. Perciò senza più mandollo all' Università di Padova, alla quale di que' giorni per lo valore de' suoi Professori traevano, più che ad ogni altra, da tutte parti gli alunni. E qui sì, che il *Zeviani* sè stesso in lui medesimo riconosce, nè più v' è riconosciuto da quelli, che Ragioniere il conobbero! Elevatezza di mente, profondità d' intelletto, facilità somma d'apprendere, ardor di sapere dispiegano tutte a un tempo per lui le qualità più singolari e più rare: e gli avanzamenti di esso nella scienza sono sì maravigliosi, e sì rapidi, che, aggiunti a quella saviezza di costumi, che il tenne mai sempre guardato dai folli vaneggiamenti di gioventù, divenne egli non solo la delizia, e lo stupore de' suoi compagni, ma sì ancora di Padova tutta, e de' medesimi Professori, i quali più presto che scolaro, amavano tenerlosi per loro amico. Corsa egli così la carriera prescritta, venne il dì, che dell' acqui-

stata

stata scienza testimonio gli dovea far quella laurea (1), di cui com' ebbe ornate le tempia, stette in dubbio il comune giudizio, se ella da lui, o piuttosto egli da lei maggior onor ricevesse. Ricco pertanto di Filosofia la lingua e il petto si porta egli a Verona, la quale, elettasi a suo stabil soggiorno, superba di tanto acquisto, affettuosa l'accoglie fra le sue mura, ed il rammarico suo per non aver tutta la parte alla naturale origine di lui va confortando colle speranze di maggior lustro, che a lei da' suoi frutti venirgliene s' impromette. Nè male di fatto ella in suo pensiero si appone. Conciossiachè non appena ebbe compiuto *Verardo* l' esercizio suo pratico sotto la direzione del nostro Protomedico *Girolamo Gaspari*, che adoperò egli guarigioni così difficili con tanta parcità, e semplicità di rimedj, che, se fosse vissuto alla stagion di *Galeno*, forse, come lui, si sarebbe d'arte magica accagionato. A ciò francheggiavanlo le indefesse, e non mai interrotte sue osservazioni e meditazioni, alle quali facea sempre servire di guida i più accreditati maestri, e sopra tutti il suo *Ippocrate*, di cui non avea minore stima e venerazione, di quello che di *Omero* s' avesse *Alessandro*. Che se leggesi di questo Principe che chiamar solesse l'Iliade la sua provvigion d' arte militare, e i dettati di quel primo testore delle antiche memorie custodire nella cassetta di *Dario*, *la più preziosa* (diceva egli) *del mondo*: non altrimenti *Verardo* tenea gli scritti di quel primo lume de' medicanti per sua provvigion d' arte medica, e nella parte più nobile di sè stesso riposti serbavali, tutti, dirò così, di già a mente sapendoli. Alla qual cosa ajutollo ad assai la straordinaria felicità, ch' egli aveva di ricordare. In questo modo venne egli l'altrui considerazione acquistando, sì che parecchi infermi, alle altrui curagioni raccomandati, non si credeva poter di lor guarigione assicurare bastevolmente, senza ch' egli vi avesse parte.

---

(1) Questa venne lui data nell' anno vigesimo terzo di sua età.

Per questo accadeva che da assai medici era la sua opinione consultata e apprezzata; della quale non potendo egli essere più liberale e cortese, facea sorprendere la franchezza, con cui tutti disnodava que' punti, che al sottile e perspicace suo ingegno a discior s' offerivano. Ma se al riportar vittorie de' morbi, ed allo agevolar quelle di chi 'l consultava, lo studio e 'l valore di lui ristretto si fosse al letto soltanto degli ammalati, senza aver ricorso alla penna, molti fallaci e mal conceputi sistemi farebbono pur mo' traviare i più cauti, e di assai utili e rare dottrine saremmo noi privi, senza dire che alla medica scienza sarebbe rallentato non poco il maggior suo ingrandimento. A questo obbietto di soccorrere la scienza, e la pratica, e' professori di essa avendo mai sempre volto lo intendimento e lo affetto; e diliberato perciò di recare in mezzo sani ammaestramenti ed eletti, uno accidente avvenuto in questa nostra Città nel vigesimo ottavo anno dell' età sua venne a fargli determinare, donde ciò incominciare ci dovesse. Ammalato a que' giorni il veneto General *Scolemburgo*, per medico ordinamento prese un vomitivo, cui non appena s' era ingollato, che fra il comune stupor si morì. Di così fatta disavventura, alla medicina sopravvenuta, non fu poca, a dir vero, la gramezza, e, direi quasi, vergogna, che ne provò quest' arte infelice; ma non fu piccolo nè anche il guadagno, che da questa sciagura ella ne trasse per mezzo del suo *Verardo*, il quale, a servirmi dell' espressione di *Plutarco*, operò come l' Ape, che dall' amarezza del timo sa trarre il miele. Imperciocchè conosciuto egli un tal danno da quel vomitivo procedere, di presente e' si colse questa occasione per tor di mezzo lo abuso dei purgativi, che o fuor del bisogno, o innanzi tempo adoprati menavan strage per tutto, ove men s' attendea. E quindi il *Metodo circa l' uso della Purga e del Salasso* fu il primaticcio frutto delle sue applicazioni, che a luce egli diede. In questo, stabilita prima per vera, ed assai più facilmente possibile, l' esistenza di una pletora, da isporcamento delle vie prime di-

sgiunta, passa quindi a far conoscere gli effetti delle purgagioni funestissimi sempre, e non mai nocevoli quelli della emissione del sangue. Tutto ciò poi vi si mostra con prove avvalorate dalla ragione, dall'esperienza, e dalla autorità degli scrittori per modo, ch' ogni avversario del salasso, e favoreggiatore dei purgativi è forzato non più essere alieno dal primo, e la precedenza di esso, ove dei secondi sia luogo, ai correttivi sustituire, i quali parve più proprio al *Zeviani scorrettivi* (1) appellare. Comparso in pubblico questo scritto pose termine di fatto alle svariate quistioni, che per lo disastro dello *Scolemburgo* n'erano insorte: nè da tal lavorío guiderdon più gradito di questo potea certo avvenire al bell' animo del mio *Verardo*, sì fattamente alle contese nemico, che pur anche il nome ne detestava. E se alcuna fiata non si potè egli torre di questo impaccio, almeno e' non v'entrò mai, se non che obbligato a conoscere, o vie più a metter in chiaro la verità: nel che fare si portò egli sempre con tale temperatezza, che merita d'esser dato per modello a coloro, i quali nel contraddire del proprio orgoglio soltanto fan mostra; o come egli stesso meglio ne scrisse (2) *trattenuti vi sono da liti provenienti da una discrepanza di voleri più tosto che di opinioni*. Di così raro contegno fu *Verardo* mai sempre osservator rigidissimo, sì, che il cavarnelo dai termini più circoscritti era quel tutto, che da lui si ottenesse ogni più caldo disdegno. Era tale però sua natura, che gran forza non avea egli ad usare per tenersi da questo lontano; pur tuttavolta mal poteva guardarsene allora, che un qualcheduno o condannato avesse a torto gli antichi, o le cose di loro a spacciare si fosse dato per proprie. Tanto era l'amore e la venerazione, che bene a ragion esso avea inverso que' primi padri delle scienze e dell'arti. Di qua venne, che volendo il *Vetere* (3) dar per nuovo il metodo di trattare le

(1) Metodo circa l'uso della Purga e del Salasso, Part. I, pag. 28.
(2) Nuovo Fonte da cavar Pronostici nelle malattie. Introduzione, pagina 9.
(3) Giornale di medicina dell'*Aglietti*. T. IX, pag. 89.

oppilazioni del ventre inferiore con le percosse di una tagliente scure, non potè frenarsi dal non iscrivere (1) contra costui: *questo metodo non è nuovo, ma prodotto dal Cardano nel* 1550: *e vituperato dall' Acquapendente come si legge nel Sennerto*. Ed allora che mise in dubbio il botanico *Seguier* (2) avervi veleno nel nasso contro l'opinion degli antichi, non potè contenersi dal non rimbrottarlo, scrivendo: (3) *il poco rispetto che si ha della sempre veneranda antichità mette a pericolo di rendersi ridicoli con danno del prossimo:* sentenza, che, bene impressa in alcuni bizzarri cervelli, il guasto alla repubblica letteraria, e ad essi il biasimo diminuirebbe non poco. Or chi da ciò ne inferisse ch'egli tenesse a vile i moderni, troppo ne andrebbe errato; poichè, lasciando egli sì mal talento a chi volesse un eguale disprezzo alle scritture sue procacciare, si dava anzi pensiero di veder tutto quello, che alla giornata sulla medica scienza veniva in luce. Che se poi fu di tanto buon senno, che avesse più a capitale quelli d'infra i moderni, che sulle tracce degli antichi dirigeano i lor passi, non è perciò che nè anche i medesimi novatori si potessero scontentare di lui. E qui far mi può fede quel novello sistema (4), che negli ultimi anni del viver suo, mossosi fin là d'oltramare, discorse in breve per tutto Europa, cercando la medica repubblica porre in ogni banda a soqquadro. Avvegnachè se nol sostenne il *Zeviani* all'entrar suo nell'Italia, e' non vi diede nè anche a traverso; e rimettendolo al tempo, ch'è il saggiuolo infallibile d'ogni scrittore, saviamente ebbe a dire a lui solo essere riservato il diritto di giudicare. Questo riguardo, ch'aveva per tutti, era così proprio di lui, quanto il non sapere invidiar chicchessia, della qual vile passione era egli scevro egualmente, che dello immaginamento di poterla eccitare in altrui. E comecchè da tal peste, vitupero e rovina degli uomini, quasi

(1) In una miscea di suoi MSS.
(2) Botan. pag. 262.
(3) In una miscea di suoi MSS.
(4) Di *Giovanni Brown*.

tutti sien consumati, come dalla ruggine il ferro, secondo il dire di *Antistene*, pur non hassi a durar gran fatica in crederne esente il *Zeviani*, quando in ispezieltà si voglia por mente a quel suo basso sentimento di sè medesimo, il quale con Socratica moderazione sovente gli facea replicare, che quanto più logorava su' i libri, e più confirmavasi ch' egli niente sapea. Ma se l'umiltà vuol ch'esso ignori, quanto abbia di sue più belle dovizie a lui la sapienza dischiuso; le continove inchieste de' suoi consigli, e la pace arrecata col primo suo scritto non lascian però ch' ei non conosca la pubblica confidenza, ch' è in lui riposta. Anzi in guisa n'è assicurato, che comprendendo, da quel filosofo ch' egli era, quanto essa ajuti il vantaggio, cui possono gli ammaestramenti apportare, lavora e pubblica di ventinove anni il suo *Nuovo Fonte da cavare Pronostici nelle malattìe;* per lo quale quest' arte dimenticata ravviva, l'utilità e il valor ne magnifica, e di osservazioni novelle e accurate ne la arricchisce. Mentre questo secondo parto dell' ingegno pellegrin di *Verardo* fra le belle accoglienze dei dotti si aggira, e' non va un anno, che le si vede più che dimezzate da un parto novello, il quale, sebben minore di età, a lui nulladimeno va innanzi e per grandezza, e per iscienza. Vien esso per istruire ad armeggiar contro il Flato Ipocondrico, non ben conosciuto prima dal *Combalusièro*, che dall' altre specie di flati non lo distinse, e mal fino a questo termine riuscite a distruggerlo l' armi apprestate dal Fieno. E ad assicurarne l' impresa, scoperto la qualità, la possanza, e la sua sede nella parte superiore e sinistra dell' addomine, quindi le sole armi atte a superarlo ne addita, non altramente che *Filottete*, il quale indicò quelle d' *Ercole*, senza cui invan dagli Achei si sudava per trionfare di Troja. Alla persecuzione di quell' ipocondrico travagliamento andò pur soggetto *Verardo*, ed a ciò noi dobbiam forse in parte la maggior perfezione di un' Opera sì vantaggiosa. I primi insulti di quel malore cominciato aveva egli a provare già sin dagli anni venzette; i quali tiratisi ad-

dosso per le troppo serie continuate applicazioni, ch' egli faceva, onde condurre a termine tante sue difficilissime curagioni, ne avveniva perciò che ogni volta che l'assalivano, avriano potuto in lui risvegliar la memoria di sue vittorie sui morbi, se il suo spirito sentito avesse di sè, come sentiva quello di *Coclite*, il quale vantava di risovvenirsi del suo trionfo ad ogni passo, che movea zoppicante. Con tutta però cotale moderazion del suo spirito non potea non saper la cagione di quel suo morbo essere state le notti vegliate in su i libri; ma non perciò se n'ebbe egli a distorre; che anzi accrebbe vie più quel lungo studio e'l grande amore, che'l faceva cercare e svolgere i più scelti volumi, per li quali veniva messo dentro alle più secrete cose della Chimica, della Notomia, della Botanica, e della Clinica principalmente, a cui sovra ogni altra intendeva l'animo suo. E se oltra le mediche occupazioni, il tempo, necessario a rinfrancare lo spirito, lo toglie alcun poco dalla sua stanza, nol toglie però giammai dallo apprendere, o ammaestrare; comecchè a farne credere contrariamente di lui s'argomentino alcuni di quella tempra, che mettendo in ridicolo chi ad esso loro sta sopra, con ciò vorrebbono la propria inferiorità minorare. Recano in mezzo costoro ch' egli stesse talor baloccando fra basse cose, e leggieri, di mente maschia indignissime; e per prova ne vanno spargendo, oltra il dovere schiamazzatori, di averlo veduto essi stessi tener conto, fra l'altre piccole cose, e maneggiare alcuni suoi panni lini. Con che a mio credere, o m'inganno, in vece di svilirlo, dipingono in lui un vero filosofo, inteso a riconoscer sè stesso, ed i bisogni, a' quali pur dee assoggettarsi, per quantunque eminente ella sia, la sempre umana circoscritta sapienza e grandezza. Che se tuttavia lor venga fatto di far credere secondo suo modo, otterranno forse per questo che sieno men veri i suoi insegnamenti, e men chiare le sue produzioni, e meno ancora ammirabili? S'ella è così, non più si rammentin le imprese del discepolo di *Chirone*, nè più s'accordi il primato ad *Alcide*

fra gli antichi eroi della Grecia, poichè oscurati ambedue da assai maggiori bassezze, misto già il primo, e confuso con femminili ornamenti fra le regie donzelle di *Sciro*, e cambiata il secondo per *Onfale* la poderosa sua clava in vil conocchia e in un fuso. Che se per avventura altri credesse mal questi esempli confarsi alle bassezze, che si vogliono del nostro *Zeviani*, essendo quelle de' mentovati eroi in essi avvenute per colpa di vilissimi affetti, non si rammentin dunque più mai le imprese e la grandezza di *Agesilao*, nè la saviezza di *Socrate*, se spesse volte si vider troppo pargoleggiar co' fanciulli. Ed avvegnachè siemi caduto per mano lo accennar quelle azioni del *Zeviani*, che a' loschi ingegni sogliono sembrar minuzie, o bassezze, intralasciar non voglio di raccontare eziandio com' egli solea non di rado fra quella turba vulgar mescolarsi, che trae a' montambanchi; e come, questi medesimi chiamando in sua casa, cercava alcuna volta con l' argento da essi ottenere la spiegazion de' loro specifici. Conciossiachè credea egli dalla osservazion delle cose di minor conto le prime tracce scoprire de' più maravigliosi secreti della natura: nel che veniva accordandosi col sentimento, e consiglio de' più grandi uomini, che abbiano mai fiorito in ogni maniera di scienze. Ed in fatti se il *Galilei* non avesse fermato l' occhio e la riflessione su la oscillazion di una lampade; se sulla caduta di un pome il *Newton*; se *Ruggiero Bacone* sopra un eventuale accendimento e scoppio di poca polvere di carbone, con zolfo mista e con nitro, ci sarebbe ancor forse ignoto l' isocronismo de' pendoli, il gran sistema dell' Universo, e la polver tonante, cui, per l' uso suo ferocissimo pentir dovrebbesi d' aver formato Natura. Ogni pensier del *Zeviani*, anche per le vie meno intese, e men luminose, mirava sempre all' eccellenza, ed al grande; e tuttociò che da questo segno vedea dilungarsi, ognor dispregiava, e fuggiva. Ove non ispargea semi la virtù e la sapienza, ivi nè pur egli s' interteneva; e per questo indarno la persona di lui si cercava alla scuola della licenza infra le rappresenta-

zioni sceniche e spettacolose; indarno ai crocchj degli sfaccendati, laddove noja, depravazion, miscredenza fra l'Indiche tazze e bevande nuovi alunni crescono, ed avvalorano ognora; indarno a certe clamorose raunanze, raccolte, non a nutricamento di amicizia, o di non disutili ragionamenti e sollazzi, ma bene spesso a sola costumanza di moda, ed a magnificenza di gale. Per lo contrario agevole cosa ti sarebbe stato lo avvenirti in lui per le strade meno frequenti, e fra le men numerose brigate, e più colte. Tra queste, se la persona alta e scarna, se le fattezze nè gentili, nè grossolane, se l'aria del suo viso ilare, ed espressiva tu ne avessi ignorata, altro non ne avevi a fare per raffigurarlo, se non che dal labbro di chi elle pendessero solo un poco osservare. Le sue vestimenta, quanto semplici e schiette, s'allontanavano altrettanto da quella mentita vanità, cui dal fesso del mantello d'*Antistene* pur seppe un dì ravvisare l'acutissimo sguardo di *Socrate*. Nel portamento e negli atti avvilimento non mostrava mai, nè abbiezione; ma la burbanza nè anco vi compariva di que' nuovi Parrasj, che nè pur sospicando avervi un *Zeusi*, e un *Timante*, con l'alterezza dell'aspetto, e colla posatezza del passo esigono, e promettono quel molto, che loro manca per esser grandi; grandi solo nel fatto di spregiare, d'insolentire, di soverchiare. Naturali e trascurate avea le maniere; scortesi non mai. Ed il parlar suo, pieno sovente di una arguta festività, era senza stucchevolezza una continua scuola di chi l'udiva: e tale dovea riuscir senza dubbio, tuttodì non ad altro mai inteso, che a transricchir di dottrine, e ad estendere sempre più i confini del suo sapere. Per esso quanto nelle più difficili cose a penetrare ei valesse, diello a diveder chiaramente in molte sue Dissertazioni, e Trattati; ma con nessuno a diveder lo diè meglio, quanto con quello sulla *Rachitide*, cui se il chiamar soprannaturale si opponga alla condizione dell'umano intelletto, al sentimento non già si oppone de' più illuminati maestri di medicina, i quali la malagevolezza di discoprir la vera radi-

ce

ce di cotal malattia teneano affatto per invincibile. E vaglia il vero: se questo ingegno sommo e sovrano non compariva in mezzo di noi, dopo i vani ricercamenti del *Glissonio*, del *Boozio*, del *Majou*, del *Valdschmidio*, del *Doleo*, del *Sidenamio*, del *Benevoli*, e di più altri valorosissimi uomini, la medica repubblica pur ancor sentirebbe con avvilimento, e confusione indicevole risonarsi all'orecchio, che lo spiegar la cagione di questo male è da mente altro che umana; siccome ebbe un giorno a gridar altamente il *Boeravio* (1), scontento del suo sistema, non altrimenti, che ogni altro scrittore di così fatta materia. Ma non sì tosto si accinge *Verardo* al difficile intraprendimento di scoprirne l'anzidetta cagione, che un'insolita agrezza, proceduta agli umori dalla corruzione del latte per la verace ed unica ei ne disvela. Qui per altro le scoperte non finiscono di *Verardo*. Si fa egli ad esaminare da che derivino le innumerevoli moríe de' bambini, e con ribrezzo rinviene come il portar i nati alla chiesa per lo Battesimo nella stagione del verno accresca poco meno del doppio il novero de' frutti ricisi in erba da morte, messo a paraggio con quello, di cui ella in altri tempi dell'anno pur fa sua preda. Prima che ciò scrivesse il *Zeviani*, teneansi dal *Boeravio* per le più micidiali cagioni il latte troppo crasso, vischioso, semi-putrido, sieroso o di soverchio dato, il meconio non ben discevrato, i vermini intestinali, lo spuntare dei denti, e la pingue muccosità, che lo interno rimpalma dello stomaco e della bocca. Dall'*Hallero* poi, e da molti altri si riputavano primarie cagioni di tanta desolazione parecchi sconci, negligenze, e malori, cui l'annoverare qui tutti troppo lungo e forse anche inutil sarebbe. Ma dopo le diligenti e faticose osservazioni del nostro autore si conobbe quanto queste cagioni fossero di meno maggior rilevanza di quel-

(1) *Quid proprie hoc sit, quod in corpore facit Rachitidem, nemo explicare potest etc. Prax. Med. sive Comm. in aph. Boer.* par. 5, p. 374. Così citato dal *Zeviani* T. Rach. p. 55.

lo che si credeva; e s'imparò vie meglio a riparare alla perdita di tante vite, che formano la più cara speranza delle famiglie, e delle nazioni. E giacchè de' ritrovamenti del *Zeviani* io fo qui parola, dove mai lascio quel morbo, che rettamente insegnò egli alla Pleuritide susseguire? I più valenti scrittori, che sulle successioni delle malattie lunghi trattati hanno steso, null'altro fanno alla pleuritide venir dietro, se non che peripneumoníe, tisichezze, ed empiemi. Ma *Verardo*, datosi su di ciò a più mature considerazioni e più esatte, giunse da quel fine conoscitore ch'egli era a scoprire, che un'appendice della pleuritide non più avvertita da nessun altro s'appiattava per entro i muscoli del costato, e nella pleura. Conosciuta perfettamente ch'ei l'ebbe, manifestolla tantosto al pubblico, lavorandone un particolare Trattato, e per distinguerla dagli altri morbi controssegnolla col nome di Parapleuritide, che è quanto dire, come egli stesso ne scrive (1) *una Pleuritide resasi cronica e di minor intensione*, ovvero *un morbo che sta presso e vicino alla pleuritide*, o finalmente *un morbo che vien dietro e succede alla pleuritide*. Questo sì fatto malore suol mostrar falsamente all'aspetto una somiglianza con altri mali, co'quali non ha egli parentela, o comunanza di sorte alcuna. Dalla qual cosa potendo restar parecchi ingannati, gl'indizj più sicuri di lui mette in mostra, e quindi il polso duro e ristretto, il dolore di costa, la febbre dopo il pranzo aumentata e senza sudor declinante, lo stentato parlare, il decubito impedito nel lato offeso dal dolore, e finalmente il sangue tratto dalle vene duro e resistente al taglio e per lo più coperto di una crosta gelatinosa, per li sintomi più ordinarj, nè da nessun altro giammai conosciuti con osservazione accurata ne determina e stabilisce. Ma se di quest'uomo, grande cotanto, e avveduto, nulla più si sapesse che queste e molt'altre maravigliose sco-

---

(1) Parapleur. cap. 2, pag. 16.

perte, o schiarimenti; se nulla più che l'estesa cognizion ch'egli avea della storia naturale, e della sacra, e profana, non che della poesìa, come ne fa certa fede alcun suo poetico componimento, se nulla più che lo studio e la perfetta conoscenza di quattro idiomi stranieri (1), oltra il Latino ed il Greco, e il vivo amor, ch'egli avea innanzi ogni altro, del proprio suo nazionale, amore manifestato co' suoi scritti, in esso pressochè tutti con proprietà ed evidenza dettati, e che a dì nostri ha mestieri d'essere in non pochi Italiani petti riacceso; se nulla più, dissi, si sapesse che questo, e quanto egli ha conosciuto, e parlato, e insegnato, e scritto, molto più si saprebbe di quello ch'abbia cercato il *Zeviani* che si sapesse. Pur ad onta di tanto non poco ancora ne resta di ciò, che vuol far saper quella gloria la quale portando il nome di lui fuor delle patrie contrade gli procacciò rinomanza ed onori non ordinarj e comuni. Al che parendomi oramai tempo di rivolger lo stile, io non avrò a far altro che darmi a tesser la storia dell'onorevole ingrandimento e celebrità ch'egli ottenne per eccitare nell'animo di chiunque lo stupore, e la maraviglia.

La gloria, ristoratrice d'ogni onorata fatica, che tanti animi rinvigorisce, assottiglia cotanti ingegni, che disasprisce ogni arduità, e trionfa insino di morte, la gloria, io dissi, rinnovar volle inverso di lui i suoi largheggiamenti più solenni, e più rari. Solo un suo accarezzamento, agli affezionati suoi conceduto, tien essa il più delle volte per grande compenso; ma del *Zeviani* trattandosi, tenne, direi quasi, per lieve dono il farlo participare d'ogni sua grazia migliore. Prima che un raggio favorevole della sua luce balenar faccia a coloro, che avidamente ne la rintracciano infra gli studj di Palla, o in mezzo ai campi di Marte, lunghissime e dure prove ella esige, e talor anche ne aspetta lo incanutir della chio-

---

(1) La Franzese, la Spagnuola, la Tedesca, l'Inglese.

ma; pur del *Zeviani* non ne sentì appena il nome, che tutta invaghissi di lui, e il mento, lanuginoso ancora, a vezzeggiarne si diede. E se licito mi fosse i colori della dipintrice fantasia assecondare, pur anche direi, che sollecita dello ingrandimento di lui, non aspettò valore di curagioni, o di penna per divulgarnelo, e che dalla maniera e qualità de' suoi studj, e dal profitto istraordinario procacciatosi per la pratica sotto la direzione del *Gaspari*, potè diritamente argomentare anzi tempo, che bastava solo, ch'ei si mettesse a qualche intrapresa, perchè felicemente vi riuscisse: conciossiachè videsi il nome di *Verardo* volare di assai pochi lustri famoso fuori del natìo cielo. Padova tra le città vicine prima di ogni altra il grido ne sentì della sua virtù, e della grandissima espettazione, ch'egli avea di sè messa. Il perchè sentitosi ridestar dentro al seno più vivamente la dilettanza di averlo avuto suo allievo, tornò ad invidiare più forte un sì ricco possedimento a Verona. Studiò quindi modo a privarnela onde appropriare sì gran tesoro a sè stessa. Al qual fine, usate quante mai pratiche sapesse migliori, tentò persuaderlo, tuttochè di soli anni venzette e' si fosse, ad esser uno del bel numero di que' Professori, che la chiarezza e maggioranza dell'antica sua Università sostenevano, e rabbellivano. Con questi teneva egli mai sempre amichevole ed erudito carteggio; il quale per altro era più famigliare e frequente con chi primeggiava a quel tempo infra loro, dico *Giovambatista Morgagni*. Questo principe degli anatomici de' suoi giorni ebbe sì a capitale il *Zeviani*, e le produzioni di lui, che richiesto a permettergli d'intitolare ad esso il suo libro *Del Flato*, non solamente vi acconsentì di buon grado senza riguardo alle negative, più volte fatte a parecchi valentuomini, amici suoi; ma con sua lettera (1), rimastane ancora, manifestò inoltre che questo recato sarebbesi a suo

---

(1) Questa lettera, che con altri manoscritti del *Zeviani* comunicò gentilmente il Sig. Dott. *Giacomo Guarienti*, è la seguente:

altissimo pregio. Dopo quest' atto sì luminoso altro non farebbe luogo, a mio credere, per assicurar chicchessia del favorevol giudizio di quel personaggio, tanto segnalatissimo, intorno a questa eccellente scrittura; ma v' ha ancor più d'assai. Imperciocchè letta ch' ei l' ebbe, non potè ritenersi dal confessare pubblicamente (1), che, quanto in somigliante lavoro sfuggì alla sua mente, tutto avea raccolto, e considerato pienamente il *Zeviani*; e che nel Trattato di questo tutto quel ritrovarsi, che nel suo proprio restavasi ancora a desiderare. Se al solo *Morgagni* ristretto si fosse il numero degli ammiratori di *Verardo*, sarebbe stato a lui certo bastevole per vincere l' obblivione, essendo quel valentuomo uno di que' pochi, cui soltanto, giusta lo insegnamento di *Tullio* e di *Flacco*, cercar dee d' ottenere a suoi giudici, e leggitori approvanti chiunque a vivere dopo il sepolcro abbia il suo pensiero rivolto. Ma passa ben poco tempo, che l' estimazion del *Morgagni* non è più il primo vanto del nostro encomiato, e che alla fama di lui Padova diviene troppo angusto confine. Per conoscere quanto questo sia vero, girisi primamente lo sguardo al sollecito divulgamento di sue produzioni, ed

---

Illmo Sig. Sig. Pad. Colmo

Riconosco unicamente dalla singolar di lei cortesia il pensiere di onorarmi, indirizzando a mio nome la nuova sua opera del Flato a favore degl' Ippocondriaci, e che però sin da ora incomincio a ringraziarnela come pure fo della ricerca del mio consentimento. Questo come potrei io negare a lei, che tanto giustamente ed amo e stimo? È bensì vero che essendomi io sottratto dall'accordarlo ad altri, così che tutte le dedicatorie ch' è paruto alla bontà degli amici, e tra questi dei Signori Heistero, ed Haller di farmi, le ho prima vedute e sapute, convien la preghi di non significare a veruno di avermi alla prima scritto, ma di lasciar credere, che come hanno fatto gli altri miei amici, così pur ella abbia fatto. In questa maniera non potrà alcuno di me dolersi, ed io sarò tanto più colmo di obbligazioni verso di lei che divotamente riverisco nell' atto di rassegnarmi

Di V. S. Illma

Padova 21 *Agosto* 1755.

Divotmo ed obbligmo Servitore
Giambatista Morgagni.

(1) *Sed de hoc, et de universo curationis genere in tympanite, et de una ab altera specie per conjecturas, quo ad ejus licet internoscenda et de morbi hujus natura et causis fac legas, quæ erudite, ingeniose, periteque scripsit Clarissimus Zevianus, qui si ut pro suo erga me singulari amore scripta illa in meo quale idcumque est nomine apparere voluit, sic antequam hanc ad te epistolam darem, mittere potuisset, nonnulla quæ me fugerunt in hac minime desiderares. Apud illum igitur reperies*. Morg. Ep. 38, §. 25.

all' universale apprezzamento, ch' esse acquistarono. Nessuna di loro comparve alla pubblica luce, che scorso non abbia subitamente l' Italia tutta, o, dirò meglio, l' Europa; di qua ottenendo l' approvazion dei *Borsieri*, dei *Rubini*, dei *Pasta*, degli *Scardoni*, degli *Azzoguidi*, dei *Valcarenghi*; di là rascuotendo gli applausi dei *Bertier*, degli *Eisteri*, degli *Haller*, dei *Sauvages*, degli *Svieteni*, e d' infiniti altri rinomatissimi ingegni, senza dir de' viventi; oltre lo avere in molte parti occupato l'attenzione degli stessi Governi. La più grave d'anni fra le mancate Repubbliche vede appena venire a luce l' importante Dissertazione *Sulle Numerose Morti dei Bambini*, che tosto ne vuole alcuni esemplari per sè, onde stabilire saggi ed utili provvedimenti, che le cagioni mortifere, se non a toglier del tutto, a diminuire in gran parte almeno valessero. Questo libro pur giugne nel regno di Danimarca; ed istrutto per esso quel Principe della strage, che fa degl' infanti il portarli pur mo' nati al fonte battesimale, senza riguardo a' crudi rigori del freddo, vi provvede ben tosto, con pubblico sovrano editto facendo permettere a' padri il battezzare in ogni tempo fra le domestiche mura i loro figliuoli. L' esempio di quel Monarca, per quanto dal clima nostro comportisi, vedemmo, non ha gran tempo, rinnovato anche infra noi dal precorso Austriaco Governo, il quale con particolare Decreto (1) ordinò che dovessero i Parrochi nelle stagioni di autunno, e d' inverno dare il Battesimo nelle case dei nati, protraendo all' altre due le solite sacre cirimonie. Che poi del gran Trattato su la Rachitide? Nol vide appena la gran Bretagna, che tosto inarcò maravigliando le ciglia; e al vivo fiammeggiar di sua luce, con cui dirada le folte tenebre, in ch' era avvolta la vera cagion di quel morbo, scorse illanguidire il chiarore de' suoi più illuminati maestri. Per lo che, vedendosi pur tolta dinanzi da un giovane Italiano quel-

(1) Del giorno 21 Settembre 1803.

la palma, a cui ella credea aver più d'altri diritto (1), poichè per essa sudato aveano tanti suoi ingegni, e tante sue penne s'erano già stancate, sforzossi invano celar l'invidia, e il suo non lieve rammarico; poichè eccitato e scosso da indi a poco lo stile d'uno (2) de' suoi più illustri scrittori, bandì per tutto che la verdezza delle fecce de' bambini dalla sola bile procedere, opponendosi per questa guisa a quanto ne ave ascritto il *Zeviani* nel suo Trattato, che quell' effetto dall' acida corruzione del latte pur vuol prodotto. Sì fatto ardimento però son d'avviso che nè anco immaginato sarebbesi quello straniero, se per poco la franchezza e il valore preveduto avesse di quel chiarissimo Elvetico (3), il quale uscito a difesa del nostro *Zeviani*, ebbe a contrapporre tantosto (4) che *un Italiano di gran lunga più perspicace fa sapere che lo sterco perciò si fa verde, perchè dimorando troppo alla lunga negli intestini, acquista un' indole acida e corrosiva, per cui la stessa bile si fa vedere, come se le venisse frammisto dello spirito di nitro*. Ma se tutti annoverare io volessi i nobili avvenimenti de' suoi dettati diverrei ben più lungo di quello, che ad una breve laudazion si convenga, siccome questa esser dee; nella quale quanto vien detto, vuolsi tutto da chi legge tenuto soltanto per indicazion di quel molto, che annobilisce il *Zeviani*; non altramente che da una verde canna ondeggiante, e da un picciolo ramoscello coronato di freschissime coccole trasse argomento *Colombo* di quel vasto e ricco paese, ch' egli moveva a scoprire. Taccio per questo i molti errori, ch' egli saviamente emendò, le notizie, e gli schiarimenti da esso lui virtuosamente arrecati: taccio le auree medaglie, con cui si premiarono le sue risposte a

---

(1) Oltre i moltissimi scrittori di questa Nazione, che versarono su cotal morbo, scrive il *Zeviani* medesimo, che verso il 1650 *otto diligenti Medici del Collegio di Londra solevano privatamente adunarsi, e scambievolmente in iscritto comunicarsi i loro studj, e le loro osservazioni*. Rach. cap. 2, pag. 15.

(2) Vedi nell' Esper. Med. di *Giangiorgio Zimmermann*.

(3) *Giangiorgio Zimmermann*.

(4) Esperienz. Med.

difficili *Programmi* (1) scientifici; taccio i poetici componimenti pubblicati in onore di alcun suo scritto, e di alcun altro le replicate edizioni: taccio infine le onorifiche testimonianze di que' sapienti, che vanno per la maggiore registrate intorno alle dottrine di lui. E in luogo di queste testimonianze io mi appello al giudizio, che ne diedero i più nobili letterarj Instituti nello aggregare il *Zeviani*, con ciò avendo cercato a gara procacciar da' suoi scritti onore a sè stessi, facendoli per questo mezzo in qualche parte di lor ragion divenire. In così fatto gareggiamento per altro nessun luogo valse a prevenire e vantaggiar la nostra città, la quale prima di tutti lo aggregò alla famiglia degli Aletofili, e sino dai diciannove Maggio dell' anno 1769 ne registrò il suo nome fra 'l senno di quelli, che l' Accademia d' Agricoltura, Commercio, ed Arti compongono. Il *Lorgna* nell' istituire la sua *Società Italiana* propostosi di formarla de' quaranta più addottrinati personaggi del bel paese, dove il sì suona, credette di affatto dilungarsi dal conceputo suo obbietto, se uno de' primarj posti al nome del *Zeviani* non avesse assegnâto. E la Regia Accademia di Storia in Madrid (2) non si tenne per abbastanza ragguardevole e chiara, s' ella pur messo a parte del Corpo suo non avesse quest' uomo. Con esso lei concordano la Medica Società di Venezia, l'Accademia riapertasi di Toscana (3), e la Reale di Mantova (4), di quella Mantova, che per alto savere, e per l' opera di *Verardo* mostra ancor le

(1) Rispose anche ad un Programma dell' Accademia di Vicenza, ed avendo posto nel suo scritto in vece del suo nome l'Anagramma *Vidio Verzanera* fu cagione, ch'egli perdesse il premio di venti zecchini. Perciocchè dopo lunghe e vane ricerche di quell'Accademia per rintracciare un tal nome venuta finalmente in deliberazione di ricorrere perciò al *Zeviani*, siccome quello che de' più dotti uomini avea conoscenza, rispose esser egli quel desso in tempo che l' Accademia cessò.

(2) Questa Accademia lo aggregò il dì 29 Giugno 1775.

(3) Da questa venne ricercato il suo nome, mentre il *Zeviani* era già ottuagenario, e perciò fece sì che nol si scrivesse in fra quei Sozj, offerendo però ad essa tutto il servigio suo.

(4) Da questa venne aggregato il dì 20 Dicembre 1769.

le sue vie popolose, e conservati ancora e fiorenti molti suoi cospicui Casati. Una micidiale *Migliaria* la dominava per tutto, e recava per le sue ampie contrade lo squallore, la desolazione, la morte. Ogni mezzo praticato per liberarsene era tornato già vano, e le osservazioni e le cure de' migliori suoi medicanti valute non erano ad impedirne giammai i suoi solleciti procedimenti. Vien ella perciò in deliberazione di ricorrere altrove; e passata sott'occhio tutta la medica repubblica di quel tempo, in nessun altro meglio ferma le sue speranze, in nessuno più s'assicura, che nel *Zeviani*. Esso non è sì tosto richiesto, che di presente a lei vola per confortarnela. Esamina attentamente quel morbo, nè v'ha sintomo dubbio e fallace, ch'ei non distingua; non insidia ch'ei non prevegga; non complicazione di cause, ch'ei non discopra: rileva tutto a uno sguardo; e con medicatura, opposta a quella infino allor praticata, fu una medesima cosa il minacciarlo e il distruggerlo. Per tal fatto e' si rendette simigliante al suo *Ippocrate*, chiamato a liberare la regione Illirica da un male pestilenzioso, il quale non sì tosto v'accorse, che il vide già mirabilmente all'uso de' suoi rimedj cedere e scomparire. A questa guarigion portentosa tanto al *Zeviani* felice e gloriosamente riuscita, gir veggo di pari quell'altra, che operò dappoi in un grosso nostro Villaggio (1), i cui terrazzani, presi da fiero male di petto, gravemente ammalavano, e in pochi dì si morivano miseramente. Or queste due curagioni mi richiamano alla mente quel tempo (2), in cui innalzato esso al grado di Protomedico vide tutta la Veronese provincia giacersi abbandonata allo smarrimento e al dolore, molestata da cento parti, ed afflitta da mortalissima epidemia, che faceva ne' Buoi orrenda strage, e crudele. Egli è vero però che di questa, come dell'altre, non si può dire, che cessasse tantosto, ch'egli a trattarla v'accorse: avve-

---

(1) Bovolone.
(2) Ciò fu l'anno 1796.

gnacchè il male si fosse soverchiamente inoltrato. Ma pur tutta volta, se rallentaronsi i suoi progressi, rallentolli il *Zeviani*: se rinverdirono alla Agricoltura le sue speranze, rinverdille il *Zeviani*: se il campo, che temeasi, non restasse incolto, apparve pure in quell'anno di biondeggiante messe arricchito, arricchillo il *Zeviani*: se la provincia intera alla fine fu passo passo condotta alla sicurezza, alla tranquillità, ed alla gioja, non altri fu che il *Zeviani*, che la vi scorse, e condusse. Ma poichè de' guarimenti da lui maravigliosamente operati io fo menzione, dove lascio que' molti sì varj e sì grandi, ch'egli operò solo con le scritte consultazioni, delle quali veniva da ogni banda ricerco, e per le quali, se tutte conservate le avesse, aver si potrebbe, secondo il giudizio de' più intelligenti, uno de' suoi più dotti e vantaggiosi lavori? Per non dipartirmi dalla prescrittami brevità vorrei pure di questi notare almeno i più singolari e ammirevoli, se a sufficienza e più chiaramente non ne parlassero la Germania, la Francia, la Spagna, che a lui ricorsero ne' casi più malagevoli, pur anche de' loro stessi Monarchi, non che sin là dall'America il Perù, che il risanamento del figliuolo di un suo Vicerè ebbe alla dottrina di lui con buon consiglio affidata. Tutte coteste cose ammirande eccitaron ne' dotti la brama o di averlo, altri amico, altri leggitore, e giudice dell'opere loro, o di carteggiare letterariamente con lui; in tutti poi di conoscerlo e ravvisarlo ogni volta, che favorevole occasione loro offerta si fosse. Per questo avveniva che scienziati uomini, o d'alto affare quasi mai non giugneano a Verona dalla Senna, dall' Istro, e dal Volga, che di vedere, e di usar col *Zeviani* non si fossero dato prima d'ogni altra cosa pensiere. Divenuto poi egli cagionevole della persona, dagli studj logorata, e dagli anni, chi strigner a parole mai puote le premurose e spesse ricerche, le quali da loro, che virtù e sapere estimavano, sul conto suo venian fatte? È intorno a ciò memorabile quello, che occorse non ha già molt'anni, in Pavia. Un celebratissimo

Professore di quella Università in una sua lezione pronunziando il nome di *Verardo Zeviani*, si ristette incontanente da essa, e senza dire più oltre voltosi a' suoi scolari, ne li richiese, se tra loro v'avesse alcun Veronese. A tale domanda e' non sì tosto uno vide levatosi da sedere, che interrogollo come del suo *Zeviani* l'andasse: ma dimostro quel giovane di non sapere punto di lui, nè di suo nome, più che l'amarezza del non averne notizia, il cruccio e l'indignazione di quel Professore fu grande per sì vituperosa ignoranza, onde non si trattenne dal soggiugnere essere bene vergognosissima cosa, che ad un Veronese ogni notizia mancasse del savio *Nestore* dei medici Veronesi. Il che mi fa in qualche modo ricordar di *Alcibiade*, che non potè trattenersi dal non dare uno schiaffo ad un retore, perchè sfornito era delle scritture di quel gran vate, ch'è il primo onor della Grecia. A tanta altezza di estimazione era salito il *Zeviani*. Ma ora chi voglia più oltre sapere di lui, non più aspetti parole, ma pianto. Giri la vista ai grandi per dottrina, e per arte, e dalle calde stille, che lor traboccan dagli occhi, quella contezza se n'abbia, la quale mette fine all'altre tutte, che si ponno aver di un vivente. Una malattia di vescica, che il maltrattò per undici anni continuo, e che per più di un mese il fe' trambasciare e spasimare in un letto fra gli atti della più esemplar sofferenza, il dì 7 Maggio 1808 di 83 anni, meno 22 giorni, dopo l'esercizio delle più belle virtù cristiane il diede in preda alla morte. Passò egli di questa vita, e al suo passaggio vidersi spogliate di un forte sostenitore la Medicina e le Scienze, di un ottimo ed onorevole Cittadin la mia Patria, e di un modello di specchiata interezza la Religione. Da questa non torse egli mai nè anche per poco i suoi passi; anzi ne seguitò scrupolosamente i dettami di lei per tal forma, che, grande com'era e per ingegno e per scienza, non solo somministrò esempi di rara virtù ai dotti d'ogni maniera, ma eziandio assai motivi di confusione a tutti i moderni filosofanti. Insegnò a costoro, col

santo stile del viver suo, che aver non puossi per segno di vile animo, nè di stolida pecoraggine, nessuna, comechè minuta e rigorosa, osservanza dell'evangelica legislazione, e niuna più pura e docile sommessione alle norme arcane di

Colui, lo cui saver tutto trascende

senza far mostra della più vera e vergognosa debolezza nella vantata lor fortezza di spirito, e nella lor caparbia alterezza della più manifesta empietà. Ad ogni lor maligno sistema era sì fattamente avverso il *Zeviani*, che nè pur forza di uman riguardo, per cui parecchi dal dritto sentier si dilungano, potè ritrarlo giammai dal dileggiare pubblicamente i loro vani folleggiamenti. Con che egli ammaestra ora me a pormi dopo le spalle il disprezzamento, e le beffe di quell'anime di bel genio, che questo cenno sulle cristiane virtù di lui, che pur dalla storica esattezza della sua vita richiedesi, tener potessero forse per lieve indicazione e superflua, e per intempestivo e soverchio moralizzare. Per lo che io non lascierò di riputare il maggiore degli encomj sin qui fatti di lui il poter dire, che della filosofia, ch'ei conosceva profondamente, e che ognor con guadagno mirabile coltivava, non se ne valse giammai, che come di scala al Fattore, e come mezzo efficacissimo per accrescere sempre più inverso quello sua venerazione, ed affetto. Di qua procedeano quegli umili, e fervidi atti di devozione, e d'amore sì dagli *spiriti forti* derisi, che ognindì protraeva egli a più ore nei sacri Templi dinanzi a quello, a cui

Venendo in terra a illuminar le carte,
Ch'avean molt'anni già celato il vero,
. . . . sovra ogni stato
Umiltate esaltar sempre gli piacque.

Di qua quel suo basso sentimento di sè medesimo. Di qua quella sua, veramente angelica purità di costumi, che mantenere egli seppe sin dagli anni suoi più fiorenti, ed in mezzo anche ai perigli più minaccevoli. Di qua finalmente quegli spessi, e pronti sovvenimenti ai necessitosi languenti per

infermità e per inopia da esso recati, non solo con l'arte sua, ma con la mano ad un'ora generosissima, ai quali mal sapea metter confine non la filosofica compassione, ma quella diritta sua carità, della quale bella fede ce ne rimase nel largimento di sessanta mila lire italiane col suo testamento ordinato a profitto di questo nostro Spedale. Per lo qual benefico disponimento volendo la *Congregazione di Carità* dare della gratitudine sua degna e onorevole testimonianza, fece il sepolcro di lui di scolpita inscrizione in lapida coverchiare, e sta pure tenendone in pronto un'altra da collocarsi al più presto appiè d'un busto di marmo, dettate sì questa, che quella (1) dal dottissimo Abate *Luigi Trevisani*, Prefetto vigilantissimo degli studj nel nostro Vescovil Seminario, splendor di questa mia patria, e della più purgata e nobile poesia, e delle lettere sommo ornamento, e sostegno. Nè la

---

(1) Le iscrizioni sono del tenor seguente:

SEPVLCRVM
IOANNIS . VERARDI . ZEVIANI
VERONENSIS
CONDVNTVR . ZEVIANI . OSSA . HOC . LAPIDE . OCCVPAT . OMNEM
EVROPAM . TANTI . MENS . PHYSICI . ET . MEDICI
OB . NONIS . MAI . ANNO . CHRIST . M . DCCC . VIII.
AETATIS . SVAE . LXXXII.
X. VIRI . CARITATIS . CIVICAE . M. P. C.

IOANNES . VERARDVS . ZEVIANVS
MEDICVS . ET . PHYSICVS . VERONENSIS
SCIENTIAM . NATVRAE . PRAESERTIM . HVMANAE
PRAECIPVAM . ET . CELEBERRIMAM
CVM . PIETATE . EGREGIA . COELEBS . CONIVNXIT
PROBVS . POPVLARIS . BENEFICVS
DE . PATRIA . OPTIME . MERITVS . VIVENS . ARTE . SVA
MORIENS . LEGATIS . NOSOCOMIO . PVBL. LIB. ITAL. AD . SEXAGINTA . MILLIA
CESSIT . VITA . ANNO . CHRIST. M. DCCC. VIII.
AETATIS . SVAE . LXXXII.
X. VIRI . CARITATIS . CIVICAE
IMAGINEM . TANTO . VIRO . P. C.

Congregazione di Carità fu la sola, che alla memoria del *Zeviani* abbia pubblico onor tributato; che la cura pur si vide a quest' obbietto sollecitarsi di un suo ammiratore (1), che dal cadavere suo trarre ne fece l' effigie, e l' opera di una mano gentile (2), che maestrevolmente quindi delineolla, intesi l' uno e l' altra più a rinfrescare appo quelli,

Che questo tempo chiameranno antico

la propria venerazione verso di sì grand' uomo, che la fama del nome di lui, il quale per vivere oltre il sepolcro nella memoria degli uomini, di sì fatti onori non abbisogna. Imperciochè non mancano monumenti e preclari e veridici, i quali vagliano a ricordarlo. Il ricordano molti ancor per lui sani, e lieti

Nell' aer dolce che dal Sol s' allegra.

E quando vengan meno pur essi, lo ricorderanno i volumi ed i fasti dei più rinomati letterarj Istituti, fra' quali sovrasta l' Italiana Società, a cui sacrati son questi fogli: lo ricorderanno gli scritti d' un *Borsieri*, d' un *Morgagni*, d' un *Van-Swieten*, d' un *Zimmermann*, e di altri infiniti accreditati Scrittori. Più di tutti lo ricorderanno però le medesime sue produzioni, per le quali non cesserà mai la gloria di far in lui riverire uno de' primi padri delle mediche facoltà, l' *Ippocrate* Veronese, ed uno dei miglior vanti della nazione Italiana (*).

---

(1) Il Sig. *Giacomo Guarienti* Medico Veronese.

(2) La Signora *Clarina Mosconi Mosconi*.

(*) *Il presente Elogio è stato trasmesso dall' Autore al Presidente della Società colla lettera che segue*

Eccole finalmente quel mio Elogio, o che altro si volesse chiamare, condotto al suo termine ad onta delle replicate mie infermità, e specialmente della perdita della vista. Se non è conforme al suo desiderio, di grazia ne incolpi la sua autorità, alla quale non saprei negare cosa del mondo. Questa sola potè ajutarmi nel corso, se non a vincere, almeno a scemarmi in qualche parte la molta malagevolezza, che mi si multiplicava, quanto più conosceva farmisi la materia aliena dalla instituzion mia. Quindi nel mio lavoro non apparirà il Zeviani quel gran Medico, ch' egli fu; e indarno vi si cercherebbe esso da alcuni, avendone io per questa parte sposto il suo valore, secondochè saper ne potei per qualche pochi letterarj monumenti. Perciò aperto ne resta ancora a discorrere sì largo campo, che un Elogio novello sulla grandezza della scienza medica avrebbe da potergli tessere chi per instituto, e per dottrina su questo obbietto commendar lo volesse. Così pure altro argomento e' lasciò di sè stesso nella serie maravigliosa delle sue Virtù Cristiane, da me non tocche, se non quanto servito avessero al mio proposto.

Cotanta è la materia delle sue laudi: Chi questo imprendesse a fare, onor farebbe a sè stesso, e anzichè accusare il difetto mio, verrebbe a confermare l'estension de' suoi meriti, e ad arricchire quel poco, ch' io pur volli, e seppi di lui pubblicare, per render pago ad un' ora l'altrui, e 'l mio desiderio. Di questo doveva io prevenirla, pregiatissimo Signor Cavaliere, per guarentire l' Opera mia, e per contestarle quell' osservanza, con cui, nell' atto, ch' io le auguro felicissimo il vicino 1811 con molti altri appresso, per maggior consolazione, ed onore di nostra Patria, ho il pregio di dichiararmele

Di Casa il dì 31 Dicembre 1810.

Suo Devotissimo Servitore
Antonio Guarienti.

Opere stampate di Giovan-Verardo Zeviani.

1 *Metodo circa l'uso della Purga e del Salasso*. Verona, presso Antonio Andreoni 1752.

2 *Nuovo Fonte da cavar Pronostici nelle malattie*. Verona, presso Antonio Andreoni Librajo 1754. Ivi, Moroni, 1781 in 4.

3 *Del Flato a favore degli Ippocondriaci*, Libri due. Verona, per Antonio Andreoni Librajo 1755. Ivi, Moroni 1761, in 4.

4 *Embryulcia*. Verona, Moroni 1756 e 1770, in 4.

5 *Della Cura de' Bambini attaccati dalla Rachitide*. Verona, per Marco Moroni 1761, in 4.

6 *Della Parapleuritide*. Verona, nella Stamperia di Marco Moroni 1763.

7 *Dei Morbi Purulenti del Corpo Umano*, *Trattato Medico Chirurgico*. Verona, nella Stamperia Moroni 1771, e Napoli.

8 *Su le Numerose Morti dei Bambini, Dissertazione Accademica*. Verona, nella Stamperia Moroni 1775, in 4.

9 *Della Moltiplicazione delle Legne nel Territorio Veronese*, *con l'Arte di far il Carbone, Dissertazione,* nelle Memorie dell'Acc. d'Agr. Comm. ed Arti di Verona, Vol. I, pag. 53.

10 *Il Riso, ed il Giavone, Dissertazione,* nelle Mem. dell'Acc. d'Agric. Comm. ed Arti di Ver., Vol. II, p. 153.

11 *Dissertazione sopra lo Scorbuto*. Verona, Moroni 1771, in 4, e Mantova, T. I Racc. Dissert. e Mem. della R. Acc. di Mantova, da essa premiata l'anno 1769.

12 *Nuovo Uso della Chinachina nel Vajuolo,* T. I, Memorie della Società Italiana, pag. 825.

13 *Sopra il Veleno de' Funghi*. Ivi T. III, pag. 465.

14 *Guarigione mirabile di un Tisico disperato con l'uso della Cicuta*. Ivi, Tom. IV, pag. 278.

15 *Sezione d'un Cadavero*. Ivi, Tom. V, pag. 391.

16 *Sopra un Vomito Urinoso*. Ivi, Tom. VI, pag. 93.

17 *Sopra una Tosse degli Alimenti*. Ivi, Tom. VII, pag. 124.

18 *Lettera in risposta a Leopoldo Marco Antonio Caldani* (contiene un discorso del *Zeviani* sopra un mostro umano monocefalo, bifaccia, semidoppio, nato vivo, e maturo nel distretto di Verona nel Giugno dell'anno 1789). Ivi, Tom. VIII, Par. II, pag. 521.

19 *Sopra due Idropici fortunatamente guariti per una caduta dall'alto*. Ivi Tom. IX, pag. 274.

20 *Cura felice di un Uomo morso da un Cane certamente rabbioso*. Ivi, Tom. X, Par. I, pag. 223.

21 *Sul Catarro Epidemico*. Ivi, Tom. XI, pag. 476.

22 *Sull'Epilessia, e suo Rimedio*. Ivi, Tom. XII, pag. 179.

23 *Sulla Gonorrea nel Sonno, e suo Rimedio*. Ivi, Tom. XIII, Par. II, p. 153.

24 *Se nel caso di sicurezza del Medico, che vi sia raccolta di marcie in qualche parte del corpo convenga l'uso della Chinachina, Dissertazione,* presentata l'anno 1777, e premiata dalla Reale Accademia di Mantova l'anno 1779, Racc. Diss. e Mem. dell'Acc. R. di Mant. T. IV.

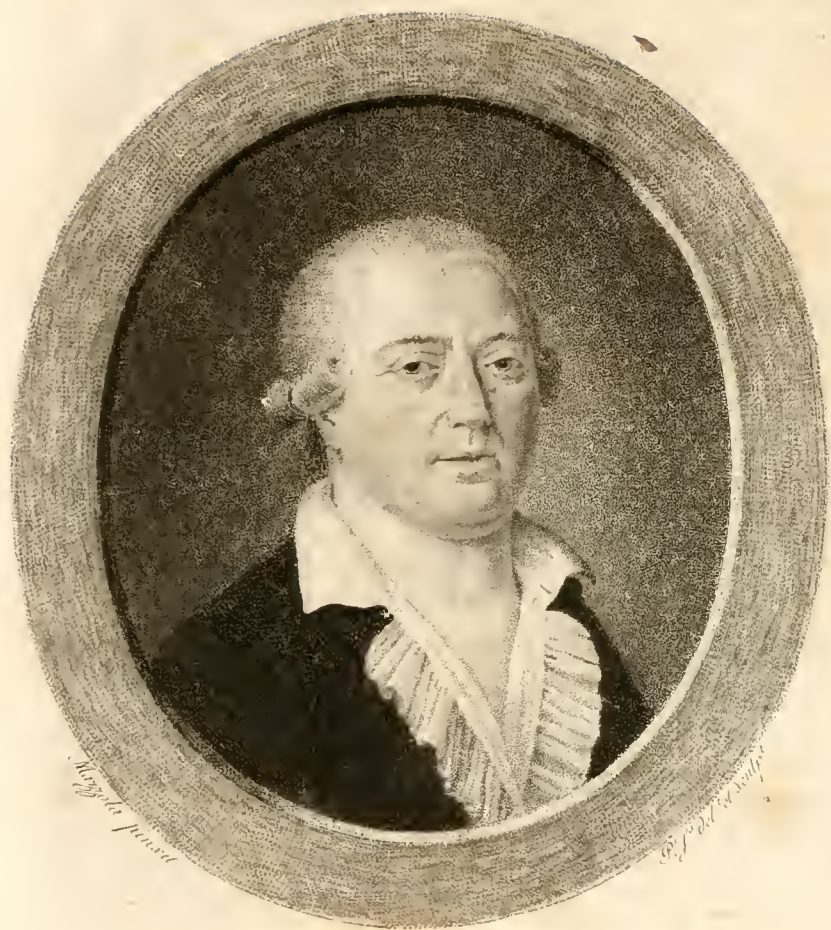
25 *Osservazioni Mediche dall'anno 1790 sino a tutto il 1807*, per commissione dell'Accad. d'Agr. Comm. ed Arti di Verona, presso il Ramanzini.

Seguono le Opere inedite.

Sulla Semiterzana, Dissertazione.

Di un Sonno Soffocante, Dissertaz.

Sul Quesito: Onde nasca che alle percosse del capo succedano male affezioni nel fegato, *Dissertazione*, recitata nell'Accademia degli Aletofili.

Due Pomi, Ragionamento, scritto in risposta ad una lettera recatagli insiememente a due pomi di diversa specie in sur un stesso ramo, che 'l richiedeva della spiegazione di così fatto fenomeno.

Vita

Carlo Lodovico Morozzo

VITA

DEL SIGNOR CARLO LUDOVICO MOROZZO

SCRITTA DAL SIG. PROSPERO BALBO.

Ricevuta li 19 Gennajo 1811.

. . . . aut virtus nomen inane est,
Aut decus et pretium recte petit experiens vir.
HOR. EPIST. I, XVII, 41.

Carlo Ludovico Morozzo nacque in Torino il cinque d'agosto dell'anno mille settecento quarantatre, di famiglia illustre per più generi di gloria, ed anche per quella purissima che deriva da' buoni studj, e dalla coltura delle lettere e delle scienze; la qual sorta di gloria, a paragone d'ogni altra domestica laude, pare che più sovente si serbi e si rinnovelli passando da' genitori a' figliuoli. Per tacer degli antichi, il Marchese *Giuseppe*, padre del nostro, riformatore della Università di Torino, fu letterato, e poeta, e scrittore d'inediti opuscoli sopra gravissimi argomenti di letteratura e di politica (1), e protettore magnanimo di uomini egregj quali furono fra gli altri *Giambatista Beccaria*, *Giacinto Cerruti*, *Angiolo Carena*. Non è dunque meraviglia se destinando il secondogenito alla carriera militare gliela facesse intraprendere a modo d'istituzione scientifica, donde ne avvenne che in età di sedici anni, con esempio troppo raro fra' primarj signori del Piemonte, il Conte *Carlo Ludovico* fu ascritto alle scuole d'artiglieria. Ciò che noi abbiamo detto di queste scuole nella vita del *D'Antoni* (2) ci dispensa dal mostrare di nuovo com'esse erano veramente un perfettissimo Liceo non

(1) V. l'indice in fine di questa vita.
(2) Acc. di Torino. Letteratura II, 1805.

pure di arti militari, ma di scienze fisiche e matematiche. Noteremo soltanto che il *Morozzo* ebbe fra' suoi maestri l'immortale *Lagrangia*, il quale allora in età giovanile insegnava la meccanica, e in quell'insegnamento gittava i primi semi delle sublimi teorie, per cui tanti anni dappoi diede alla scienza novello aspetto, e più sode fondamenta.

Dopo quattr'anni di tirocinio passò il *Morozzo* nel reggimento delle Guardie, e militovvi sino all'ottantasei: formandosi a quel tempo nuovi reggimenti provinciali egli fu scelto per uno degli uffiziali superiori in quello di Susa. Nel novantatre ebbe il comando di quello di Torino, nel novantasei fu nominato Brigadiere de' Reali eserciti, e nel novantotto Ispettor Generale di tutta l'Infanteria Provinciale. Nell' ottocento fu Membro del Consiglio supremo di Governo, e questa fu l'ultima delle cariche non senza lode da lui sostenute e in pace e in guerra.

Ma noi dobbiamo assai più trattenerci in quella parte della sua vita che riguarda le scienze da lui coltivate. Furono queste principalmente le fisiche, e più particolarmente quelle che alla chimica appartengono.

Fin dalla sua prima adolescenza, non pago d'imparar le teorie, egli erasi esercitato nelle pratiche della meccanica e dell'ottica, fabbricando insieme col *Carena*, e lenti, e specchi, e microscopj, e canocchiali, e telescopj. E come a fisico appartiensi, si avvezzò per tempo ad operare non solo col senno, ma coll'occhio e con la mano. Avanzando nella giovinezza, ogni volta che i suoi doveri militari lo chiamavano a presidio in Torino, o gli permettevano di venirvi altrimenti, in vece di passar il tempo a non far nulla, o a far peggio che nulla, egli trattenevasi il più che potea col *Beccaria*, col *Saluzzo*, col *Cigna*, col *Brezé*. Dal *Cigna* soprattutto trasse i precetti e la pratica della buona e soda fisica, e dell'arte di osservare e di sperimentare.

L'amicizia del *Saluzzo* e del *Cigna* gli aperse l'adito alla Società Reale di Torino, e il primo saggio ch'ei diede de'

suoi lavori comparve nell'ultimo volume della Società medesima, col titolo di *Esame fisico-chimico del colore de' fiori, e di alcune altre sostanze vegetabili* . Continuò poi sempre indefessamente per tutto il corso della vita le sue dotte ricerche, delle quali noi qui daremo una brevissima indicazione. Trattò in particolare di certa sostanza nera che a modo di fuligine vide egli il primo appicciarsi alla superficie inferior delle foglie allorchè in sugli alberi stanno esposte all'aria viziata delle paludi, o di quelle nostre campagne che messe a riso sono anch'esse per gran parte dell'anno altrettante paludi. Quindi passò ad esaminare con egual dottrina i colori animali. Istituì una novella analisi della rugiada e de' prodotti aeriformi che se ne possono ricavare. Discoprì l'assorbimento prodotto dal carbone ardente nell'aria atmosferica o ne' fluidi che a lei somigliano, e non pago de' primi lavori tornò di nuovo negli ultimi anni del viver suo a questo importante argomento. Esaminò altresì con molta esattezza la costituzione dell'aria che respiriamo, e gli effetti della respirazione in quell'aere che allor chiamavasi deflogisticato, e l'azione del ferro e dello zinco incandescenti sopra varie sorta di fluidi aeriformi, e i fenomeni de' fosfori Bolognesi, in que' fluidi immersi, e quelli dell'aere idrogeno conservato molti anni rinchiuso, e il miglioramento dell'aria atmosferica prodotto dalla vegetazione, e la porpora minerale che si precipita per mezzo dell'aere ricavato dallo stagno o dall'ossido dello stesso metallo.

Toccò qualche volta al *Morozzo* di combattere le recenti opinioni de' chimici Franzesi, alcune delle quali divennero poi verità dimostrate: nè di ciò dobbiam dargli colpa, che mal si conviene ad un filosofo il volgere di leggieri ad ogni aura di novella dottrina: ed anzi il volersi fedelmente attenere agli antichi sistemi, finchè non sia affatto evidente la verità de' nuovi, è argomento di sodo ingegno e di animo ben formato. Meglio è durare alcun tempo in vecchio inganno che correr rischio col soverchio affrettarsi di cadere in-

consideratamente in novello errore. E senza nulla detrarre al merito sommo del sapientissimo *Lavoisier* e de' suoi degni cooperatori, e senza voler oggimai ricondurre in campo sott' altro nome il flogisto o rinnovare la setta Staliana, quante non sono le modificazioni o le aggiunte, che ogni giorno si vanno facendo alle ultime teorie, e quante scoperte del *Priestley* o del *Kirvan* o del *Saluzzo* o del *Morozzo* non si vedono ogni giorno più confermate malgrado le contraddizioni di quelli che volevano ogni anteriore dottrina combattere ed annientare?

Trattò pure il *Morozzo* altre parti della fisica, che alquanto meno alla chimica appartengono, e scrisse sopra i curiosi fenomeni della fiala Bolognese, sopra un violento scoppio accaduto in un ripostiglio di farina, sopra la temperatura de' laghi e de' fiumi, sopra la luce fosforica di certe pietre, e sopra l'elettricità positiva o negativa delle medesime. Fu anche accurato osservatore di rare meteore e particolarmente delle aurore boreali, le quali a' suoi tempi furono tra di noi più frequenti che nol siano oggidì.

I molti suoi viaggi e militari e scientifici nelle diverse parti del Piemonte gli fecero acquistare pienissima conoscenza della nostra geografia fisica e mineralogica. E siccome della geografia astronomica era stato creatore in Piemonte il *Beccaria*, e della mineralogica il *Robilante*, così lo fu della fisica il *Morozzo* pubblicando le altezze di molti luoghi da lui misurati. Della scienza mineralogica per ciò che spetta alla litologia ei diede un saggio trattando di una pietra altrove assai rara, e qui frequente, vale a dire la variolite. Ma in altro modo egli arrecò un grandissimo vantaggio alla scienza mineralogica in generale, e a quella in particolare del Piemonte, coll'aver ottenuto dal Sovrano, che il Cavalier *Napione* già mandato in Sassonia onde perfezionarsi nell'arti metallurgiche, potesse prolungare i suoi viaggi andando in Svezia, in Inghilterra ed in Francia.

Fu pure il *Morozzo* assai dotto in zoologia. Descrisse

alcuni uccelli stranieri, che in rigido inverno pervennero fino a queste regioni; osservò la propagazione in Roma d'altri uccelli de' climi più caldi, diede notizia dello schelctro di un grosso quadrupede trovato nelle vicinanze di Roma, e di un icneumone portato d'Egitto.

Anche in alcune dell'arti che dalla fisica traggono fondamento impiegò utilmente il suo lavoro. Scrisse sulle famose cave d'allume della Tolfa, sulle nitraje di Roma, di Napoli, di Malta e di Sardigna, e si occupò con altri deputati dell'Accademia di Torino sull'arte della lana e della seta, e sopra la tintoria, e sulla illuminazione della Città.

Nè fu ignaro dell'arti belle, e ne fece prova coll'impiegare e favorire il tedesco pittore *Gothenbrunn* e più i nostri meritamente celebri *Galliari* e *Mazzuola*. In questa parte, come in altre molte, trasse profitto da' suoi viaggi in varie provincie d'Italia, fatti i primi per istruzione e diporto, l'uno nell'ottantacinque e l'altro nel novantuno, e fatto l'ultimo nell'ottocento per cagioni dipendenti dalle vicende de' tempi. Il secondo fu in compagnia della nipote Baronessa *Perrone*, bellissima e coltissima Dama, e tutti gli procurarono la soddisfazione di passar qualche tempo con un amato fratello Governatore di Civitavecchia, Vicelegato di Bologna, e Segretario della Congregazione de' Vescovi e Regolari. E nel ritorno del Morozzo dall'ultimo viaggio, cioè nell'ottocento e due, l'autore di questa sua vita ebbe il piacere di accompagnarlo per qualche tratto, onde si accrebbe l'amicizia e la stima che già da gran tempo gli professava.

Nel primo di questi viaggi si trattenne qualche mese in Bologna, e già essendo ascritto all'Accademia delle Scienze di quel nobilissimo istituto v'intervenne soventi, e vi lasciò memorie della sua dottrina. Avanti quell'epoca egli era stato uno de' membri della Società Italiana, fin dal suo nascere, onore che a buon dritto noi teniamo per distintissimo, e ch'egli divise con due altri Piemontesi il *Saluzzo*, e il *Malacarne*. E nella rinnovazione dell'Accademia di Padova a questa pure fu aggregato.

Tra' primi scrittori d'aritmetica politica in Piemonte ei dee tenere segnalato luogo, avendo messe insieme con diligenza ed esattezza molte belle osservazioni sopra la mortalità de' soldati e de' carcerati, ed avendone tratte molte utili conseguenze; il qual lavoro, intrapreso, per ciò che riguarda i soldati, nell'anno mille settecento settanta cinque, e continuato ogni anno fino al novantuno, fu singolarmente gradito dal Re *Vittorio Amedeo terzo*. E si giovò dell'opera sua in somiglianti materie e in cose d'economìa politica e di arti e mestieri il suo amico Conte *Petiti*, prima Presidente del Consiglio di Commercio, e poi Controlore generale delle Finanze.

Tutto ciò che detto abbiamo del *Morozzo* già dimostra a sufficienza quanto vantaggio e quanto splendore da lui traesse l'Accademia di Torino. Eppur molto ci resta a dire sopra questo particolare. Ammesso egli nella Società Reale quando per difetto di mezzi cominciava essa a languire, servì di ajuto potentissimo allo zelo del *Saluzzo* principal creatore di quella prima Società. E a questi due più che ad ogni altro si dee l'erezione dell'Accademia con sufficiente assegno, e con bella e comoda stanza. Profittò il *Morozzo* del facile accesso ch'egli avea presso *Vittorio Amedeo* dotto e generoso Principe, e dopo que' primi favori ne ottenne ancor altri molti, di maniera che con fondi straordinarj potè dar cominciamento alla splendida sala, alla libreria, alla specola ed al museo, anzi alle due prime di queste opere in breve tempo ebbe modo di dar intero compimento. E fu anche da lui terminata la fabbrica assai dispendiosa della soda ed elevata specola insieme colle pitture e cogli stucchi che le fanno vago adornamento, ma la guerra che sopraggiunse impedì di provvedere gli stromenti astronomici, e soltanto si poterono incominciare le osservazioni meteoriche, che d'allora in poi non furono più intermesse. Alla libreria ed al museo giovò pure in altra maniera, regolando più volte e libri e cose d'istoria naturale, e adoprandosi ad ogni potere con vivissimo

impegno per accrescere ed abbellire queste due collezioni. Sicchè possiamo dire con verità che dopo que' primi fondatori, il *Saluzzo*, il *Lagrangia*, il *Cigna*, a niuno più che al *Morozzo* sia debitrice l'Accademia delle Scienze di Torino. Nella erezione dell'ottantatre essendo Presidente il *Saluzzo* ei fu Vice Presidente. Ed allorquando nell'ottantotto il *Saluzzo* volle lasciare la presidenza, gli fu sostituito il *Morozzo* che la tenne fino all'ottocento. In tal qualità parlò sovente nelle adunanze pubbliche, fra le quali la più solenne fu quella che fu onorata dalla presenza del Re e de' reali Principi. Noi non diremo ch'ei fosse per natura o per arte elegante scrittore o parlatore eloquente, ma ben diremo che nelle importanti occasioni ei disse sempre le cose più convenienti allo scopo che l'Accademia dovea proporsi, e le disse in modo da non dar luogo a giusta censura, perchè volontieri ei prendea consiglio, e correggeva facilmente i suoi primi abbozzi. Tornato in patria nell'ottocento e due, l'Accademia, che nell'intervallo della sua assenza era stata rinovellata desiderò di vederlo rientrar nel suo seno, il che fu fatto sul principio dell'ottocento quattro. E tosto ebbe altra prova della stima e della confidenza che nell'animo de' suoi colleghi antichi e nuovi non era cessata mai, essendo stato eletto tesoriere dell'Accademia, nel qual ufficio egli diede ad un tratto ordine e forma a tutto ciò che riguarda l'economica amministrazione. Ma pochi mesi dopo, mentre la costituzione atletica del *Morozzo* prometteva molti e molti anni di vita, e il suo ardore per le scienze facea sperare da lui molti nuovi lavori, indebolitasi subitamente la sua salute, morì di apoplessìa addì 12 di luglio in età di sessantun anno presso a Torino nella terra di Colegno dov'erasi recato a villeggiare.

Negli ultimi tempi del viver suo egli era occupatissimo ad esaminar l'effetto della luce solare in sul carbone per farlo proprio ad assorbir l'ossigeno, e stava sperimentando le virtù medicali che appunto per siffatta proprietà pare che al

carbone appartengano, onde si crede ch' esser possa de' caneri e di altri tali disperati morbi efficace rimedio. Sicchè al *Morozzo* come ad altri valenti fisici accadde che quasi per farne vendetta il colse morte mentre ei cercava di prolungare od addolcire altrui la vita da terribili mali minacciata ed afflitta.

OPERE INEDITE

DEL MARCHESE GIUSEPPE MOROZZO.

Riflessioni intorno all' educazione del Principe di Piemonte dirette al Cavaliere di *Sanpeire* ajo di sua Altezza Reale.

Riflessioni intorno all' educazione delle nobili Zitelle ne' Monasteri.

Elogio storico del Marchese di *Sangermano* Cavaliere dell' Ordine della Nunziata, e Ministro di Stato per gli affari esterni.

Lettera sopra la soverchia premura della perfezione del governo.

Lettera intorno agli studi convenienti a' Ministri presso le corti straniere, e spezialmente intorno agli studi delle materie ecclesiastiche, indirizzata al Conte *Lascaris* quando fu nominato Inviato Straordinario alla Corte di Napoli.

Lettera al Conte *Lascaris* intorno alla dissertazione teologica del Padre *Capece* intitolata *De variolarum insitione*, con osservazioni intorno ad essa dissertazione.

Lettera al Padre *Agnesi* Professore di Teologìa sulla maniera conveniente a Gentiluomo di studiare la storia.

Lettera al Conte *Alfieri di Sammartino* sullo stesso argomento.

Lettera al Conte di *Priocca* sopra lo stato passato e presente della Nobiltà del Piemonte.

Ragionamento intorno alla comune opinione che siasi scemato nella Nobiltà Torinese l' ardore pel servizio militare.

Di-

Discorso intorno all' utilità del viaggiare i Ministri per le provincie dello Stato .

Riflessioni intorno alla vacanza degli impieghi .

Osservazioni intorno alla popolazione .

Osservazioni intorno alla milizia ed alle armi da fuoco .

Riflessioni intorno allo stabilimento di un' accademia legale per la gioventù .

Ragionamento intorno alla riforma degli studi .

Osservazioni intorno alla riforma degli studi .

Relazione dello stato degli studi al Magistrato della riforma .

Motivi dell' aver cercato la dismessione della carica di riformatore .

Memoria intorno a' mendicanti .

Discorso intorno ai fanciulli esposti, scritto in occasione che l' Autore fu eletto uno de' Rettori dello Spedale di San Giovanni .

Alcuni dubbi circa la pratica che si osserva comunemente in Torino nello allattare i bambini, al Dottor *Badia* Professore di Medicina pratica .

Lettera ad un amico intorno al tempo di tener a balia i fanciulli .

Pensieri sopra una storia naturale del Piemonte col piano della medesima .

Istruzione sullo studio della Storia Naturale patria .

Lettera al Padre *Beccaria* intorno al calore delle camere in tempo d' inverno .

Lettera al Professor *Bartoli* intorno alla raccolta e conservazione de' monumenti antichi effigiati o scritti .

Osservazioni intorno al libro di *Tobia* .

Lettera intorno al poetare .

Altra lettera sopra lo stesso argomento in occasione di poesia a lui trasmessa .

Poemetto sopra sè stesso .

Epistola in versi sciolti al March. di *Sangermano* sopra il viaggiare .

Lettera ad un amico indirizzandogli il poemetto sui viaggi.

Sei componimenti poetici.

Ricordi a' figliuoli sopra le memorie storiche e genealogiche della famiglia.

Notizia del proprio palazzo in Torino e degli accrescimenti ad esso fatti dopo l'anno 1748.

Memorie della vita sua.

Ricordi a' figli intorno ad alcuni monumenti della famiglia fatti e da farsi.

OPERE STAMPATE

Del Sig. Carlo Ludovico Morozzo.

Examen physico-chimique sur la couleur des fleurs et de quelques autres substances végetales. *Miscell. Taurin.* V. 11-51, 1770-73.

Sperienze sopra il precipitato porpora ottenuto dal gaz ricavato dallo stagno e dalla sua calce. *Soc. Ital.* I. 431-443 (st. 1782).

Expériences sur le pourpre minéral obtenu par le moyen du gaz tiré de l'étain et de sa chaux; traduites de l'Italien par M. *Bst*, de Dijon. *Journ. de phys.* (1785 oct.) XXVII, 241-249.

Lettre à Monsieur l'Abbé *Mongez* auteur du Journal de physique, sur les expériences de Monsieur *Achard* sur la couleur des végétaux. *Journ. de phys.* (1782 nov.) XXI, 385-389.

Expériences et observations sur l'absorption operée par le charbon ardent dans l'air atmosphérique et dans les differens gaz. *Journ. de phys.* (1783 avr.) XXII, 294-300.

Second mémoire sur l'absorption du charbon dans les differens gaz et fluides aeriformes. *Journ. de phys.* (1783 nov.) XXIII, 362-378.

Expériences sur la respiration animale dans le gaz dé-

phlogistique. *Journ. de phys.* (1784 août) xxv, 102-129.

Sur la rosée et sur les produits aériformes que l'on en obtient. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1784-85, 1.re partie impr. en 1786), 305-312.

Expériences eudiometriques sur l'air pur, vicié par la respiration animale. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1784-85, 1.re partie impr. en 1786) 313-320.

Sur une aurore boréale extraordinaire, observée à Turin le 29 février 1780. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1784-85, 2.e partie impr. en 1786) II. 328-338. Lu le 3 mars 1780. *Questo scritto contiene due lettere dell'Autore al Padre Beccaria in data di Pinerolo* 18 Giugno e 11 Agosto 1780.

Sopra alcuni fenomeni de' fosfori Bolognesi ne' differenti fluidi aeriformi. *Soc. Ital.* III, 420-438 (st. nel. 1786).

Sur la couleur noire des feuilles exposées à l'air inflammable des marais. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1786-87, impr. en 1788) III, 1-6. Lu le 8 janvier 1786.

Examen physico-chimique des couleurs animales. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1786-87, impr. en 1788) III, 275-302. Lu le 4 février 1786.

Expériences sur la fiole de Bologne. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1786-87 impr. en 1788) III, 449-464. Lu le 5 mai 1786.

Rélation d'une violente détonation arrivée à Turin, le 14 décembre 1805, dan un magasin de farine, suivie d'une note sur les inflammations spontanées. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1786-87 impr. en 1788) III, 478-488. Lu le 19 février 1786.

Discours adressé au Roi dans la séance publique du 28 juin 1789. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1788-89 impr. en 1790) IV, xx-xxvi.

Sur la mesure des principaux points des états du Roi, et de leur véritable élevation au dessus du niveau de la mer. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1788-89 impr. en 90) IV, 1-17. Lu le 15 juin 1788.

Description d'un cygne sauvage, pris en Piémont le 29

décembre 1788, suivie d'une notice de quelques autres oiseaux étrangers qui ont paru dans l'hiver de 1788-89. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1788-89 impr. en 1790) IV, 99-107. Lu le 8 février 1789.

Sur la temperature de l'eau de quelques lacs et de quelques rivieres à differentes profondeurs. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1788-89 impr. en 1790) IV, 309-317. Lu à l'assemblée publique du 30 novembre 1789.

Vegetabilia ad aerem vitiatum repurgandum quid et quomodo valeant. *Bonon. Instit.* VII, 215-222 (impr. 1791). Questa dissertazione fu letta dall'Autore all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna nel 1785, come risulta da' commentarj del citato volume pag. 34.

Sur la variolite du Piémont. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1790-91 impr. en 1793) V, 165-172. Le le 17 novembre 1791.

De l'action du fer et du zinc incandescens sur l'air et les autres fluides aeriformes. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1790-91 impr. en 1793) V, 199-208. Lu le 4 mars 1792.

Observations sur la constitution de l'air atmospherique extrait. *Journ. de phys.* (fructidor VI) XLVII, 203-205.

De la lumiere phosphorique que quelques pierres donnent en les frottant avec une plume ou avec une épingle de laiton, et particulierement sur la phosphorescence de la trémolite, et de la cyante, suivie de quelques observations sur l'électricité positive ou négative de differentes pierres. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1792-1800 impr. en 1801) VI, 140-149. Approuvé le 20 mai 1798.

Examen d'un gaz hydrogene qui a été conservé deux années dans un flacon. *Ac. roy. des Sc. de Turin* (1792-1800 impr. en 1801) VI, 150-154. Approuvé le 20 mai 1798.

Lettre au C. *Lacépede*. Histoire d'un perroquet né à Rome, suivie de quelques observations sur la durée de la vie des oiseaux. *Journ. de phys.* (vent. X, 1802) LIV, 180-193.

Notice sur un squelette d'un gros animal trouvé aux

environs de Rome. *Journ. de phys.* (prair. X, 1802) LIV, 441-442.

Lettre au C. *Lacépede* sur un ichneumon apporté d'Egypte. *Journ. de phys.* (messid. X, 1802) LV, 5-9.

Rélation de deux fétus produits par les mêmes perroquets qui dans l'année 1801 ont donné un petit, à Rome. *Journ. de phys.* (flor. XI, 1803) LVI, 347-350. Turin le 5 vendemiaire an II.

Suite des expériences sur l'absorption du charbon. *Jour. de phys.* (frim. XII, 1803) LVII, 465-471.

Sopra i denti fossili di un elefante trovato nelle vicinanze di Roma. Memoria ricevuta il dì 19 Agosto 1802. *Soc. Ital.* 1803 X, 162-171. Vi è inserita l'Analisi chimica del dente fossile fatta dal Dottor *Morichini*.

Lettre sur les jumars, à Monsieur *Charles Bonnet*, 11 janvier 1806. Inserita nella Memoria sulla pretesa esistenza di alcuni quadrupedi detti *Giumerri* o *Giumarri*; di *Leopoldo Marcantonio Caldani*. *Soc. Ital.* 1803 X, 203.

Notizie sulle Nitraje di Roma, di Napoli, di Malta, e di Sardigna. Torino 16 Novembre 1802. *Bonvicino Chimica* st. nell'anno XII, 214-217.

Nouvelles expériences sur l'absorption du charbon, faites au moyen d'une nouvelle machine. *Journ. de phys.* (flor. XII) LVIII, 374-390.

Sopra il gaz molto ossigenato che si ottiene dal carbone messo nell'acqua esposta ai raggi del sole, con alcune altre sperienze. Memoria di *Carlo Lodovico Morozzo*, ricevuta il dì 10 del 1804. *Soc. Ital.* 1804, XI, 331-336.

INDICE

DELLE COSE CONTENUTE IN QUESTA PRIMA PARTE.

MEMORIE
DI
MATEMATICA

INDAGINI PER SOTTOMETTERE A CALCOLO IL BAROMETRO NELLE DIVERSE SUE FORME, NELLE SUE DIPENDENZE, NE' SUOI USI

MEMORIA I

Del Sig. D. Pietro Cossali C. R.

Ricevuta li 25 *Agosto* 1809.

Il Barometro, del quale non si può contrastare a *Torricelli* l'invenzione, è una delle glorie certe dell'Italia, e tanto luminosa, ed insigne, che sola basterebbele per attribuirsi a ragione il primo vanto nella generazione della vera Fisica. Il Barometro è stato il raggio, che ha svegliato le menti a riconoscere quale chimera vóta di senno, e di senso l'orrore della natura per il vóto, a rigettare dietro ad essa le oscurità delle occulte virtù, a scuotere il giogo dell'autorità di *Aristotele*, e de' suoi interpreti, ed a voler camminare su i passi sicuri e splendenti della Esperienza, e della Geometrìa. Di molti secoli preceduta era all'invenzione del Barometro, quella della Tromba Aspirante. L'ascendimento dell'acqua in essa era un fatto, col quale la natura parlava abbastanza chiaro della gravità, e pressione dell'aria. Invece però d'in-

tendere il meccanico operare della natura, o confessare di non intenderlo, si escogitò in lei un morale sentimento, un orrore per il vóto. Reclamò essa medesima contro questo attributo, dimostrando, che l'acqua non saliva nella tromba, che a certa altezza, qual è quella di 32 piedi di Parigi, e che alzato più oltre l'embolo, lo spazio sopra i 32 piedi restava vóto. Ecco in solenne maniera smentito il sognato orrore; ecco i Filosofi costretti a riconoscere la vera causa del fenomeno, o a dichiarare d'ignorarla. Nulla meno. Non si fa che temperare, limitare l'orrore alla natura apposto; si vuole a forza che lo abbia, ma solo sino a certo segno, sino all' altezza di 32 piedi. Qual cosa più assurda che questa distinzione, che questo limite privilegiato? Sarebbe certamente incredibile, che un ingegno sì sagace, sì fino, quale quello di un *Galileo*, abbia potuto lasciarsi acciecare da tali inetti sutterfugi dell'ignoranza, se troppo evidentemente non constasse da'scritti suoi. Non vi ha prova più grande di questa della potenza dei pregiudizj. *Galileo* valse a vincere la forza di molti, ma non a liberarsi da tutti; o forse non volle su quelli articoli, intorno a'quali giunto non era a discoprire le vere cagioni, partire dal comune linguaggio. Che che ne sia, il suo discepolo *Torricelli*, sostituendo all'acqua il mercurio, e facendo vedere, che non si alzava che a pollici 28 entro una canna di vetro, della quale lunga parte superiormente rimaneva vóta, spogliò l'altezza di 32 piedi della concedutale prerogativa di misurare all'uman occhio l'estensione dell'orrore della natura per il vóto, pose fine ai cavilli, cangiò in risa degli uomini quel chimerico orrore della natura, diede l'urto a tutto il tenebroso edificio della fisica peripatetica, ed aprì un nuovo orizzonte di cognizioni, scoprendo la gravità e la elasticità dell'aria. Non andò guari, che guardando con meraviglia il barometro qual delatore del peso, e della pressione della impalpabile, ed invisibil aria, si avvertì, che costante non era, ma varia, l'altezza, a cui il mercurio tenevasi sospeso; onde si dedusse che la pressione dell'aria va-

riava. Continuando le osservazioni, si comprese che le variazioni dell'altezza del mercurio nel tubo avevano una relazione con le variazioni dello stato dell'atmosfera, con i cangiamenti dal sereno al nuvolo, alla pioggia, o reciprocamente. Laonde si stimò di potere riguardarlo come un nunzio delle mutazioni del tempo. Si riflettè di più in seguito, che l'altezza del mercurio doveva farsi minore portato il Barometro sul monte, e corrispondendo l'evento, se ne inferì di poter anche adoperarlo qual misura dell'altezza delle montagne. Pronostici del buono, e cattivo tempo, rilievi dell'elevazioni de' luoghi erano utilità grandemente interessanti. Si accesero i Fisici, e quinci lo studio per rendere più perfetta la costruzione del Barometro, più comoda ed atta al trasporto la forma, paragonabili le osservazioni, più esatti gli usi; e lo studio si affinò, poichè gli Astronomi si avvisarono dell'utilità del Barometro nel computo della Rifrazione Astronomica. Con questi sforzi uniti di molti ingegni, industri in esperimentare, sottili in dedurre, emendati si sono molti difetti, accresciuti i lumi, tolti alcuni inganni, e se non si è giunto ad ottenere in tutti i punti la desiderata certezza, e precisione, si sono senza dubbio fatti onorevoli e vantaggiosi progressi. Io sarò contento se con le mie indagini riuscirò ad aggiunger loro qualche lume ed estensione.

ARTICOLO I

Calcolo Generale dei movimenti del Barometro dipendenti sì da variata pressione atmosferica, e sì da variato calore, e giusta le diverse sue forme diversi.

Il calore dell'atmosfera si comunica a tutti i corpi; tutti per un accrescimento di calore si dilatano, altri più, altri meno, altri con maggiore, altri con minore prestezza; e tutti con le stesse differenze si condensano per un diminuimento di calore. Il mercurio, che con molta prestezza sente il

variare del calore nel termometro, non può non essere ugualmente sensibile nel barometro. Osservisi, che il barometro cangerebbesi in semplice termometro a mercurio, otturata perfettamente alla cima la vaschetta, o l'ampolla dopo averla riempita di mercurio sì esattamente, che tra la superficie del mercurio, ed il turacciolo non rimanesse un menomo velo, un menomo atomo d'aria. Chiuso così il mercurio entro il vetro, garantito dal sentire la pressione atmosferica, e d'esser mosso dal variare di essa, non sentirebbe, che il variar del calore nell'aria d'intorno valevole a penetrare il vetro stesso, ed i suoi movimenti non sarebbero più di barometro, ma di termometro. Dunque essendo la cima della vaschetta, o dell'ampolla aperta, quello, che dicesi barometro, è insieme barometro, e termometro, od a meglio dire, non è nè l'uno, nè l'altro, ma una macchina composta, sensibile ad un tempo al variare del peso, ed al variare del calore dell'atmosfera, e che appunto per la complicazione non ci addita la misura nè delle une, nè delle altre variazioni, se non viene in ajuto l'arte a scomporre il concorso delle cause, e separare dal composto movimento la parte dovuta alla variazione del calore per riconoscere libera da essa la parte dipendente dalla diversa pressione atmosferica. Questo scomponimento è stato il soggetto degli studj di molti Fisici. Ciononostante mi lusingo, che non sia per essere del tutto inutile il mio, dando le formule generali dei movimenti del barometro.

1.° Per variazione di pressione atmosferica.

2.° Per variazione di calore.

Per la costruzione precisa, e limpida di tali formole è d'uopo rendersi in animo esatte, e lucidissime alcune idee, al che serviranno le seguenti definizioni, ed i seguenti teoremi.

DEFINIZIONE 1.ª Altezza assoluta della superiore superficie del mercurio nel barometro è la sua perpendicolare distanza dal punto infimo del barometro.

Definizione 2.ª Altezza relativa della superiore superficie del mercurio nel barometro è la perpendicolare distanza del piano suo dal piano della superficie del mercurio inferiore; e la variazione di tal distanza è la variazione dell'altezza relativa.

Definizione 3.ª La colonna barometrica è quella colonna mercuriale, la cui pressione si equilibra con la pressione della colonna atmosferica. La sua altezza è l'altezza relativa della superiore superficie del mercurio. E la variazione di tal altezza è la variazione della vera colonna barometrica.

Teorema 1.° Variando la pressione atmosferica, varia la quantità, rimanendo la stessa la densità del mercurio della colonna barometrica; all'incontro variando il calore varia la densità rimanendo la medesima quantità.

È evidente la prima parte; e rispetto alla seconda riflettasi, che supponendosi il tubo di perfetto calibro, o sia di vano esattamente uguale nella sua lunghezza, al diminuire o crescere della densità, e della gravità specifica del mercurio deve sempre proporzionarsi l'allungamento, o l'accorciamento della colonna barometrica; onde compensando la variazione della lunghezza la variazione della gravità specifica, la stessa quantità di mercurio varrà a costituirla tale, che ritenga l'equilibrio con la pressione atmosferica supposta rimanere invariata.

Teorema 2.° Movendosi una delle superficie del mercurio, sia che il moto venga da variare di pressione atmosferica, sia che venga da variazione di calore, si muove anche l'altra; ma nel primo caso i movimenti delle due superficie si fanno in direzione contraria, nel secondo caso nella stessa direzione.

Crescendo la pressione atmosferica, si abbassa la superficie del mercurio inferiore, e si alza la superiore; e per l'opposto, diminuendosi la pressione atmosferica, si alza la superficie inferiore, e si abbassa la superiore: dunque i movimenti delle due superficie a qualunque variare della pres-

sione atmosferica si fanno in direzione contraria. Non è così al variar del calore. Crescendo il calore, la dilatazione in tutto il mercurio alza ad un tempo la superficie del mercurio inferiore, e la superiore; e diminuendosi il calore, il condensamento del mercurio tutto abbassa l'una, e l'altra: per lo che sempre al variar del calore i movimenti delle due superficie del mercurio riescono nella direzione medesima.

TEOREMA 3.° La variazione della colonna barometrica per variare di pressione atmosferica è uguale alla somma dei movimenti contrarj delle due superficie, inferiore, e superiore, del mercurio. All'opposto la variazione della colonna barometrica per variare di calore è uguale alla differenza dei movimenti nella stessa direzione delle dette due superficie.

La variazione della colonna barometrica è la variazione della perpendicolare distanza tra i piani delle due superficie del mercurio per le *Definizioni* 2.ª, e 3.ª. Movendosi le due superficie in contraria direzione, la distanza loro varia per la somma dei due moti; e movendosi le due superficie nella direzione stessa, la loro distanza non varia, che per la differenza dei due moti. Quindi se generalmente denoti t il movimento della superficie superiore del mercurio; z il movimento della superficie sua inferiore, v la variazione della lunghezza della colonna barometrica. Sarà

Per il solo variare della pressione atmosferica $v = t + z$.

Per il solo variare del calore $v = t - z$.

Procediamo alle promesse formole generali.

PROBLEMA 1.° Determinare i movimenti delle superficie del mercurio, e la variazione della lunghezza della colonna barometrica per variamento della pressione atmosferica in un Barometro diritto Torricelliano qualunque sia il vase, o di costante ampiezza, od all'in su divergente, ovvero convergente (*Fig.* 1.ª e 2.ª). Sia

π il generale rapporto della periferia circolare al diametro;

r il raggio interno del tubo; r' il suo raggio compresa la grossezza del vetro; πr^2 conseguentemente l'area di ogni se-

zione orizzontale del vóto; $\pi r'^2$ l'area di ogni orizzontale sezione, compreso l'anello di vetro.

B l'altezza assoluta della superficie superiore del mercurio, cioè, secondo la *Definizione* 1.ª la sua altezza dal fondo del vase prima del variare della pressione atmosferica.

n l'altezza del mercurio nel vase avanti lo stesso variare.

$B - n$ per conseguenza l'altezza barometrica avanti il variare medesimo; m la lunghezza del pezzo del tubo avanti di esso variare immerso nel mercurio del vase, la quale lunghezza sarà $= n$, se la estremità del tubo, come più si suole, tocchi il fondo del vase.

$\mp t$ il movimento della superiore superficie del mercurio.

$\pm z$ il movimento della sua superficie inferiore.

$B \mp t$ conseguentemente l'altezza assoluta della superiore superficie del mercurio dopo il variamento.

$n \pm z$ l'altezza, dopo di esso, del mercurio nel vase.

$B \mp t - (n \pm z)$ l'altezza barometrica conseguente il variamento stesso.

$\phi . n$ la funzione di n dalla figura del vase dedotta ad esprimere il volume del mercurio nel vase all'altezza n.

$\phi . (n \pm z)$ la simile funzione di $n \pm z$ esprimente il volume del mercurio nel vase all'altezza $n \pm z$.

G la gravità specifica del mercurio al calore regnante nell' atmosfera avanti e dopo il variamento della pressione atmosferica.

$\mp v$ la variazione della lunghezza della colonna barometrica.

$\pi r^2 v G$ il variamento della pressione della colonna atmosferica sopra una base πr^2, espresso per il variamento della pressione della colonna barometrica di detta base.

Poste queste dinotazioni osservisi, che il volume del mercurio componente il barometro, ricevendo al variare della pressione atmosferica movimento e distribuzione diversa, rimane però in totalità il medesimo, non ricevendo nè dilatamento, nè condensamento, poichè il calore supponesi restare lo stesso.

Or l'espressione del total volume è avanti la variazione della pressione atmosferica $\pi r^2 \big(B - (n-m) \big) + \phi . n - \pi r'^2 m$; dopo la variazione

$\pi r^2 (B \mp t - (n-m) + \phi . (n \pm z) - \pi r'^2 (m \pm z)$.

Dovendo queste espressioni riferirsi allo stesso total volume si ha l'equazione

$$\pi r^2 \big(B - (n-m) \big) + \phi . n - \pi r'^2 m = \pi r^2 \big(B \mp t - (n-m) \big) + \phi (n \pm z) - \pi r'^2 (m \pm z)$$

che si riduce alla più semplice

$\phi . n \pm \pi r^2 t = \phi . (n \pm z) \mp \pi r'^2 z$.

Dal *Teorema* 3.° si ha l'altra equazione

$v = t + z$.

Per mezzo di queste due equazioni, data una delle tre variazioni t, z, v, si troveranno le altre due, data insieme la figura del vase che determini la funzione ϕ.

Se il vase sia un prisma quadrangolare di base rettangola, i cui lati sieno p, q, e per conseguenza l'area di essa base, e di qualunque superiore orizzontale strato $= pq$, sarà $\phi . n = pqn$, $\phi (n \pm z) = pqn \pm pqz$; e perciò la prima equazione generale vestirà la particolar forma

$\pm \pi r^2 t = \pm pqz \mp \pi r'^2 z$, ovvero $\pi r^2 t = (pq - \pi r'^2) z$

restando la seconda

$v = t + z$.

Quindi si ricava

$$z = \frac{\pi r^2 t}{pq - \pi r'^2} = \frac{\pi r^2 v}{pq - \pi (r'^2 - r^2)}.$$

Se il vase sia cilindrico, e del raggio R, sarà la sua base, ed ogni superiore strato orizzontale $= \pi R^2$; onde $\phi . n = \pi R^2 n$; $\phi (n \pm z) = \pi R^2 n \pm \pi R^2 z$, e le due equazioni

$r^2 t = (R^2 - r'^2) z$

$v = t + z$

dalle quali

$$z = \frac{r^2 t}{R^2 - r'^2} = \frac{r^2 v}{R^2 - (r'^2 - r^2)}.$$

Si ha di qui in precisa misura quanto l'ampiezza del vase nel Torricelliano barometro favorir possa il diminuimento di z,

di z, cioè dell'alzamento, od abbassamento della superficie del mercurio nel vase, e se una data ampiezza favorire il possa a segno di poter con ragione ommettere di tenerne conto rispetto a qualunque variazione della colonna barometrica, anche la massima, che accader soglia nel dato luogo. Essendo la massima nelle nostre contrade di un pollice e mezzo, facciasi $v =$ linee 18, e pongasi il raggio r dell' interno del tubo $=$ lin. $1\frac{1}{2}$; il raggio r' compresa la grossezza del vetro $=$ lin. 2, ed il raggio del vase R $=$ linee 12, si avrà nella massima variazione barometrica supposta

$$z = \frac{(1,5)^2 \times 18}{12^2 - (2^2 - (1,5)^2)} = \frac{40,50}{142,25} = 0,28471 \text{ di linea}$$

E per ogni linea di variazione barometrica sarebbe

$z = 0,05817$ di linea

generalmente poi per numero N di linee di variazione barometrica

$z = N \times 0,05817$ di linea

quantità non sempre trascurabile, massimamente in osservazioni richiedenti dilicatezza, quali quelle dell'esame dell'azione della Luna sul barometro per via dell'attrazione esercitata sull'atmosfera.

Sia il vase, non uniformemente dal fondo alla cima ampio, ma divergente; ed in primo luogo sia una piramide quadrangolare, di base rettangola posta all'in su, ed aperta ad ufficio di bocca, e con fondo similmente rettangolo, e parallelo troncata all'in giù. Sieno i lati della base H, K, i lati del fondo fH, fK, intendendo per f una frazione, e sia l'altezza, cioè la perpendicolare dal centro del fondo al centro della bocca $= a$. Sia poi questa altezza nella *fig.* 2.^{a} rappresentata dalla retta MS, e sia ADEC la sezione perpendicolare del vase per il centro della bocca S, e per centro del fondo M tradotta nella direzione della linea DE parallela ed uguale al lato H, e tagliante il fondo nella linea AC parallela, ed uguale al suo lato fH. Si prenda da M l'altezza indeterminata x, e si tiri l'orizzontale QP, e dal punto estremo A

del fondo si alzi la perpendicolare AF, che oltre a tagliare la DE in F, taglierà la PQ in L. Sarà $DS = \frac{1}{2}H$, $FS = AM = \frac{1}{2}fH$, $DF = \frac{1}{2}H(1-f)$, $AF = SM = a$, $AL = MQ = x$. Per la similitudine dei triangoli ADF, APL, si ha AF : DF :: AL : PL, cioè $a : \frac{1}{2}H(1-f) :: x : PL$. Dunque $PL = \frac{1}{2}H(1-f) \cdot \frac{x}{a}$.

E quinci $PQ = QL + LP = \frac{1}{2}fH + \frac{1}{2}H(1-f)\frac{x}{a}$, e $PT = fH + \frac{H(1-f)}{a}x$. Ora in luogo della sezione sin qui considerata concepiscasi quella ad essa perpendicolare e parallela al lato K: si troverà allo stesso modo (contrassegnando per P′T′ l' orizzontale per il punto Q in quel verso) $P'T' = fK + \frac{K(1-f)}{a}x$. Dunque l'area orizzontale passante per il punto indeterminato Q alto l'altezza x da M, è $= \left(fH + \frac{H(1-f)}{a}x\right)$ $\left(fK + \frac{K(1-f)}{a}x\right) = HK\left(f + \frac{f(1-f)}{a}x\right)^2 = HK\left(f^2 + \frac{2f(1-f)}{a}x + \frac{(1-f)^2}{a^2}x^2\right)$: moltiplicando quest'area per δx sarà

$HK\left(f^2\delta x + \frac{2f(1-f)}{a}x\delta x + \frac{(1-f)^2}{a^2}x^2\right)$ il volumetto contenuto nel vase dal punto Q all'altezza da esso δx; ed integrando si avrà

$HK\left(f^2 x + \frac{f(1-f)}{a}x^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2}x^3\right)$ ad espressione del volume nel vase contenuto dal fondo all'altezza x. Facendo quinci $x = n$, poi $= n \pm z$ avremo

$$\phi . n = HK\left(f^2 n + \frac{f(1-f)}{a}n^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2}n^3\right)$$

$$\phi .(n \pm z) = HK\left(f^2(n \pm z) + f\frac{(1-f)}{a}(n \pm z)^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2}(n \pm z)^3\right)$$

$$= \phi . n + HK\left(\left(\pm f^2 \pm f\frac{(1-f)}{a}2n \pm \frac{(1-f)^2}{a^2}n^2\right)z + \left(\frac{f(1-f)}{a}\right.\right.$$

$$+\frac{(1-f)^2}{a^2}\Big)z^2\pm\frac{(1-f)^2}{3a^2}z^3\Big).$$

Per lo che l'equazione prima generale si cangia nella particolare

$$\pm\pi r^2 t=\left(\mp\pi r'^2\pm \mathrm{HK}\left(f^2+\frac{f(1-f)}{a}2n+\frac{(1-f)^2}{a^2}n^2\right)\right)z+\mathrm{HK}\Big(\frac{f(1-f)}{a}$$
$$+\frac{(1-f)^2}{a^2}\Big)z^2\pm \mathrm{HK}\,\frac{(1-f)^2}{3a^2}z^3$$

conservandosi la seconda

$$v=t+z\,.$$

Se nella stessa figura 2.ª si ponga la linea $\mathrm{QS}=u$, sarà $x=\mathrm{MQ}=a-u$, e sostituendo nelle trovate espressioni delle orizzontali rette PT, P'T', $a-u$ in luogo di x, si avrà $\mathrm{PT}=f\mathrm{H}+\frac{\mathrm{H}(1-f)}{a}(a-u)=\mathrm{H}\left(1-\frac{1-f}{a}u\right)$, $\mathrm{P'T'}=f\mathrm{K}+\frac{\mathrm{K}(1-f)}{a}(a-u)=\mathrm{K}\left(1-\frac{1-f}{a}u\right)$ cioè le due orizzontali PT, P'T' passanti per il punto indeterminato Q della perpendicolare MS, che prima erano espresse per la loro distanza QM dal fondo, saranno espresse per la distanza loro QS dal piano della bocca, ed il simile sarà dell'area orizzontale per lo stesso punto Q passante, che avendo per lati rette alle due PT P'T' uguali sarà $=\mathrm{HK}\left(1-\frac{1-f}{a}u\right)^2=\mathrm{HK}\left(1-\frac{2(1-f)}{a}u+\frac{(1-f)^2}{a^2}u^2\right)$. E moltiplicando quest'area per la infinitesima parte di u, cioè per δu, ed integrando sarà $\mathrm{HK}\left(u-\frac{1-f}{a}u^2+\frac{(1-f)^2}{3a^2}u^3\right)$ la capacità, od il volume contenibile nel vase dal piano orizzontale per Q passante sino alla bocca. Rovesciando la figura, e concependo la bocca divenuta fondo, ed il fondo divenuto bocca, si passerà dal caso del vase piramidale divergente all'in su al caso contrario del vase allo in su convergente, e si avrà per tal caso in pronto la formola delle funzioni $\phi.n$, $\phi(n\pm z)$ facendo $u=n$, $u=n\pm z$.

Sarà dunque: per il caso del vase a piramide quadran-

golare troncata convergente allo in su, posti i lati del fondo rettangolare H, K, i lati della bocca fH, fK, intendendo per f una frazione, e posta l'altezza del vase $= a$

$$\phi . n = HK \left(n - \frac{1-f}{a} n^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2} n^3 \right)$$

$$\phi (n \pm z) = HK \left((n \pm z) - \frac{1-f}{a} (n \pm z)^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2} (n \pm z)^3 \right)$$

$$= \phi . n + HK \left(\left(\pm 1 \mp \frac{1-f}{a} 2n \pm \frac{(1-f)^2}{a^2} n^2 \right) z - \left(\frac{1-f}{a} - \frac{(1-f)^2}{a^2} \right) z^2 \pm \frac{(1-f)^2}{3a^2} z^3 \right)$$

e le due equazioni del problema saranno

$$\pm \pi r^2 t = \left(\mp \pi r'^2 + HK \left(\pm 1 \mp \frac{1-f}{a} 2n \pm \frac{(1-f)^2}{a^2} \right) \right) z - HK \left(\frac{1-f}{a} - \frac{(1-f)^2}{a^2} \right) z^2 \pm HK \frac{(1-f)^2}{3a^2} z^3$$

$$v = t + z .$$

È facile trasportare le dimostrazioni, e le formole dal vase piramidale al conico. Sia R il raggio maggiore del vase a cono troncato; fR il raggio minore, intendendo per f una frazione; a l'altezza del vase; y il raggio del cerchio orizzontale ad una indeterminata altezza dal fondo. Sarà nel vase conico divergente all'in su, denominando x la indeterminata altezza dal fondo, $y = R \left(f + \frac{1-f}{a} x \right)$; πy^2 l'area del cerchio all'altezza x; $\pi y^2 \delta x$ il volumetto elementare avente tal area per base, e la particella δx per altezza.

$$\int \pi y^2 \delta x = \pi R^2 \left(f^2 x + \frac{f(1-f)}{a} x^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2} x^3 \right)$$

la capacità dal fondo all'altezza x
E quindi

$$\phi . n = \pi R^2 \left(f^2 n + \frac{f(1-f)}{a} n^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2} n^3 \right)$$

$$\phi . (n \pm z) = \phi . n + \pi R^2 \left(\left(\pm f^2 \pm \frac{f(1-f)}{a} 2n \pm \frac{(1-f)^2}{a^2} \right) z \right.$$

$$+\left(\frac{f(1-f)}{a}+\frac{(1-f)^2}{a^2}\right)z^2 \pm \frac{(1-f)^2}{3a^2}z^3\right)$$

E le due equazioni del Problema

$$\pm r^2 t = \left(\mp r'^2 + R^2\left(\pm f^2 \pm \frac{f(1-f)}{a}2n \pm \frac{(1-f)^2}{a^2}\right)\right)z$$

$$+ R^2\left(\frac{f(1-f)}{a}+\frac{(1-f)^2}{a^2}\right)z^2 \pm R^2\frac{(1-f)^2}{3a^2}z^3;$$

$$v = t + z$$

Nel caso del vase conico allo in su convergente, chiamata u la indeterminata altezza dal fondo, sarà

$$y = R\left(1-\frac{1-f}{a}u\right)$$

La capacità dal fondo sino all'altezza $u = \int \pi y^2 \partial x =$

$$\pi R^2\left(u - \frac{1-f}{a}u^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2}u^3\right)$$

E perciò

$$\phi . n = \pi R^2\left(n - \frac{1-f}{a}n^2 + \frac{(1-f)^2}{3a^2}n^3\right),$$

$$\phi . (n \pm z) = \phi . n + \pi R^2\left(\left(\pm 1 \mp \frac{1-f}{a}2n \pm \frac{(1-f)^2}{a^2}n^2\right)z\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1-f}{a} - \frac{(1-f)^2}{a^2}\right)z^2 \pm \frac{(1-f)^2}{3a^2}z^3\right)$$

E le due equazioni del Problema

$$\pm r^2 t = \left(\mp r'^2 + R^2\left(\pm 1 \mp \frac{1-f}{a}2n \pm \frac{(1-f)^2}{a^2}\right)\right)z - R^2\left(\frac{1-f}{a}\right.$$

$$\left. - \frac{(1-f)^2}{a^2}\right)z^2 \pm R^2\frac{(1-f)^2}{3a^2}z^3;$$

$$v = t + z$$

Apparisce dalle esposte equazioni relative alle diverse forme del vase, che, essendo il vase di uniforme ampiezza dal fondo alla bocca, la determinazione di z per t dipende da una semplice equazione di 1° grado; ma richiede lo scioglimento di una equazione di 3° grado, qualunque il vase sia o divergente, o convergente allo in su. S'intende in genere facilmente, che in un vase divergente all'in su il movimento z

della superficie del mercurio deve essere minore, che in un vase allo in su convergente risultare maggiore. La differenza dipenderà dal grado della divergenza, e convergenza, e la risoluzione sola dell'equazione cubica rispettiva potrà determinarla con precisione, o con una approssimazione a piacere.

Problema 2°. Determinare i movimenti della superficie superiore ed inferiore del mercurio, e la variazione della lunghezza della colonna barometrica per variamento della pressione atmosferica in un barómetro inflesso munito di ampolla, qualunque sia di questa la forma. Fig. 3ª.

Si tiri la corda orizzontale CD dell'arco d'inflessione, e la sua saetta FL, e si dica

π, come sopra, il rapporto della periferia circolare al diametro.

r il raggio interno del tubo.

πr^2 l'area della sezione interna perpendicolare alla parete del tubo in qualunque suo luogo, anche nell'arco d'inflessione.

P l'altezza della superficie superiore del mercurio sopra la corda orizzontale CD avanti la variazione.

S la saetta FL dell'arco.

$P + S$ conseguentemente l'altezza assoluta della superficie superiore del mercurio avanti la variazione (Defin. 1ª).

E una linea retta uguale all'arco CFD.

p il pezzo del tubo Dh susseguente l'arco, e sostenente l'ampolla.

n l'altezza del mercurio nell'ampolla avanti la variazione.

$P + S - (S + p + n) = P - (p + n)$ l'altezza della colonna barometrica avanti la variazione stessa.

$\mp t$ il movimento della superiore superficie del mercurio.

$\pm z$ il movimento della superficie sua inferiore.

$P \mp t$ per conseguenza l'altezza della superficie superiore del mercurio sull'orizzontale corda CD dopo la variazione.

$P + S \mp t$ la sua altezza assoluta.

$n \pm z$ l'altezza del mercurio nell'ampolla dopo la variazione medesima.

$P \pm t - (p + n \pm z)$ l'altezza barometrica in seguito della variazione.

$\phi . n$ la funzione di n secondo la figura dell'ampolla esprimente il volume del mercurio in essa all'altezza n.

$\phi . (n \pm z)$ la simile funzione di $n \pm z$ esprimente il volume del mercurio nell'ampolla all'altezza $n \pm z$.

G la gravità specifica del mercurio invariata nella variazione della pressione atmosferica.

$\mp v$ la variazione della lunghezza della colonna barometrica.

$xr^2 \, v \, G$ il variamento della pressione della colonna atmosferica sopra una base πr^2 espresso per il variamento della pressione della colonna barometrica di detta base.

Il volume totale del mercurio viene espresso avanti il variare della pressione atmosferica

per $\pi r^2 (P + E + p) + \phi . n$

dopo la variazione

per $\pi r^2 (P \mp t + E + p) + \phi (n \pm z)$

Uguagliando queste due espressioni, e riducendo si ha l'equazione

$\phi . n \pm \pi r^2 t = \phi . (n \pm z)$

stando l'altra equazione

$$v = t + z$$

La forma dell'ampolla suol essere quella di una Ellissoide. Sia fig. 4ª ABRT la ellisse generatrice, e si faccia il suo asse maggiore AR $= 2H$, il suo asse minore $= 2h$, l'altezza indeterminata AM sopra il punto infimo A $= x$, il raggio corrispondente NM $= y$: sarà per natura dell'ellissi

$$y^2 = \frac{h^2}{H^2} (2 H x - x^2)$$

$\pi y^2 = \frac{\pi h^2}{H^2} (2 H x - x^2)$ l'area del cerchio al punto M

$\pi y^2 \partial x = \frac{\pi h^2}{H^2} (2 H x \partial x - x^2 \partial x)$ l'elemento del volume contenuto nell'ellissoide dal punto infimo A sino al piano circolare passante per M

$\int \pi y^2 \partial x = \frac{\pi h^2}{H^2} \left(H x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right)$ il volume stesso intero

Dunque $\phi . n = \frac{\pi h^2}{H^2} \left(H n^2 - \frac{1}{3} n^3 \right)$

$$\phi \left(n \pm z \right) = \frac{\pi h^2}{H^2} \left(H (n \pm z)^2 - \frac{1}{3} (n \pm z)^3 \right)$$

$$= \phi . n + \frac{\pi h^2}{H^2} \left((\pm 2 H n \mp n^2) z + (H - n) z^2 \mp \frac{1}{3} z^3 \right)$$

e quindi la 1ª equazione

$$\pm r^2 t = \frac{h^2}{H^2} \left((\pm 2 H n \mp n^2) z + (H - n) z^2 \mp \frac{1}{3} z^3 \right)$$

rimanendo la 2ª

$$v = t + z$$

Questo pajo di equazioni comprende anche il caso, in cui l'ampolla fosse una perfetta palla, il che però è difficile; poichè in tal caso non si ha a far altro che porre $h = H$, con che $\frac{h^2}{H^2} = 1$.

Se l'ampolla fosse di alcuna delle forme nel Problema antecedente distinte, si prenderanno di là le convenienti $\phi . n$, $\phi (n \pm z)$.

Costituite le formole de' movimenti del Barometro dipendenti da variata pressione atmosferica, facciamo progresso a cercar quelle de' movimenti di esso dipendenti da variato calore.

Próblema 3°. Determinare i movimenti delle due superficie del mercurio, ed il variamento dell'altezza barometrica per variare di calore in un barometro diritto Torricelliano.

L'aumento di calore cagiona accrescimento di volume, ma di altrettanto diminuisce là gravità specifica; ed all'opposto il decremento di calore produce diminuimento di volume, ma di altrettanto accresce la gravità specifica. Dunque in genere al variare del calore varian in ragione contraria fra loro il volume, e la gravità specifica; e perciò variando il calore, il volume del mercurio nel barometro avanti la variazione starà al volume del mercurio dopo, come reciprocamente

camente la gravità specifica del mercurio dopo alla sua gravità specifica avanti.

Trasportando quì le denominazioni convenienti del *Problema* 1.° col solo cangiare $\pm z$ in $\mp z$, perchè per il *teorema* 2.° i movimenti t, z delle due superficie del mercurio qualora nascano da variar di calore si fanno nella stessa direzione, si ha

Il volume del mercurio avanti la variazione del calore

$=\pi r^2 [B-(n-m)]+\phi . n-\pi r'^2 m$

il volume dopo la variazione

$=\pi r^2 [B\mp t-(n-m)]+\phi(n\mp z)-\pi r'^2(m\mp z)$

Dicendo pertanto

G la gravità specifica del mercurio avanti la variazione del calore

g la sua gravità specifica dopo; si avrà la proporzione

$$\pi r^2 [B-(n-m)]+\phi . n-\pi r'^2 m : \pi r^2 [B\mp t-(n-m)] +\phi(n\mp z)-\pi r'^2(m\mp z) :: g : G$$

dalla quale ne segue l'equazione

$$[\pi r^2(B-(n-m))+\phi . n-\pi r'^2 m]G=[\pi r^2(B\mp t-(n-m)) +\phi(n\mp z)-\pi r'^2(m\mp z)]g.$$

Il primo membro, essendo il prodotto del volume del mercurio avanti il variar del calore nella gravità specifica parimenti avanti lo stesso variare, esibisce il peso assoluto di esso mercurio avanti tal variare di calore; ed il secondo membro essendo il prodotto del volume del mercurio dopo la variazione del calore nella sua specifica gravità istessamente dopo esprime il peso assoluto del mercurio dopo la variazione del calore: e perciò la trovata equazione ci presenta l'assoluto peso del mercurio uguale ed identico, avanti e dopo il variamento del calore. Questa uguaglianza ed identità è da sè stessa evidente, poichè il variar del volume, e corrispondentemente della gravità specifica, non può variare l'assoluto peso, e da tale principio potevasi immediatamente dedurre l'equazione.

A formare la seconda equazione basta riflettere, che ri-

manendo la stessa la pressione atmosferica, la stessa rimaner deve la pressione della colonna barometrica, e che per rimanere la stessa tale pressione fa di mestieri, che l'altezza della colonna sia in ragione inversa della gravità specifica del mercurio, e quindi l'altezza della colonna barometrica avanti la variazione del calore, all'altezza dopo, come reciprocamente la gravità specifica del mercurio dopo, alla gravità specifica di esso avanti.

Or l'altezza barometrica avanti la variazione del calore $= B - n$, l'altezza barometrica dopo $= B \mp t - (n \mp z)$
Dunque $B - n : B \mp t - (n \mp z) :: g : G$
d'onde l'equazione $(B - n) G = [B \mp t - (n \mp z)] g$
Il *teorema* 3.° ci somministra la 3.ª equazione

$$v = t - z$$

Avendo tre equazioni, se delle quattro quantità $t, z, v, \frac{G}{g}$ una data ne sia, e sappiasi la forma del vase per determinare la funzione ϕ, potremo sempre conoscere le altre tre. Nè m'estenderò di nuovo a distinguere le diverse forme del vase stesso, ed assegnare le rispettive funzioni $\phi . n, \phi(n \mp z)$, poichè ognuno al caso particolare potrà prenderle dall'esposizione soggiunta per disteso nel 1.° *Problema* con la sola avvertenza di rivoltare il doppio segno ai coefficenti di z, z^3.

Ma non voglio ommettere di far vedere la differenza delle leggi, con le quali varia z al variare dell'altezza barometrica per variazione di pression atmosferica, e per variazione di calore, essendo il vase di uniforme ampiezza dal fondo alla cima. Si è già trovato sopra nel *Problema* 1.°, posto il vase cilindrico, per variamento di pressione atmosferica risultare

$$z = \frac{r^2 v}{R^2 - (r'^2 - r^2)}$$

Dalla equazione 1.ª di questo *Problema* si ha nel supposto stesso del vase cilindrico di raggio R

$$\frac{G}{g} = \frac{\pi r^2 [B \mp t - (n - m)] + n R^2 (n \mp z) - \pi r'^2 (m \mp z)}{\pi r^2 [B - (n - m)] + \pi R^2 n - \pi r'^2 m}$$

e dalla 2.ª si ha $\frac{G}{g} = \frac{B \mp t - (n \mp z)}{B - n}$

d'onde si deduce

$$\frac{r^2[B \mp t - (n - m)] + R^2 n \mp R^2 z - r'^2 m \pm r'^2 z}{r^2[B - (n - m)] + R^2 n - r'^2 m} = \frac{B - n \mp t \pm z}{B - n}$$

che si riduce alla seguente

$$\frac{\mp r^2 t \mp R^2 z \pm r'^2 z}{r^2[B - (n - m)] + R^2 n - r'^2 m} = \frac{\mp t \pm z}{B - n}$$

e per la equazione 3.ª si trasforma in

$$\frac{\mp r^2 (v + z) \mp R^2 z \pm r'^2 z}{r^2[B - (n - m)] + R^2 n - r'^2 m} = \frac{\mp v}{B - n}$$

dalla quale finalmente si trae

$$z = \frac{v[R^2 n - m(r'^2 - r^2)]}{[R^2 - (r'^2 - r^2)](B - n)}$$

Si vede a primo confronto la differenza di questa espressione di z relativa al variamento del calore dalla superiore relativa al variamento della pressione atmosferica. Ma per comprenderla meglio si supponga $m = n$ cioè che, toccando l'estremità del tubo il fondo del vase, il pezzo di esso tubo immerso nel mercurio del vase sia a tutta l'altezza del mercurio stesso nel vase uguale, che è il caso più ordinario: in tal caso la testè ritrovata espressione di z si riduce alla semplice $z = \frac{vn}{B - n}$

nella quale non entra per nulla il raggio del vase, e dimostra per conseguenza, che il valore di z non dipende dalla sua ampiezza, e niente per essa quanto si voglia grande è diminuito; laddove al contrario lo è benissimo, e prossimamente in ragione di essa ampiezza nell'altra espressione relativa al variamento della pressione atmosferica. E facilmente s'intende la ragione fisica della differenza richiamando alla memoria ciò, che ho dimostrato nel Teorema 1.° Variando la pressione atmosferica, varia nella colonna barometrica la quantità del mercurio. Se diminuendosi la pressione atmosferica per il conseguente abbassamento della colonna

barometrica passi una porzione del mercurio dal tubo nel vase, egli è ben chiaro, che questa espandendosi per l'ampiezza del vase vi cagionerà un innalzamento z del mercurio tanto minore, quanto l'ampiezza del vase sarà maggiore. E sarebbe a giusta porzione l'abbassamento della colonna barometrica col tubo all'innalzamento del mercurio nel vase come inversamente il quadrato R^2 del raggio del vase al quadrato r^2 del raggio del tubo, se all'ampiezza del vase non togliesse qualche cosa la grossezza del vetro del pezzo immerso del tubo, e per tale ragione da R^2 sottrarre non si dovesse $r'^2 - r^2$. Il simile si dica accrescendosi la pressione atmosferica, e passar dovendo alcuna porzioncella di mercurio dall' ampiezza del vase alla ristretta area del tubo ad accrescere la colonna barometrica. Laonde a piena luce resta spiegata la espressione del valore di z in quanto dipendente da variamento di pressione atmosferica. Ugual lume acquisterà la espressione del suo valore dipendente da variamento di calore, se si rifletta, che per tale variamento rimane nella colonna barometrica la stessa quantità di mercurio, e non fa, che variarne la densità; nè diversamente accade nel resto del tubo, e nel vase qualora sia cilindrico, o di qualunque altra figura dal fondo alla cima di costante ampiezza. La prima parte è dimostrata nel teorema 2.°, ed indi ne segue, che il mercurio costituente la colonna barometrica avanti, e dopo la variazione del calore si può considerare separatamente, ed il suo equilibrio con la invariata pressione atmosferica come un suo particolare, e distinto equilibrio. Ed un altro equilibrio fa in conseguenza mestieri di riconoscere tra la colonnetta mercuriale chiusa nel pezzo del tubo immerso nel vase, e la massa del mercurio, che l'attornia. Siccome tra quella colonnetta, e questa massa, che a maggiore perspicuità si può concepire divisa in tante colonnette della medesima altezza, regnava equilibrio avanti la variazione del calore, così deve trovarvisi dopo, dovendo per l'uguale variazione di calore in tutte, ugualmente in tutte

variare la densità, e quinci tutte, e l'attorniata, e le attorniate con ugual misura o elevarsi, od abbassarsi, ciascuna nella sua perpendicolare, e con tutta e sola la sua quantità di mercurio, senza che goccia ne passi da quella entro il tubo chiusa in quelle del vase, nè da queste in quella, o che da alcune di queste soverchiante porzione si rovesci sopra le altre, se la divergenza del vase non obblighi la massa in esso moventesi ad espandersi dal centro alla circonferenza o la convergenza a ristringersi, e cadere dalla circonferenza sul centro. Dunque se il vase sia perfettamente da fondo a cima uniforme in ampiezza, sia questa quanto si voglia grande, crescerà bensì il numero delle colonnette nelle quali si potrà intender divisa la massa del mercurio, ma varrà del numero maggiore ciò, che del numero minore, ciò che di una sola colonnetta in singolare; onde il numero delle colonnette, l'ampiezza del vase non avrà parte, e non potrà comparire nella quantità del variamento dell'altezza del mercurio nel vase per variamento di calore. Ciò, a che in un dato variamento di calore si proporzionerà questo variamento di altezza, sarà l'altezza stessa avanti il variamento di calore, come più chiaramente comprendesi ristringendo l'attenzione su la colonnetta chiusa nel pezzo immerso del tubo, il variamento di altezza nella quale pel dilatamento, e condensamento dal variato calore prodotto è per una parte evidente dover essere proporzionato alla sua altezza anteriore, e per altra parte si è dimostrato dover essere lo stesso, che quello della massa di mercurio all'intorno. Confrontando poi il variamento di altezza in tale colonnetta chiusa nel pezzo del tubo immerso nel vase con il variamento di altezza al tempo stesso, per lo stesso variamento di calore nascente nella colonna barometrica, che ad essa colonnetta sta sopra, è pure di tutta evidenza, che starà il variamento di altezza della colonnetta alla sua altezza, come il variamento di altezza della colonna barometrica all'altezza sua, conseguentemente si avrà la proporzione $z : n :: v : B - n$, che è appunto quella

compresa nell'equazione $z = \frac{nv}{B-n}$. È però d'uopo avvertire, che tutto il ragionamento si fonda sul supposto, che il vase sia esattamente dal fondo alla cima, od a parlare più preciso sino al piano dove può giugnere il mercurio, uniforme in ampiezza. Ma tale non si può rigorosamente dire, se il pezzo del tubo immerso non tocchi il fondo, poichè non toccandolo, al di sotto del tubo resterà al mercurio più ampio luogo, che al di sopra della sua estremità lungo il pezzo di esso immerso, togliendo la zona di vetro con la sua grossezza un po di luogo; onde sebbene il vase sia per sè di costante ampiezza, pure in realtà diviene un po all'in su convergente, il che non succede giugnendo il tubo a toccare il fondo, poichè la grossezza del vetro detraendo alla uguale ampiezza assoluta del vase in tutta l'altezza ugualmente, l'ampiezza pur residua rimane in tutta l'altezza uguale. Quindi è che, non toccando il tubo il fondo del vase, l'espressione di z riesce un po' complicata, involge distintamente la lunghezza m del pezzo immerso dal tubo, l'altezza n del mercurio nel vase, ed il raggio R del vase stesso, e si riduce poi alla somma semplicità che si è veduta, ed indipendente da R fatto $m = n$, cioè supposto, che il tubo posi sul fondo del vase. Ecco dunque a pieno giorno spiegata in ogni parte la espressione di z relativamente al variamento di calore in un barometro Torricelliano di vase costante in ampiezza. Resta dimostrato, che arrivando il tubo al fondo del vase, l'ampiezza del vase medesimo nulla influisce sul valore di z, quando per l'opposto l'espressione di z relativamente a variamento di pressione atmosferica dimostra, che il suo valore in tal rispetto riceve la massima legge e misura dall'ampiezza del vase, ed è affatto indifferente, che il tubo tocchi, o no il fondo di esso, non avendo m, n in tale espressione luogo, e non potendo per conseguenza la uguaglianza, o disuguaglianza loro diversamente modificarla.

PROBLEMA 4.° Determinare i movimenti delle due super-

ficie del mercurio, e la variazione dell'altezza barometrica per variare di calore in un barometro inflesso munito di ampolla, qualunque ne sia la figura.

Congiungendo le convenienti dinotazioni del Problema 2.°, e del 3.° sarà

Il volume del mercurio avanti la variazione del calore

$\pi r^2 (P + E + p) + \phi . n$

il volume dopo

$\pi r^2 (P \mp t + E + p) + \phi . (n \mp z)$

e si avrà per il principio del Problema 3.° la proporzione

$\pi r^2 (P + E + p) + \phi . n : \pi r^2 (P \mp t + E + p) + \phi . (n \mp z) :: g : G$

e quindi per

1.ª equazione $[\pi r^2 (P + E + p) + \phi . n] G = [\pi r^2 (P \mp t + E + p) + \phi . (n \mp z)] g$

Si può chiamare equazione di peso assoluto, rimanente nella variazione del calore lo stesso che avanti, tutto che cangi la gravità specifica.

L'altezza barometrica avanti la variazione del calore sarà

$P - (p + n)$

L'altezza barometrica dopo

$P \mp t - (p + n \mp z)$

E per il fondamento della 2.ª equazione del Problema 3.° si avrà la proporzione

$P - (p + n) : P \mp t - (p + n \mp z) :: g : G$

E quindi per

2.ª equazione $[P - (p + n)] G = [P \mp t - (p + n \mp z)] g$

Sarà la

3.ª equazione $v = t - z$

Secondo la particolare forma dell'ampolla si prenderanno le competenti $\phi . n$, $\phi . (n \mp z)$ dai casi distinti nei Problemi 1.°, e 2.° con l'avvertenza già sopra nel Problema 3.° notata d'invertire il doppio segno ai coefficienti delle potenze impari di z, che sono le due z, z^3.

Delle quattro quantità $\frac{G}{g}$, t, z, v data una qualunque

si avranno per mezzo delle tre equazioni, che ne contengono i rapporti, le altre tre; onde quattro saranno i Problemi subalterni, che sciogliere si potranno.

Ad esempio: supponghasi noto t, e si cerchino $z, v, \frac{G}{g}$ e sia l'ampolla una ellissoide.

Dalla 1.ª equazione si ha

$$\frac{G}{g} = \frac{\pi r^2 (P \mp t + E + p) + \phi.(n \mp z)}{\pi r^2 (P + E + p) + \phi.n} = 1 + \frac{\mp \pi r^2 t - \phi.n + \phi(n \mp z)}{\pi r^2 (P + E + p) + \phi.n}$$

Dalla 2.ª

$$\frac{G}{g} = \frac{P \mp t - (p + n \mp z)}{P - (p + n)} = 1 + \frac{\mp t \pm z}{P - (p + n)}$$

laonde ne segue

$$\frac{\mp \pi r^2 t - \phi.n + \phi.(n \mp z)}{\pi r^2 (P + E + p) + \phi.n} = \frac{\mp t \pm z}{P - (p + n)}$$

e facendo $\phi.(n \mp z) = \phi.n + F.\mp z$ risulterà

$$\frac{\mp \pi r^2 t + F.\mp z}{\pi r^2 (P + E + p) + \phi n} = \frac{\mp t \pm z}{P - (p + n)}$$

d'onde

$$t[\mp \pi r^2 (P - (p + n)) \pm (\pi r^2 (P + E + p) + \phi.n)]$$
$$= -[P - (p + n).F.\mp z \pm (\pi r^2 (P + E + p) + \phi.n)]z$$

Dal caso nel Problema 2.° trattato dell'ampolla a forma di Ellissoide si vede essere $\phi.n = \frac{\pi h^2}{H^2}\left(H n^2 - \frac{1}{3} n^3\right)$

$$F.\mp z = \frac{\pi h^2}{H^2}\left((\mp 2 H n \pm n^2) z + (H - n) z^2 \pm \frac{1}{3} z^3\right)$$

introducendo questi valori delle funzioni nella trovata equazione, e distinguendo a maggiore chiarezza, e sicurezza i due casi di aumento di calore, e di decremento, si avrà

Per il caso di aumento di calore

$$z^3 - 3(H - n) z^2 - \left(\frac{3 r^2 H^2 (P + E + p)}{h^2 [P - (p + n)]} + \frac{3 H n^2 - n^3}{P - (p + n)}\right.$$
$$\left. + 3(2 H n - n^2)\right) z - t\left(\frac{3 r^2 H^2}{h^2} - \frac{3 r^2 H^2 (P + E + p)}{h^2 [P - (p - n)]} - \frac{3 H n^2 - n^3}{P - (p + n)}\right) = 0$$

Per il caso di decremento di calore

$$z^3+3(H-n)z^2-\left(\frac{3r^2H^2(P+E+p)}{h^2[P-(p+n)]}+\frac{3Hn^2-n^3}{P-(p+n)}+3(2Hn-n^2)\right)z$$

$$-t\left(\frac{3r^2H^2}{h^2}-\frac{3r^2H^2(P+E+p)}{h^2[P-(p+n)]}-\frac{3Hn^2-n^3}{P-(p+n)}\right)=0$$

di modo che non vi ha fra i due casi altra differenza nell' equazione tra z, t che nel segno del 2.° termine.

A particolarizzare l'esempio, e vedere quanto giovare possa la grandezza dell'ampolla: supponiamola assai grande, e sia
Raggio r del tubo = lin. $1\frac{1}{2}$
Semi-asse minore ed orizzontale dell'ampolla h = linee 17
Semi-asse maggiore e perpendicolare H = linee 20
n altezza del mercurio nell'ampolla avanti il variar del calore = linee 19
p lunghezza del pezzo di tubo sostenente l'ampolla = lin. 12
Arco CFD (fig. 3.ª) un semicerchio
E la sua rettificazione = linee 31, che importa la corda, o diametro CD = lin. poco meno di 20, ed è conveniente essendo il semi-asse orizzontale dell'ampolla di linee 17
$P-(p-n)$ altezza barometrica avanti il variare del calore = Pol. 28 = lin. 336
P conseguentemente = lin. $336+12+19=367$
Si troverà calcolando
$z^3\mp 3z^2-1141,598z+t(46,1095)=0$
Onde, se facciasi t = lin. 6,75 come vedremo aver un Fisico insegnato, che avvenga nel passaggio del barometro dal ghiaccio fondentesi all'acqua bollente, si avrà
$z^3-3z^2-1252,4z+311,239=0$

Prossimo valore di z è 0,24839 di linea: ci servirà questo valore nell' Articolo seguente. Tal valore di z sottratto per la 3.ª equazione dal supposto valore di t, si deduce la variazione della barometrica altezza $v=6,75-0,24839=6,50161$.

E per l'equazione 2.ª s'inferisce $\frac{G}{g}=1+\frac{v}{P-(p+n)}=1+\frac{6,50161}{366}=1,017764$.

ARTICOLO II

Calcolo di esame delle esperienze sulla variazione del Barometro per variazione di calore; con esperienze nuove.

§. 1.° In due classi distinguere si possono, e distinguo le esperienze fatte per determinare la variazion del barometro dalla temperatura della fusione del ghiaccio alla temperatura del bollimento dell'acqua. Le une fatte sul barometro medesimo immerso nel ghiaccio fondentesi, poi nell'acqua bollente, o ad un dato calore esposto, le chiamerò esperienze *immediate*; e chiamerò *rimote* le altre con le quali si è, senza barometro, e per mezzo di un vetro termometrico, cercato il dilatamento, ed il minoramento della gravità specifica dal mercurio sofferto nel passaggio da una all'altra temperatura. Giova da queste incominciare.

Esperienze Rimote.

§. 2.° Il metodo migliore di tali esperienze si è questo. Preso un vetro termometrico, il cui cannello sia di esatto calibro, cioè d'interno vano perfettamente uniforme, si pesi con dilicatissima bilancia una quantità di purissimo mercurio maggiore di quella, che si richiegga per empirne la palla, e piccola parte del cannello. Empita la palla, e la parte del cannello, si pesi la quantità del mercurio rimasta, il peso della quale sottratto dal peso totale si scoprirà il peso del mercurio impiegato, che indicherò per p. Si ponga il termometro nel ghiaccio fondentesi, e si segni sul cannello con sottilissimo filo di seta la superficie del mercurio. Conservato questo segno, il termometro immergasi nell'acqua bollente (scegliendo a ciò giorno in cui il barometro sia a pollici 27, o molto vicino), e si segni con sottilissimo filo pari-

mente, e con tutta accuratezza il luogo, al quale la superficie del mercurio è salita. Estraggasi poscia dal cannello una piccola porzione di mercurio, e si pesi; indi si rimetta il termometro all'acqua bollente, e si segni il nuovo luogo, più basso che prima, a cui ascende la superficie del mercurio. Si misurino con fino compasso l'intervallo tra il filo della superficie del mercurio alla temperatura del ghiaccio fondentesi, ed il filo della superficie del mercurio alla temperatura dell'acqua bollente la prima volta, e l'intervallo da questo medesimo filo a quello della superficie del mercurio alla temperatura dell'acqua bollente la volta seconda. Si chiami H quell'intervallo grande tra i fili della superficie del mercurio alla temperatura del ghiaccio, ed alla temperatura dell'acqua bollente la prima volta; e si appelli h il piccolo intervallo tra i due fili della superficie del mercurio alla temperatura medesima dell'acqua bollente nelle due volte, cioè avanti di estrarre, e dopo estratta la piccola porzione di mercurio. Si denoti finalmente per p essa piccola porzione di mercurio estratta. Si rifletta, che h è lo spazio, che occupava il peso p di mercurio nello stato di dilatazione. Instituendo la proporzione $h : p :: \mathrm{H}$ al quarto termine, sarà questo quarto termine il peso di mercurio richiesto a riempiere in istato di dilatazione l'intervallo H; e denotando tal peso di mercurio per π, sarà per regola della proporzione $\pi = \frac{p\mathrm{H}}{h}$.

Se si sottragga questo peso π da tutto il peso P del mercurio, che la prima volta in istato di dilatazione occupava la palla, ed il pezzo di cannello sino al filo segnante l'effetto della temperatura del ghiaccio fondentesi, e di più l'intervallo H, sarà il residuo peso $\mathrm{P} - \pi$ il peso del mercurio, che in istato di dilatazione occupava la palla, ed il pezzo di cannello sino al filo dell'effetto della temperatura del ghiaccio fondentesi solamente. Ma all'incontro nel condensamento del mercurio a questa temperatura nello spazio di essa palla, e di esso pezzo di cannello stava ritirato tutto il peso di

mercurio P. Dunque i due pesi di mercurio nei due stati, uno di condensamento alla temperatura del ghiaccio, l'altro di dilatamento alla temperatura dell'acqua bollente contenuti nello stesso spazio sono P, P — π, e nella ragione loro sono le densità del mercurio ne' due stati, e parimente le gravità specifiche; ed il minoramento della densità, e della gravità specifica nel mercurio dalla temperatura del ghiaccio fondentesi alla temperatura dell'acqua bollente è da P a P — π, come a rovescio il crescimento del volume da P — π a P. Con tale processo di operazioni, e di computi, e con trarre da varie esperienze il risultato medio ricavò da prima il Lorgna (*Graduaz. de' Termometri ec.* 623) tra il volume del mercurio al ghiaccio fondentesi, ed il suo volume all'acqua bollente, il rapporto di $10000 : 10159 \frac{55237}{360000}$, che io riduco all'espressione di $10000 : 10159 \frac{15344}{100000}$.

§. 3.° Il P. Giambatista da S. Martino, ripetendone per ben otto volte la prova, trovò a ragione media $10000 : 10159 \frac{167}{1000}$ (*Maniera di correggere il Barometro*): la quale ragione confrontata con quella al Signor Lorgna provenuta, non presenta altra differenza, che dal dilatamento $159 \frac{15344}{100000}$ al dilatamento $159 \frac{167}{1000}$ in un volume di 10000. Il Lorgna pose il vetro termometrico all'acqua bollente, essendo il barometro a pol. 27 $\frac{1}{2}$; il P. da *S. Martino* essendo l'altezza del barometro pol. 28. Io ho prescritto di scegliere giorno, in cui il barometro sia a pollici 27 od assaissimo vicino, per attenermi all'altezza barometrica, che è base della teorìa del Signor *De-Luc* intorno al vario calore dell'acqua bollente dipendentemente dalla varia pressione dell'atmosfera, come pure della dottrina tutta sul perfezionamento del barometro per mezzo del termometro. L'operetta della *Graduazione de' Termometri a Mercurio, e della Rettificazione de' Barometri semplici del Signor Lorgna* data in luce l'anno 1765 prece-

dette di anni 7 la grand'opera *Recherches sur les Modifications de l'Atmosphere* del Signor *De-Luc*, non uscita che l'anno 1772, ma l'*Articolo intorno alla maniera di correggere il Barometro per mezzo del Termometro di Reaumur del P. da S. Martino*, inserito nel nuovo Giornale Enciclopedico d'Italia, fu ad essa posteriore di anni 18 essendo stato l'inserimento l'anno 1790. Bisogna però dire, che altre occupazioni ed altri studii avessero al *P. da S. Martino* impedito di leggere, ed apprendere le nuove esperienze e le nuove regole del *De-Luc*. Poichè nella nota alla pagina 5 di quel suo Articolo egli scrive, che *generalmente parlando un pollice di più, o di meno nel Barometro porta la differenza di un grado nel calore dell'acqua bollente*. E conformemente a ciò nella nota a pagine 9 dall'aver trovato, che posto nell'acqua bollente a tumulto sotto a pollici 28 del Barometro un Termometro che pervenuto gli era d'Inghilterra costruito dal celebre *Dollond*, fissato si era a gradi 79 $\frac{1}{2}$, ne trae *indizio* che *pel termine superiore quel celebre artefice aveva adoperata dell'acqua bollente a poll. 27 lin. 6*. Ed alla pagina poi 14 esposto il piccolo eccesso di dilatamento medio, dai suoi esperimenti risultante, sopra il medio al Signor *Lorgna* risultato nel volume del mercurio dal ghiaccio fondentesi all'acqua bollente, scrive che a *sì fatto eccesso avrà forse contribuito l'avere il Lorgna presa l'acqua bollente all'altezza di pollici* 27 $\frac{1}{2}$ ed egli *a quella* di *pollici* 28.

§. 4.° Il *De-Luc* a ragione distingue i gradi reali del calore dell'acqua bollente per una data altezza di barometro dai gradi, che in un Termometro in essa immerso segna il mercurio con le sue dilatazioni, non corrispondendo esattamente le dilatazioni del mercurio ai reali accrescimenti del calore. Rappresentando per a l'altezza barometrica computata in linee di Parigi, e per l il suo logaritmo, computandola in parti sedicesime di linea, per γ il grado del calor reale dell'acqua bollente, per γ' l'altezza sopra o nel Termometro in essa immerso sarà

$\gamma = 78,128 + 0,033836\,a - \frac{2945.484}{a}$. *De-Luc* §. 1122

$\gamma' = \frac{\frac{\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}l}{100} - 10387000}{100000}$. *De-Luc* §. 961 . 965

ovvero

$\gamma' = 78 + 0,03642\,a - \frac{3175,2}{a}$ *De-Luc* § 1088

Siccome nella rettificazione del Barometro per mezzo del Termometro basta sapere la dilatazione del mercurio, così la quantità da attendersi è γ', al computo della quale or gioverà valersi dell'una delle due sue formole ed or dell'altra. Ambedue hanno per base l'altezza barometrica di poll. 27, o di linee 324, o di 5184 parti 16.^{me} di linea, così che, posto nella logaritmica il logaritmo di 5184, e nella non logaritmica fatto $a = 324$, ed eseguite le debite operazioni, dall'una, e dall'altra risulta $\gamma' = 80$ gradi.

§. 5.° A vedere quanto dal vero si allontani, che generalmente parlando un pollice di più, o di meno nel Barometro porti la differenza di un grado nel calore dell'acqua bollente giusta l'asserzione del *P. da S. Martino*: denotata per γ' l'altezza termometrica nell'acqua bollente sotto l'altezza barometrica a, si denoti per γ'' l'altezza termometrica nell'acqua bollente sotto l'altezza barometrica $a + 12$ linee. Sarà la differenza delle altezze sul Termometro

$$\gamma'' - \gamma' = 78 + 0,03642(a + 12) - \frac{3175,2}{a+12} - \left(78 + 0,03642\,a - \frac{3175,2}{a}\right) = 0,03642 \times 12 + \frac{12 \times 3175,2}{a(a+12)}$$

Preso $a = \text{Pol.}\,27 = \text{lin.}\,324$ si ha per differenza delle altezze termometriche nell'acqua bollente sotto questa altezza barometrica, e sotto quella di Poll. 28 = linee 336

$$\gamma'' - \gamma' = 0,03642 \times 12 + \frac{12 \times 3175,2}{324 \times 336} = 0,43704 + 0,35$$

$= 0,78704$ di grado. Non dunque un grado come pensava il P. Giambatista da S. Martino.

È poi evidente, che se per (γ) si rappresenti la differenza delle altezze del termometro nell' acqua bollente all' altezze barometriche a, ed $a+6$ linee, si avrà

$(\gamma) = 0{,}03642 \times 6 + \frac{6 \times 3175{,}2}{a(a+6)}$; e fatto $a=$ linee 330, sarà

$(\gamma) = 0{,}21852 + 0{,}17182 = 0{,}39034$ di grado

Si osservi quì di passaggio, che non essendo 0, 39034 la giusta metà di 0, 78704 appalesasi, che la differenza delle altezze termometriche nell' acqua bollente è maggiore dal passaggio da poll. 27 del barometro a poll. 27 $\frac{1}{2}$, che nel passaggio da poll. 27 $\frac{1}{2}$ a poll. 28. Ma ciò, che più importa al proposito nostro si è, che scelta a fondamentale, e per 80 espressa quella altezza del termometro sopra 0, che si ha nell' acqua bollente essendo il barometro a poll. 27, l' altezza del termometro nell' acqua bollente, essendo il barometro a poll. 28 viene espressa per 80, 78704, ed essendo il barometro a poll. 27 $\frac{1}{2}$ per $80{,}78704 - 0{,}39034 = 80{,}39670$. Ma tali altezze del termometro sopra 0 nell' acqua bollente sono le dilatazioni del mercurio dalla temperatura del ghiaccio fondentesi alla temperatura dell' acqua bollente; dunque nella stessa ragione di 80, 78704 : 80, 39670 doveano risultare i dilatamenti medj del mercurio dalle esperienze del P. da S. Martino fatte trovandosi il barometro a poll. 28, e da quelle del Signor Lorgna essendo il barometro a poll. 27 $\frac{1}{2}$. Ora instituendo la proporzione 80, 39670 : 80, 78704 : : 159 $\frac{15344}{100000}$ al quarto termine, trovasi 159 $\frac{92616}{100000}$ in luogo di 159 $\frac{167}{1000}$, che per risultato medio è sortito al P. da S. Martino. La differenza dunque anche sola da poll. 27 $\frac{1}{2}$ a poll. 28 nel barometro avrebbe dovuto cagionare una differenza di $\frac{77272}{100000}$ in vece di $\frac{1356}{100000}$ cioè una differenza 57 volte maggiore di quella al P. da S. Martino provenuta. Quanto per ciò è lungi, che ad essa piccola differenza al P. da S. Martino resultata abbia potuto la differenza barometrica da poll. 27 $\frac{1}{2}$ a

poll. 28 meramente in parte, come pensò egli, contribuire? Peggio sarebbe, se giusta la sua estimazione, $\frac{1}{2}$ pollice di più in altezza barometrica portasse $\frac{1}{2}$ grado di più di calore nell'acqua bollente, poichè l'accrescimento della dilatazione del mercurio avrebbe dovuto risultare maggiore di quello, che dalla teorìa del *De-Luc* io ho ricavato. Laonde, a conchiudere, il giudicio del P. da S. Martino su la differenza del risultato medio delle sue esperienze a confronto di quello delle esperienze del Lorgna male sta con i principii del *De-Luc*, e peggio con i suoi supposti; ed in luogo di credere che con la differenza delle altezze barometriche o sia delle pressioni dell'atmosfera diversificanti il calore dell'acqua bollente siasi combinata qualche altra circostanza aumentante la differenza del dilatamento del mercurio, bisogna all'incontro dedurre, che combinato siasi qualche accidente atto a diminuirla, qual sarebbe la poca purezza del mercurio; se pure troppo grande piuttosto per contrario complesso di cause non riuscì il risultato delle esperienze del Lorgna.

§. 6.° Dopo aver confrontati tra loro i risultati delle esperienze del Lorgna, e del P. da S. Martino, giova per i confronti da farsi in seguito il ridurli per mezzo della dottrina del §. 4.° dalle altezze barometriche di poll. 27 $\frac{1}{2}$ e 28 all'altezza barometrica di poll. 27. Instituite pertanto le proporzioni

$$80,39670 : 80 :: 159\tfrac{15344}{100000} : x$$

$$80,78704 : 80 :: 159\tfrac{167}{1000} : y$$

Si trova $x = 158\frac{36813}{100000}$, e $y = 157\frac{61637}{100000}$ cioè per le esperienze del Lorgna il dilatamento di un volume di mercurio espresso per 10000 dal ghiaccio fondentesi all'acqua bollente sotto la pressione atmosferica di poll. 27 sarebbe di $158\frac{36813}{100000}$; e per le esperienze del P. da S. Martino di $157\frac{61637}{100000}$.

§. 7.°

§. 7.° Lo *Shuckburg* stabilisce, che il dilatamento del mercurio dal ghiaccio fondentesi all' acqua bollente sia di $\frac{208}{13119}$; onde espresso come prima il volume del mercurio al ghiaccio fondentesi per 10000, il dilatamento viene ad essere $= \frac{2080000}{13119} = 158\frac{54867}{100000}$. Ma non determinando *Shuckburg* l'altezza del barometro alla quale riportar si deve il bollimento dell'acqua, io non posso calcolare quanto il dilatamento del mercurio da lui stabilito sia prossimo, o distante da quelli risultanti dalle esperienze del Lorgna, e del P. da S. Martino. Lo stesso è del dilatamento 140, che nel §. 1563 assegna il *Musschenbroek;* della ragione 11822 : 12002, che tra i volumi del mercurio al ghiaccio, ed all'acqua bollente pone il Martine, e che si risolve in 10000 : $10152\frac{25050}{100000}$; della ragione 10000 : 10150 adoperata nei termometri di *de-L'isle*; di quella, al narrare dell'autore delle Memorie *sur la Réforme des Thermometres* pag. 153 data da *Christin* di 66 : 67 che si trasforma in 10000 : $10156\frac{25}{100}$; delle tre già esibite, giusta lo stesso autore, dal *Boerrhave* di 10814 : 10994, di 11156 : 11226, di 11452 : 11632 che si cangiano in quelle di 10000 : $10166\frac{45089}{100000}$, di 10000 : $10062\frac{74650}{100000}$, di 10000 : 10157, $\frac{17778}{100000}$. Mi reca tanta maraviglia sì grande differenza di ragioni in Boerrhave, che fortemente dubito di qualche errore di stampa nei numeri delle due prime, e massimamente nella seconda. Quello, che io leggo nell'articolo *De igne*, Esp. VIII si è che avendogli l'ingegnosissimo, come egli lo chiama, artefice *Gabriele Fahrenheit* costrutto un elegantissimo termometro secondo tutti i suoi voti, quel mercurio, che al segno o occupava 1124 spazietti, all'acqua bollente ne occupava 11336. Ma per la grande Tavola di *Wan-Svinden* il segno o del termometro di *Fahrenheit* cader

trovasi a gradi — 14,222 del termometro del *De-Luc*. Dunque argomentando 94, 222 : 80 : : 212 al quarto termine, risulta questo = 180, e perciò la ragione dei volumi del mercurio dal ghiaccio fondentesi all'acqua bollente, che dal citato esperimento di *Boerrhave* si trarrebbe, supposto allora il barometro al poll. 27, è di 11124 : 11304, che convertesi in 10000 : 10161 $\frac{81220}{100000}$. Ma non è da perdere più tempo intorno a tali ragioni dedotte da esperimenti, ne' quali non si attese all'altezza del barometro, nè si usò l'artificio dal Lorgna, e dal P. da S. Martino adoperato della doppia immersione nell'acqua bollente, estratta tra l'una, e l'altra una porzioncella di mercurio. Le esperienze pertanto di questi due Fisici sono nel genere delle esperienze *rimote*, delle quali sin quì è stata parola, le uniche, delle quali si abbia a tener conto. Ma a poter confrontarle con quelle dell'altro genere ci rimane ancora un passo da fare con il seguente

PROBLEMA.

§. 8.° Dato il dilatamento del mercurio dalla temperatura del ghiaccio fondentesi a quella dell'acqua bollente sotto la pressione atmosferica rappresentata nel barometro dall' altezza di poll. 27, determinare l'allungamento di questa stessa colonna barometrica dalla temperatura del ghiaccio fondentesi alla temperatura dell'acqua bollente sotto la pressione atmosferica medesima per essa altezza di poll. 27 rappresentata.

Si esprima per 1 il volume del mercurio al ghiaccio fondentesi, per $1 + d$ il suo volume al calore dell'acqua sotto i poll. 27 di altezza barometrica bollente; sia questa medesima l'altezza di un barometro posto nel ghiaccio fondentesi, e dicasi A; e sia poi a il suo allungamento nel suo passaggio dalla temperatura del ghiaccio fondentesi alla temperatura dell'acqua sotto la pressione della stessa altezza di

pollici 27 bollente . Dovendo le lunghezze della colonna barometrica per equilibrarsi con la stessa pressione atmosferica essere in ragione inversa delle densità, o gravità specifiche del mercurio nei due stati, ed essendo le densità o gravità specifiche in ragione inversa dei volumi, saranno le lunghezze della colonna barometrica in ragione diretta dei volumi, per conseguenza sarà

$$A : A + a :: 1 : 1 + d$$

onde $a = A\,d = 324 \times d$ esprimendo i pollici 27 in linee, per aver a in linee . Ho dimostrato, che riducendo le esperienze del Lorgna all'acqua bollente sotto l'altezza barometrica di poll. 27, si ha in un volume di mercurio come 10000 il dilatamento di $158 \frac{36813}{100000}$; e con simile riduzione delle esperienze del P. da S. Martino il dilatamento di $157 \frac{61637}{100000}$.
Passando a considerare il volume del mercurio $= 1$, sarà per le esperienze ridotte

Del Lorgna $d = \frac{15836813}{1000000000}$

Del P. da S. Martino $d = \frac{15761637}{1000000000}$

Dunque per le esperienze ridotte

Del Lorgna $a = \frac{15836813 \times 324}{1000000000} =$ lin. 5 , 131127412

Del P. da S. Martino $a = \frac{15761637 \times 324}{1000000000} =$ lin. 5 , 105767148

È tempo di procedere alle esperienze del secondo genere

Esperienze Immediate .

§. 9.° Pose il *De-Luc* in un gabinetto molti barometri, gli uni appresso gli altri, e tra di loro sospese tre termometri uno all'alto loro, l'altro al mezzo, il terzo al basso; ed al momento, che questi segnavano alle tre diverse situazioni lo stesso grado di calore, notò e questo, e l'altezza dei barometri . Riscaldato avendo poscia, quanto più gli fu possibile, la stanza, all'istante, che i termometri indicarono

essersi il calore per tutto lo spazio da essi, e dai barometri occupato ugualmente distribuito, registrò il nuovo grado de' termometri, e la nuova altezza dei barometri, tenendo conto di qualunque cangiamento nella pressione atmosferica intanto avvenuto. Reiterata più volte l'operazione, ed osservato nei barometri un cammino sensibilmente equabile, e proporzionato alle variazioni del termometro, raccogliendo i fatti, ed istituendo le convenienti proporzioni, venne ad inferire, che un barometro alto poll. 27, per un aumento di calore dal ghiaccio fondentesi all'acqua bollente crescerebbe di 6 linee precisamente. *Recherches sur les Modifications de l'Atmosphère* §. 362 e 490.

Ne seguirebbe di quì, che il volume del mercurio al ghiaccio fondentesi starebbe al volume di esso all'acqua bollente, sotto la pressione di poll. 27, :: 27 : $27\frac{1}{2}$ :: 54 : 55. Ma questa ragione non concorda con quella, che al §. 456, trattando il problema di determinare il diametro della palla di un termometro, essendo dati il diametro del tubo, e la grandezza de' gradi su di esso desiderata, egli stesso addotta, di 64 : 65. A vederne la differenza tra loro, e da quelle del Lorgna, e del P. da S. Martino, basta ridurle ad avere l'antecedente 10000, e si trova

$$54 : 55 = 10000 : 10185 \tfrac{18518}{100000}$$

$$64 : 65 = 10000 : 10156 \tfrac{25}{1000}$$

Si scorge non essere piccola la differenza, e la seconda si accosta a quella che io ho dedotta dalle esperienze del P. da S. Martino; ma ne rimane notabilmente distante la prima. Le stesse differenze si renderanno manifeste per la via del Problema poco fa sciolto, determinando cioè in linee l'allungamento a, che nella colonna barometrica di linee 324 per il passaggio dal ghiaccio fondentesi all'acqua bollente porterebbe la ragione 64 : 65. Essendo per tal ragione $d = \frac{1}{64}$

$= \frac{15625}{1000000}$, sarà $a = \frac{324 \times 15625}{1000000}$ = linee 5 , 0625

L' allungamento di linee 6 per il Signor *De-Luc* dedotto dalle sue esperienze supera questo di poco meno, che di una linea cioè di $\frac{9375}{10000}$ laddove quello per me tirato dalle esperienze del P. da S. Martino non lo supera, che di $\frac{423}{10000}$ di linea, e quello dalle esperienze del Lorgna per me parimenti calcolato di $\frac{688}{10000}$ di linea .

Io sospetto che nel gabinetto, nel quale il *De-Luc* fece caldo, l' aria non avendo sufficiente libertà di espandersi, abbia con l' elaterio per il calore acquistato, aumentata la pressione sulla superficie del mercurio, e quinci cagionato nell' altezza barometrica un aumento maggiore di quello, che avrebbe dovuto nascere per la sola dilatazione del mercurio .

§. 10. Mi sono preso la cura di ripetere due volte le esperienze del *De-Luc*, ma in una sala grande, e con le finestre tutte aperte, cosicchè l' aria avesse facilità a dilatarsi. La prima volta salendo il termometro da gradi 14 ai 58, la colonna barometrica di poll. 28, linee 2 ossia di linee 338, crebbe di linee 3; onde essendo l' aumento del calore di gradi 44 fatta proporzione 44 gradi : 3 linee : : 80 gradi : x linee, risulta x = linee $\frac{3 \times 80}{44}$ = linee 5 , 454545. Ma per l' altezza barometrica di linee 338, instituendo quest' altra proporzione 338 : 324 : : 5 , 454545 al quarto termine, trovasi linee 5 , 2278 per l' allungamento di una colonna barometrica di linee 324 , o di poll. 27 dal ghiaccio fondentesi al calore dell' acqua bollente sotto la pressione atmosferica di poll. 28, linee 2 . Procedendo a cercare per la formola sopra al §. 4 recata del *De-Luc* il rapporto dei dilatamenti del mercurio all' acqua bollente sotto le pressioni di poll. 28 linee 2, e di soli poll. 27, siccome questo trovasi essere di 80,81647 : 80, così facendo una terza proporzione 80,81647 : 80 : : 5,2278

al quarto termine, risultano linee 5,17458 per allungamento della colonna barometrica di poll. 27 dal ghiaccio fondentesi al calore dell'acqua sotto la pressione di essa bollente. Nella seconda delle mie esperienze il termometro ascese dai gradi 12 $\frac{1}{2}$ ai 44, ed il barometro dai pollici 28 ai 28 e linee 2. Quindi per prima proporzione si ha; gradi 31 $\frac{1}{2}$: linee 2 $\frac{1}{10}$: : gradi 80 : linee $\frac{340}{63}$ = linee 5,396809. Per proporzione seconda 336 : 324 : : 5,396809 : 5,2040655. Per terza proporzione 80,78712 : 80 : : 5,2040655 : 5,153362. Il medio di questo, e del risultato della prima mia esperienza 5,17498 è linee 5,164171, che non supera quello computato dalle esperienze del Lorgna, che di $\frac{329}{10000}$ di linea, e quello computato dalle esperienze del P. da S. Martino di $\frac{584}{10000}$ di linea. Ma la maggior libertà all'aria calda procurata di espandersi con la grandezza della sala, e con l'apertura delle fenestre potè onninamente togliere ogni intendimento di pressione sulla superficie del mercurio?

§. 11.° Semplicissima, ed interamente immediata è l'esperienza istituita da *Rocheblave (Journal de Physique an.* 1781 *Tom.* XVII *);* poichè avendo saldata sopra la fiasca del barometro una lunga canna, lo immerse a dirittura prima nel ghiaccio, poi nell'acqua bollente. Ma che! Essendo il diametro del tubo internamente di 3 linee, ed essendo la fiasca, che sopra il braccio vi avea fatto soffiare, del diametro di pollici 2, linee 10, ossia di linee 34, e perciò la ragione dei diametri quella di 3 : 34, e la ragione delle superficie 9 : 1156, si credette in diritto di trascurare come minima la elevazione del mercurio nella fiasca, come farebbesi nell'abbassamento del barometro per diminuimento di pressione atmosferica, e di notar solo l'ascendimento della colonna mercuriale nel braccio lungo del barometro. Quanto però diverso sia il caso, e quanto ingannato siasi il nomina-

to Fisico, apparisce a luce di meriggio da ciò che al 1.° Articolo fu dimostrato. Essendo al ghiaccio fondentesi l'altezza barometrica poll. 28 egli trovò, che passando all'acqua bollente, la superficie del mercurio salita era linee 6 $\frac{3}{4}$; d'onde deduce per l'altezza barometrica di poll. 27 l'accrescimento di linee 6 $\frac{1}{2}$; ma più prossimamente sarebbe di linee 6,508. Questo risultato supera di $\frac{508}{1000}$ quello del *De-Luc*, e troppo più quelli delle esperienze del Lorgna, del P. da S. Martino, dello *Shuckburg*, e delle mie. Ma già s'intende, che l'avere trascurato di diffalcare dall'ascendimento della superficie mercuriale nel braccio lungo del barometro l'elevamento del mercurio nella fiasca deve aver prodotto un eccesso. Facciamo un calcolo, e cerchiamo se, e quanto questa esperienza approssimare si possa alle altre. Avea la fiasca per diametro nel suo maggior largo linee 34, ed attesa la figura dall'autore esibita vedesi, che era, come al solito, ovale, ed alquanto più lunga, che grossa. Perciò sembra, che supporre si possa, che la metà della sua lunghezza, ed il pezzo di tubo, che la sosteneva, formassero una lunghezza di 3 in 4 pollici. Supponiamo per facilità di calcolo li 4, che sempre si potrà diminuire il risultato, se parrà di doverlo fare. Essendo pertanto l'altezza del mercurio nel braccio corto del barometro al ghiaccio fondentesi all'altezza del mercurio nel braccio lungo :: 4 : 32 :: 1 : 8, avrà in questa stessa ragione dovuto essere la salita del mercurio nel braccio corto entro la fiasca, e la salita della colonna mercuriale nel braccio lungo. Se quella chiamisi x, sarà questa stata $8x$. *Rocheblave* la notò di linee 6 $\frac{3}{4}$, onde ne viene $8x =$ lin. 6 $\frac{3}{4}$; ma per avere il vero aumento della colonna barometrica bisogna sottrarne la salita x del mercurio nel braccio corto. Dall'equazione $8x = \frac{27}{32} = 0,84371$ di linea, la qual quantità sottratta da linee 6,75, rimangono linee 5,90625 per accrescimento della colonna barometrica di 28 pollici. Quindi poi deducesi l'accrescimento della colonna barometrica di

poll. 27 $= \frac{27 \times 5,90625}{28} =$ linee 5,69531 sarebbe quì finita la riduzione dell'esperienza di *Rocheblave*, se all'istante che fece bollir l'acqua, il barometro all'aria fosse stato alto pollici 27. Ma poichè al riferir dello stesso *Rocheblave* il barometro era a pollici 28 nel ghiaccio fondentesi, e per conseguenza a qualche linea di più di altezza all'aria, e sotto tale altezza considerar si deve bollente l'acqua nella quale poi lo trasferì, fa perciò di mestieri, per ridurre l'esperimento di *Rocheblave* al confronto con gli altri, diminuire, giusta la regola prescritta al N.° 4 le linee 5,69531 in ragione di $\frac{80}{80,78704}$ almeno. Diminuendola in questa ragione risulterebbero linee 5,641. Non si può diminuire nella ragione di $\frac{80}{80,81647}$, che giusta il §. 4 importerebbe che il barometro all'aria fosse a poll. 28,2, e perciò la differenza di linee 2 tra il barometro all'aria, e lo stesso nel ghiaccio fondentesi; a supporre la qual differenza bisognerebbe immaginare un calore di presso a gradi 32. Si potrebbe di qualche cosa diminuire l'altezza di poll. 4 data al mercurio nel braccio corto, ma non si diminuirebbe abbastanza. Onde non veggo mezzo di ravvicinare agli altri il risultato dell'esperienza di *Rocheblave*. Chi volesse facilmente, ed esattamente insieme rifare l'esperienza di esso *Rocheblave* si serva di un barometro a sifone, e sul braccio corto saldi col fuoco una canna, che lo allunghi a più di 28 pollici, ed in questa insinui una verghetta di duro legno, od anche di ferro, contro cui il mercurio non ha azione, ben diritta, e di diametro poco meno di quello del vano della canna, e di tale lunghezza, che posando sul mercurio, sopravanzi per qualche pollice sopra la canna. Essa salirà, e discenderà col salire, e discendere della superficie del mercurio. Immerso lo strumento nel ghiaccio, e nell'acqua bollente, oltre segnare i punti della superficie della colonna mercuriale sul tubo del

baro-

barometro, si segnino sulla verghetta gli anelli, o punti rasente la bocca della canna. L'intervallo di questi anelli o punti mostrerà la elevazione della superficie del mercurio nel braccio corto del barometro, che sottratta dall'intervallo dei punti segnati sul tubo barometrico, darà la elevazione relativa delle due superficie mercuriali, cioè il vero aumento della barometrica altezza. E notata di questa la lunghezza al ghiaccio, e su di un altro barometro all'aria l'altezza rappresentante la pressione atmosferica sotto la quale l'acqua ha bollito, si avrà tutto ciò, che si richiede ad una base certa delle variazioni barometriche per il calore.

§. 12.° Narra il P. *Cotte* nel tomo 1.° *Mémoires sur la Météorologie* pag. 518, che il P. *Carbois* Benedettino avendo parimente sepolto il barometro nel ghiaccio fondentesi, e nell'acqua bollente, trovò la dilatazione di linee 5. Non dice per quale altezza barometrica, siccome ommette pure di dirlo narrando immediatamente avanti le esperienze del *De-Luc*, e la dilatazione da esso inferitane di linee 6. Ma sapendosi, che tale dilatazione presso il *De-Luc* risguarda l'altezza barometrica di pollici 27 al ghiaccio, per giusto seguito di discorso, e contrapposizione dal *Cotte* intesa de' risultati, si vuol dedurre, che anche la dilatazione di linee 5 osservata dal *Carbois* debbasi riportare all'altezze barometriche di pollici 27 nella fusione del ghiaccio. Nulla poi esponendo il P. *Cotte* della forma del barometro dal *Carbois* usato; nulla dell'altezza del barometro all'aria rappresentante la pressione atmosferica, sotto la quale l'acqua bollito aveva; nulla del modo dell'esperienza; non posso farne esame a veder la causa dello scarso risultato. Rifletterò solo, che si può peccare in più, confondendo colla elevazione relativa della superficie della colonna barometrica la elevazione assoluta di essa, e prendendo questa in luogo di quella; e si può peccare altresì in meno non immergendo nel ghiaccio fondentesi, e nell'acqua bollente il barometro abbastanza, sino cioè alla sommità della colonna mercuriale.

§. 13.° Cita eziandìo il P. *Cotte* a piè della medesima pagina un'esperienza di M. *Le-Gaux*, ma non ne reca neppure il risultato. Ed ivi stesso riferisce, che su la base di linee 5 di dilatazione per l'altezza barometrica di poll. 28 *Buissart* ha steso una tavola per le diverse altezze da quella di 3 sino a quella di 40 pollici di 6 in 6 linee, e per ciaschedun grado di calore dallo zero di *Reaumur* ai gradi 80, dividendo lo spazio di 5 linee in 500 parti di linea; tavola cui egli riferisce al fine del volume citato sotto titolo *Table Baro-Thermometrique Universelle*. Ma il fatto sta, che in questa tavola all'altezza barometrica di poll. 28 per il passaggio dallo zero detto alla temperatura di gradi 80 è assegnata la dilatazione di line 5 $\frac{24}{100}$. Ho creduto di dover ciò notare per prevenire l'imbarazzo, in cui taluno potrebbe trovarsi.

§. 14.° A coglier frutto dai calcoli e riducimenti fatti gioverà mettere sotto una occhiata in una tavola i risultati provenuti. Intendendo adunque per lo zero termometrico quello del Signor *De-Luc* fissato al punto del ghiaccio fondentesi; per i gradi 80 termometrici quelli, ai quali secondo lo stesso autore s'innalza il termometro nell'acqua bollente sotto la pressione atmosferica rappresentata dall'altezza barometrica di pollici 27

La variazione, che chiamerò V dell'altezza barometrica di poll. 27 dallo zero ai gradi 80 si ha

V = lin. 5,131127 per deduzione dalle esperienze del Lorgna
V = lin. 5,105767 . . . . da quelle del P. di S. Martino
V = lin. 6 . . . . da quelle del *De-Luc*
V = lin. 5,0625 . . . . dall' $\frac{1}{64}$ talora da esso usata
V = lin. 5,17498 . . . . dalla esperienza mia prima
V = lin. 5,16417 . . . . dalla seconda

Prendendo il medio di tutti risulterebbe
V = lin. 5,273
Non contando il V = lin. 6 proverrebbe a medio degli altri
V = 5,1236

Io lascierò ad ognuno lo sciegliere come più gli piace.

Desidero che alcuno esperimenti secondo il metodo al fine del §. 11.° prescritto.

ARTICOLO III

Confronto delle altezze Barometriche liberandole dall' effetto della diversa temperatura.

Teorema 1.° Detta V quella variazione, che adottata si avrà, della colonna barometrica di pollici 27, o sia di linee 324 corrispondente alla differenza termometrica di gradi 80 dal ghiaccio fondentesi all' acqua bollente sotto la pressione atmosferica rappresentata da pollici 27, sarà la variazione V' di un' altra colonna barometrica R qualunque, maggiore, o minore di linee 324 per la medesima differenza termometrica $= \frac{R}{324} . V$

Teorema 2.° E se dicasi V'' la variazione della medesima barometrica colonna di linee 324 per gradi termometrici numero G di quelli 80, o sopra, o sotto lo zero, vale a dire o sopra o sotto la temperatura del ghiaccio fondentesi, sarà $V'' = \frac{G}{80} . V$

Teorema 3.° E quindi denotando per V''' la variazione di una colonna barometrica qualunque R per la differenza dei gradi termometrici G, sarà componendo $V''' = \frac{R}{324} . \frac{G}{80} . V$

La verità del Teorema 1.° è per sè evidente. E quella dei Teoremi 2.°, e 3.° si renderà a chiunque chiara, sol che avverta, che si sono da me poste in corrispondenza, e proporzione, variazione di colonna barometrica, e differenza di gradi termometrici, non già di gradi di calor reale. Per le esperienze del *De-Luc* l' andamento del mercurio in dilatarsi, o condensarsi non segue con esatta legge l' andamento

dei gradi del calor reale; e quinci non può esservi esatta proporzione tra le differenze di calor reale, e le variazioni di una colonna barometrica per cagion loro. Ma essendo il termometro a mercurio, siccome io suppongo, agli effetti di dilatamento, o di condensamento che gli accrescimenti, o diminuzioni di calor reale produrranno sul termometro, corrisponderanno in esatta proporzione li decrescimenti, od aumenti della gravità specifica del mercurio in una colonna barometrica, e perciò le variazioni di questa seguiranno in giusta proporzione le differenze termometriche.

TEOREMA 4.° Essendo R una qualunque colonna barometrica nel ghiaccio fondentesi, ossia alla temperatura di esso, e si denoti per A l'altezza a cui si allungherà, o si contrarrà alla temperatura di gradi G sopra o sotto lo zero, sarà $R \pm \frac{R}{324} \cdot \frac{G}{80} \cdot V = A$; con che data R si conoscerà A.

TEOREMA 5.° Viceversa data A, si conoscerà $R = \frac{A}{1 \pm \frac{V}{324} \cdot \frac{G}{80}}$

Quindi se A sia una qualunque altezza barometrica osservata, che chiamerò *Apparente*, sarà R quella alla quale ridurrebbesi alla temperatura del ghiaccio fondentesi, e che perciò appellerò la sua *Ridotta*. Per tal modo riducendo tutte le altezze barometriche alla temperatura del ghiaccio fondentesi si condurranno a confronto, liberandole dall'effetto del calore diverso, e non lasciando in esse altra differenza che della diversa pressione atmosferica.

SCOLIO. Per mezzo dell'equazione $R = \frac{A}{1 \pm \frac{V}{324} \cdot \frac{G}{80}}$ è facile formare una tavola, quanto si voglia estesa, di altezze ridotte R corrispondenti alle apparenti A. Si scriva in colonna verticale a sinistra della tavola la serie dei numeri + 30, + 29 . . . . . 0, — 1, — 2 . . . — 20 esprimenti i gradi termometrici G da 30 sopra zero sino a 20 sotto di esso. In linea orizzontale all'alto della tavola si stenda la serie delle apparenti barometriche altezze A, cominciando da pollici 13,

altezza di 3 linee minore di quella del barometro sul Chimboraco, e continuando sino a pollici 30 con crescere di linea in linea. Si fissi la grandezza, che si giudica la più provata dalla variazione V della colonna barometrica di linee 324 dalla temperatura del ghiaccio fondentesi a quella dell' acqua bollente sotto la pressione atmosferica di pollici 27. Si computi in frazione decimale di figure almeno 5 il valore del coefficiente $\frac{1}{1+\frac{G}{80}\cdot\frac{V}{324}}$ per li 30 gradi termometrici $+G$ da 30 sopra lo zero sino ad esso, ed il valore di $\frac{1}{1-\frac{G}{80}\cdot\frac{V}{324}}$ per li gradi 20, $-G$ sotto zero. Si moltiplichi ciascheduna delle altezze barometriche apparenti A per le cinquanta frazioni decimali, e sotto di ciascheduna si ordini la rispettiva colonna verticale de' prodotti. Sarà composta la tavola, e riuscirà comodissima. Osservata sul barometro l'altezza A, e sul termometro, che lo accompagna sospeso a fianco, e verso il mezzo della barometrica colonna, la temperatura $\pm G$; rimpetto a questa, e sotto di A troverà subito l'altezza barometrica ridotta R.

Problema 1.° Invece di ridurre l'altezza apparente A alla temperatura zero del *De-Luc*, ridurla a qualunque altro grado g di quella scala.

Si denoti per R' l'altezza apparente A così ridotta, e siccome nel *Teorema* 4.° si è dimostrata $A = R \pm \frac{R}{324}\cdot\frac{G}{80}\cdot V$, in simil modo è evidente, che risulterà $R' = R \pm \frac{R}{324}\cdot\frac{g}{80}\cdot V = R\left(1 \pm \frac{g}{80}\cdot\frac{V}{324}\right)$. Sia un' altra altezza barometrica apparente a, e denotata per r la sua ridotta allo zero, si denoti per r' la ridotta sua al grado g; sarà similmente

$$r' = r\left(1 \pm \frac{g}{80}\cdot\frac{V}{324}\right)$$

E quinci $\frac{R'}{r'} = \frac{R\left(1 \pm \frac{g}{80}\cdot\frac{V}{324}\right)}{r\left(1 \pm \frac{g}{80}\cdot\frac{V}{324}\right)} = \frac{R}{r}$. D'onde ne segue

TEOREMA 6.° Le altezze barometriche apparenti A di diversi luoghi, in diversi tempi, a differenti temperature se riducansi ad un qualunque stesso grado g della scala del *De-Luc*, avranno così ridotte la medesima geometrica ragione tra loro, che se ridotte fossero alla temperatura del ghiaccio fondentesi. E se dalla riduzione al grado g si trasportino all' altro comune grado g', le nuove ridotte pure conserveranno la stessa ragione.

PROBLEMA 2.° Esprimere R' per A

Nell' equazione $R' = R \left(1 \pm \frac{g}{80} \cdot \frac{V}{324} \right)$ si sostituisca l' espressione di $R = \frac{A}{1 \pm \frac{G}{80} \cdot \frac{V}{324}}$, e si otterrà $R' = \frac{\left(1 \pm \frac{g}{80} \cdot \frac{V}{324} \right) A}{1 \pm \frac{G}{80} \cdot \frac{V}{324}}$

dove si badi bene, che G è la temperatura particolare dell' altezza barometrica apparente A, e g la comune delle riduzioni R'.

PROBLEMA 3.° Ridurre le altezze barometriche apparenti A allo zero di qualsivoglia scala data.

Sebbene paja dover importare qualche difficoltà questo problema, pure facile via ad esso apre il Problema 1.°. Si è trovato $R' = R \left(1 \pm \frac{g}{80} \cdot \frac{V}{324} \right)$. Si denoti per R'' la ridotta allo zero della data scala, ed osservisi, che esso zero sarà un qualche grado g della scala del *De-Luc*. Tutto dunque consiste in determinare g per le proprietà costitutive della data scala. Sia N il numero de' gradi che su di essa si conta, o calcolando trovasi doversi contare dal ghiaccio fondentesi all' acqua bollente sotto la pressione atmosferica di poll. 27. Ogni grado di essa scala sarà $= \frac{80}{N}$ di un grado della scala del *De-Luc*. Abbia poi essa scala il suo zero, numero n de' suoi gradi sotto, o sopra della temperatura del ghiaccio fondentesi; sarà la distanza di esso zero dallo zero del *De-Luc* $= \frac{80}{N} \cdot n$ gradi della scala del *De-Luc*. Si faccia pertanto

$\pm \frac{80}{N} \cdot n = \pm g$, e si conseguirà $R'' = R\left(1 \pm \frac{n}{N} \cdot \frac{V}{324}\right)$, e quindi il

Teorema 7.° Le ridotte R″ allo zero di qualsivoglia scala data avranno fra loro la ragione geometrica stessa che le ridotte R allo zero della scala del *De-Luc*.

Problema 4.° Esprimere R″ per A

Sostituito il valore di R proverrà $R'' = \frac{\left(1 \pm \frac{n}{N} \cdot \frac{V}{324}\right) A}{1 \pm \frac{G}{80} \cdot \frac{V}{324}}$.

Ma G è sulla scala del *De-Luc*. Or la temperatura di A sia sulla scala data a gradi m sopra o sotto lo zero di essa scala; questi gradi m equivaleranno in grandezza a gradi $\frac{80}{N} \times m$ della scala del *De-Luc*. Ed essendo, come si è ricavato nel Problema 3.°, lo zero della data scala dallo zero del *De-Luc* gradi $\frac{80}{N} \cdot n$ della scala del *De-Luc*; la distanza dei gradi m della scala data dallo zero del *De-Luc* sarà $= \frac{80}{N}(n \pm m)$ gradi della scala del *De-Luc*; dunque facendo $G = \frac{80}{N}(n \pm m)$ si avrà $R'' = \frac{\left(1 \pm \frac{n}{N} \cdot \frac{V}{324}\right) A}{1 \pm \frac{(n \pm m)}{N} \cdot \frac{V}{324}}$

Problema 5.° Ridurre le apparenti barometriche altezze A a qualunque grado p di qualunque data scala.

Si rappresenti per R‴ la cercata ridotta; e per le cose sopra ricavate è manifesto, che al grado p della data scala corrisponderà sulla scala del *De-Luc* il grado $\frac{80}{N} \cdot (n \pm p)$: laonde fatto $g = \frac{80}{N}(n \pm p)$ si avrà

$R''' = R\left(1 \pm \frac{n \pm p}{N} \cdot \frac{V}{324}\right)$, e perciò il

Teorema 8.° Le ridotte R‴ a qualunque grado p di qualunque data scala serberanno fra loro la ragione stessa, che le ridotte R allo zero della scala del *De-Luc*.

PROBLEMA 6.° Esprimere R‴ per A

$$\text{Sarà } R''' = \frac{\left(1 \pm \frac{n \pm p}{N} \cdot \frac{V}{324}\right) A}{1 \pm \frac{n \pm m}{N} \cdot \frac{V}{324}}$$

Ecco pertanto un

TEOREMA GENERALE. Sieno quante, e quanto si voglia diverse scale termometriche, e sia qualunque il grado su di ciascuna scelto a comune riduzione delle barometriche altezze apparenti, le ragioni delle ridotte in una scala qualunque saranno le medesime, che le ragioni delle ridotte in altra qualunque scala.

Si è dimostrata questa generale verità col calcolo. La ragione fisica si è, che ridurre le altezze barometriche apparenti da varie temperature affette ad una comune temperatura altro non è, che ridurre il mercurio delle barometriche colonne ad una medesima comune densità, e gravità specifica, sempre che la gravità specifica del mercurio sia la medesima, e comunque si varii si renda a tutte le barometriche colonne comune, le ragioni tra le altezze loro rimarranno le stesse ricevendo proporzionali cangiamenti. Quindi spontanei ne fluiscono i seguenti corollarj.

COROLLARIO 1.° Qualora dunque delle altezze barometriche ad una stessa temperatura ridotte non si cerchi, e ad impiegare non abbiasi che la geometrica loro ragione, ogni riduzione è buona, ed è cosa indifferente appigliarsi ad una, o ad altra.

COROLLARIO 2.° La tavola di una riduzione, come quella della riduzione alla temperatura del ghiaccio fondentesi, fornisce ad un tempo le ragioni geometriche di qualunque altra riduzione, non solo a qualunque grado dell' ordinaria scala del *De-Luc*, ma eziandio allo zero, o qualsiasi grado di altra scala qualunque.

COROLLARIO 3.° Per trovare le ridotte di una riduzione qualunque e formarne la tavola, basta moltiplicare le ridotte R della riduzione alla temperatura del ghiaccio fondentesi,

D
F
S
E
2
P
L
Q
T
A
M
C
3.
4.
R
B
M
T
N
A
h
C
L
D.
F

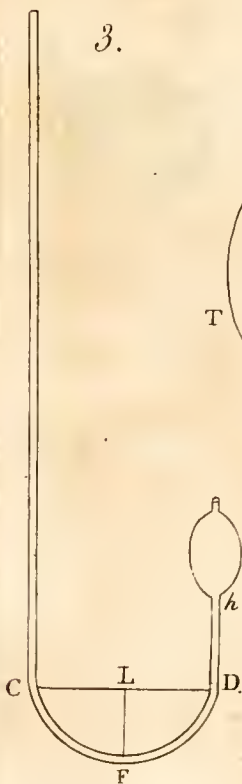
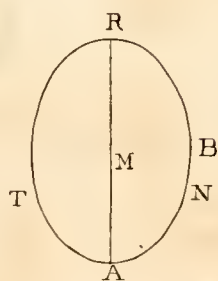
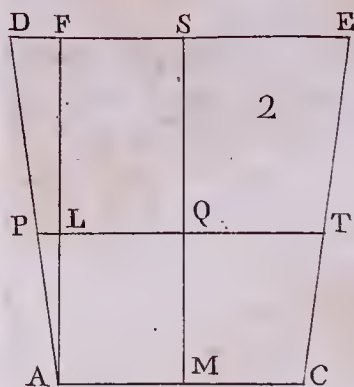
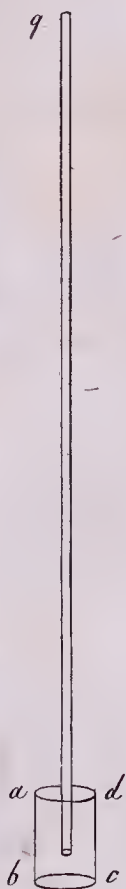
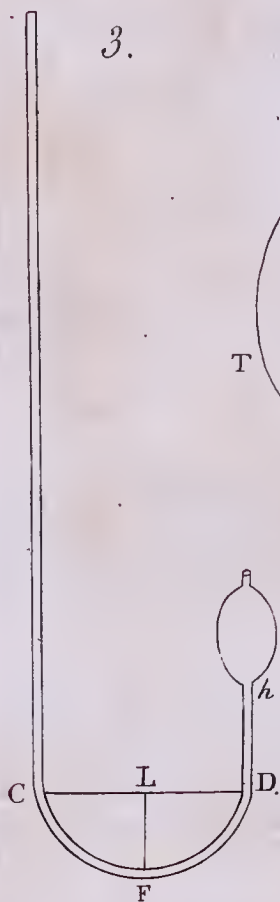
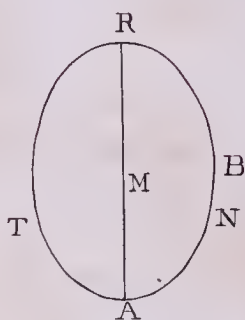
Fig. 1.

q
a d
b c

3.

C L D.
F
h

4.

R
M
B
N
T
A

tesi, per una quantità costante somministrata dalla rispettiva formola.

La formola $R''' = R\left(1 \pm \frac{n \pm p}{N} \cdot \frac{V}{324}\right)$ le comprende tutte, essendo la generale del Problema 5.°, e restringendosi a quella del Problema 3.° con fare $p = 0$, ed a quella del Problema 1.° con fare $N = 80, n = 0, p = g$.

FENOMENO DE' BAROMETRI NEL LORO SCUOTIMENTO O TRASPORTO DA LUOGO A LUOGO.

MEMORIA

Del Sig. Ab. Vincenzo Chiminello.

Ricevuta li 27 Ottobre 1809.

1. Comunemente credevasi, che un Barometro trasportato senza scuotimenti da luogo a luogo, o senza muoverlo di sito, percosso leggermente, od agitato nella solita sua sospensione, lasciato poi quieto immediatamente segnasse come prima la vera altezza, ma io trovai che ciò non è vero, se non dopo un intervallo di tempo. Un Barometro trasportato da un luogo ad un altro nello stesso piano subito dopo appeso segna un'altezza di una linea e più maggiore della vera, e poscia impiega un'ora e mezzo, e talor due a rimettersi a livello d'un altro Barometro col quale prima si accordava perfettamente; un Barometro scosso od agitato, quando è in istato di *ascesa* segna immediatamente le altezze più grandi delle vere di 25, di 40, e talor di 80 cento sessantesime di linea (secondo la capacità del Tubo); e quando è in istato di *discesa* le segna più grandi di 10, di 20, di 30 soltanto; e il tempo per rimettersi a livello col Barometro di comparazione e nell'uno, e nell'altro caso è di un'ora po più, po meno. È questo un Fenomeno, che ho scoperto nell'anno 1778 in occasione di altre mie osservazioni, del quale ne feci un semplice cenno in una mia memoria inserita nel giornale di *Rozier* del mese di Luglio 1779 senza produrre allora le osservazioni, che me lo hanno fatto conoscere.

2. Ma dopo la pubblicazione di quella Memoria si destò della curiosità presso alcuni, e vi fu chi pose attenzione a verificare il medesimo fenomeno; alcuno lo riconobbe vero senza muovere alcuna difficoltà, alcuno ne dubitò, (avendo fatta la sperienza come penso con qualche cattivo Barometro), alcuno finalmente non negando il fatto assolutamente trovò da contraddire sulla spiegazione della sua causa, e tra questi ultimi vi fu l'immortale P. Beccaria, il quale allora mi scrisse che *si vorrebbe* (queste sono le sue precise parole) *fare l'esperienza in stagione secchissima colla canna del Barometro che non toccasse nulla e fosse politissima*.

3. Io avevo adottata la spiegazione, che la causa del Fenomeno fosse l'elettrizzamento del Mercurio contro le pareti del Tubo, e il P. Beccaria invece pensava, che l'elettrizzamento dovesse produrre l'effetto contrario.

Io feci già subito l'esperienza richiesta dal Beccaria, e l'effetto fu ancora tale, quale lo avevo osservato nelle altre mie numerose sperienze, come vedremo più sotto, ed ero contento di questa chiara conferma, che fu eseguita alla presenza di molti Dotti. Ma ora considerando, che un fatto fisico, qualunque sia, bene stabilito e conosciuto in tutte le circostanze può sempre fare iscoprire dei rapporti alle generali Leggi della Natura, e delle regole in pratica; sebbene più cose dappoi rapporto a' fenomeni del Barometro siano state prodotte, riputai non inutile, benchè dopo 30 anni, di raccogliere ed ordinare tutte le sperienze da me allora fatte in questo proposito, con le circostanze loro, affinchè meglio si conosca il fenomeno, e si possa giudicare della sua causa.

4. L'eccitamento, che allora m'indusse a far l'esperienza che or metto alla luce, fu l'avvertenza del Signor *De Luc* (Annot. a, b del § 406 Cap. I Parte II delle modific. dell'Atmosfera), che prima di osservare il Barometro bisogna percuoterne un pochino il tubo per rompere l'adesione del mercurio, onde questo si livelli alla vera altezza; e in

conseguenza di tal avvertimento mi venne la curiosità di esplorare, qual sia la quantità di quest'adesione, e mi parve che ciò si potesse facilmente rilevare con due Barometri di tubo e recipiente di pari dimensioni indicanti sempre un'altezza comune, o due altezze di costante differenza, lasciandone uno quieto, e percuotendo od agitando l'altro, e così feci, ed ecco tra molte alcune delle osservazioni dell'anno 1778.

Avverto, che i Tubi dei due Barometri, con recipiente inferiore a figura d'ampolla largo linee 10, erano per tutta la lunghezza della canna d'una linea di diametro, ed erano le canne ugualmente lunghe. Li chiamo A, B. Erano appesi nella medesima stanza, onde non fu bisogno di correzione per il calore.

Mercurio Ascendente.

	Ora	A. Quieto	B. Quieto	B. Percosso.
1778. 2 Giugno	6^h 0'. m	27 . 10, 102	27 . 10, 105	27 . 10, 129
4	6 45 . m	27 . 10, 102	27 . 10, 100	27 . 10, 127
7	7 20 . m	27 . 10, 105	27 . 10, 102	27 . 10, 132
9	8 0 . m	27 . 10, 112	27 . 10, 110	27 . 10, 134
10	9 0 . m	27 . 10, 119	27 . 10, 121	27 . 10, 145

Mercurio Discendente.

	Ora	A. Quieto	B. Quieto	B. Percosso.
1778. 3 Giugno	1^h 0'. s	27 . 10, 070	27 . 10, 068	27 . 10, 080
5	2 15 . s	27 . 10, 061	27 . 10, 063	27 . 10, 070
6	3 30 . s	27 . 10, 048	27 . 10, 050	27 . 10, 059
8	4 40 . s	27 . 10, 034	27 . 10, 034	27 . 10, 046

5. Da queste osservazioni apparisce, che l'alzamento del Barometro percosso, quando il Mercurio ascende è di 25 centosessantesime di linea, e di 10 centosessantesime quando discende, mentre da me si aspettava secondo l'avvertimento di *De-Luc* di vedere un'ascesa nel primo caso, e una discesa nel secondo. Si vede peraltro, che l'adesione vi ha una buona parte, perchè nel primo caso l'effetto è maggiore.

6. In quell'anno poi medesimo facendo io dei tentativi per rilevare la differenza barometrica dal piano alle cime di alcune montagne, mi accorsi dell'altro effetto consimile assai maggiore, cioè dell'alzamento barometrico che segue per il trasporto da luogo a luogo. Varie discrepanze mi è accaduto di osservare per una elevazione stessa dal medesimo piano, benchè praticate fossero le debite correzioni col Termometro, nè cangiamento d'atmosfera fosse nato in piano, o in cima dei monti; ma l'effetto veduto per le osservazioni precedenti m'insinuò l'avvertenza di lasciare in riposo per un'ora e mezzo, o due il Barometro portato sulla montagna, e così dopo in ogni tempo ritrovai la differenza Barometrica tra il basso e l'alto a un di presso la medesima, similmente come lo mostrano queste osservazioni.

1778. 28 Giugno: Ore 4 mat. Bar. A quieto 27 . 10, 035
B quieto 27 . 10, 037

	A in quiete	B portato e riposto.
Ore 4^h 10' mat.	27 . 10, 035	= 27 . 11, 085
4 20	27 . 10, 036	= 27 . 11, 000
5 0	27 . 10, 037	= 27 . 10, 145
5 30	27 . 10, 040	= 27 . 10, 042

Il Barometro B adunque per il trasporto si alzò una linea e un terzo, e dopo un'ora e mezzo dalla prima osservazione si è rimesso d'accordo col Barometro A.

7. Ma dopo queste sperienze, trascorso qualche tempo, mi venne sospetto che il Fenomeno fosse stato particolare degli strumenti che adoperai, e perciò risolsi di fare delle nuove osservazioni con attenzione più rigorosa, adoperando Barometri di varie figure, e Tubi di varie dimensioni; e sono questi i risultati.

Un Barometro con tubo immerso in tazza larga linee 18 di cui la canna larga due linee $\frac{1}{4}$, e la distanza vacua dalla

superficie superiore del Mercurio al fornice linee 76, ad altezza media di pollici 28 percosso,

Ascendente si elevò centosessantesime di lin. = 53
Stazionario . . . . = 37
Discendente . . . . = 20

Barometro con recipiente ad ampolla il cui diametro della canna linee 1 $\frac{1}{4}$ percosso in istato di ascesa si elevò = 40
Stazionario . . . . = 30
Discendente . . . . = 7

Barometro a Tubo comunicante avente la canna di diametro di 2 linee percosso in istato ascendente si elevò 160.^{me} = 43
Stazionario . . . . = 17
Discendente . . . . = 5

Barometro a Tubo comunicante avente la canna di diametro di linee 1 $\frac{7}{10}$ percosso in istato ascendente si elevò 160.^{me} = 36
Stazionario . . . . = 15
Discendente . . . . = 6

A queste aggiungerò altre osservazioni fatte due anni dopo, cioè in Gennajo 1781, con due Barometri portativi di recipiente ad ampolla; l'un Barometro avea la canna di diametro di linee 3, e il recipiente nella maggior larghezza linee 18; l'altro Barometro avea la canna larga linee 2 $\frac{2}{3}$ con recipiente nella maggior larghezza di linee 13 $\frac{1}{2}$. Il primo percosso che fu si elevò

Ascendente 160.^{me} . = 75
Stazionario . . . = 48
Discendente . . . = 28

Il secondo poi si elevò, Ascendente . . . = 67
Stazionario . . . = 40
Discendente . . . = 17

8. Ma vengo all'esperienza suggerita dal Beccaria. Tre condizioni vuole il sagacissimo Fisico per far bene queste prove: *Stagione secchissima: canna del Barometro che non*

toccasse nulla: e canna politissima. La terza condizione vi era per quanto potè procurarla una cura diligente nella costruzione dell'Istrumento. Il tubo di questo Barometro avea un diametro di linee 2 $\frac{2}{3}$, il recipiente inferiore ad ampolla un diametro di linee 13 $\frac{1}{2}$. Per la seconda condizione io pensai di sospendere una canna staccata dalla tavoletta con un filo forte di seta legandola con un tale artificio, ch'essa tenesse invariabilmente la direzione perpendicolare, e così feci. Per cogliere poi un tempo certo di stagione secchissima, ch'era la prima condizione, non mi era così facile perchè allora mi mancava l'Igrometro, e perciò mi convenne aspettarla molto per avere altri segni meteorologici che me la indicassero; ma finalmente addì 31 Agosto 1780 di mattina mi parve la temperatura dell'aria opportuna per l'esperienza. Spirava il vento Greco-Levante asciuttissimo a senso della cute, le carte su'tavolini erano elasticissime, le funi rilasciatissime, una polvere ardentissima ingombrava l'aria, e ciascun ben si accorgeva senza riflettervi della estraordinaria siccità in quelle ore. Ma volli avere dei testimonj oculari che vedessero l'esperienza; e uscito di casa con fretta, trovai quattro de'nostri Signori Socj Ab. Costa, Arduini, Ab. Marinelli, e Ab. Cerato, che gentilmente subito mi favorirono, e de'quali il primo vive ancora; ed ecco l'esperienza con le circostanze, e li risultati.

Gl'istrumenti adoperati furono un Barometro con tubo immerso in tazza larga linee 18, di cui la canna larga due linee e un quarto, che nominerò A; un Barometro ad ampolla il di cui diametro nella maggior larghezza linee 13 $\frac{1}{2}$, e la canna d'un diametro linee 2 $\frac{2}{3}$, che nominerò B; due Termometri Reaumuriani concordi; il vento fu sempre E N E in tutto il tempo dell'esperienza.

Ore	Termom. all'aria	Termom. in camera	Baromet. A quieto	Baromet. B quieto	Barom. B. percosso	suo alzamento
10 . 30 mat.	17 , 9	10 , 0	28.5 , 00	28.5 , 080	28.5 , 120	0.0 , 040
11 . 10 mat.	18 , 0	10 , 3	28.4 , 150	. . . .	28.5 , 070	

Il Barometro B dunque, percosso che fu, segnò un quarto di linea più che prima in istato di quiete, e dopo 40 minuti dall'osservazione si trovò d'accordo col Barometro A a cui si era comparato.

Nel giorno seguente poi 1 Settembre, essendovi ancora siccità d'aria, replicai l'esperienza alla presenza del chiarissimo Toaldo, e di cospicui personaggi veneti, e l'effetto fu ancora di un quarto di linea. Volli di più vedere stando la canna barometrica ancora così sospesa, se in giornata d'aria umida segue l'effetto medesimo; e addì 4 Settembre essendo molto umido, e piovendo, ed abbassandosi il Barometro, alle ore 2.40 della sera toccata la canna, essendo l'altezza barometrica 28.1,040, dopo il tocco la trovai subito 28.1,070, cioè cresciuta di un quinto di linea, effetto in vero un poco minore, ma tale forse, perchè il Barometro era in istato di abbassamento.

9. Ma qual è mai la causa intrinseca di tal fenomeno? In principio ebbi timore, che la causa del prolungamento della colonna del Mercurio fosse l'ingresso di qualche porzione d'aria, e che per lo scuotimento successivo insensibilmente si venisse a disordinare il Barometro; ma questo timore poi mi svanì ponendo attenzione al fatto. Io vidi sempre nei buoni Barometri, che allungata la colonna del Mercurio per li primi piccoli colpi, e di poi seguitando a percuotere non si allungava maggiormente, e vidi che il Barometro percosso, trascorso qualche tempo, tornava d'accordo con altro Barometro lasciato in quiete; e perciò ho creduto, e crederei, che questo sospetto fosse da escludersi assolutamente.

10. Dopo dunque molte comparazioni, ed esclusioni di pensieri, che io feci in questa ricerca, finalmente mi è parso, che la causa del fenomeno altro non possa essere che un moto *meccanico*, o *fisico*, o *misto di tutti e due*, immediatamente e necessariamente derivante dallo scuotimento medesimo, che si dà all'istrumento. Per moto *meccanico* io intendo il dislogamento delle particelle mobilissime del Mercurio,

curio, per moto *fisico* l'elettrizzazione della massa del Mercurio medesimo. Il dislogamento delle particelle del Mercurio può considerarsi in due sensi. Si può 1.° immaginare, che fatti maggiori gl'intervalli di strato in strato dal basso alla cima della colonna del Mercurio senza interno disordine di luogo delle particelle stesse che formano gli strati medesimi, quindi segua un'allungazione simile a quella di una corda sonora fortissimamente tesa. La corda così tesa, toccata che sia, oscilla per qualche tempo; e sino a che durano le oscillazioni essa è più lunga di quello era prima. Così il Mercurio nella canna del Barometro, essendo in equilibrio coll'atmosfera, egli è come se fosse una corda tesa, perciò toccata la canna, si mette in oscillazione, le oscillazioni durano qualche tempo, benchè non si scorgano ad occhio nudo, e frattanto la colonna del Mercurio comparisce più lunga. Ma a questa spiegazione elegante data da un uomo dottissimo, qual era il Professore Nicolai, la quale mi piaceva, ho una difficoltà da opporre che nasce da una circostanza del fatto rimarcata di poi. Dopo i colpi dati al Barometro si vedono anche immediatamente, e quasi instantaneamente delle minime oscillazioni, ma queste cessano anche subito a vista d'occhio e di lente, e sussiste per qualche tempo lo stesso allungamento della colonna del Mercurio.

11. 2.° Piuttosto adunque, che sì fatta spiegazione, potrebbe considerarsi il dislogamento delle particelle del Mercurio come una totale sovversione dell'ordine che tenevano tra sè stesse, e degl'intervalli dei loro strati; similmente quasi come succede nella formazione del ghiaccio per la sovversione, e l'increspamento di tutte le molecule dell'acqua, siccome spiega il Signor *de Mairan*. In cotale disordine di tutta la simmetria, dirò così, del volume del Mercurio, ciascuna particella passando da luogo a luogo lascia, e produce attorno di sè degl'interstizj maggiori di quei di prima, e ciò è anche fisicamente necessario per una facilità, e prontezza sì grande di movimento. Quindi la colonna del Mer-

curio non potendosi dilatare inferiormente, ed ai lati, la sua espansione si spiega all' alto. L'equilibrio poi della colonna del Mercurio coll' Atmosfera non alterandosi punto, perchè il peso premente di quel volume resta il medesimo, perciò l' inerzia concilia alle particelle una temporanea indifferenza a rimettersi ai primi luoghi, onde seguita a vedersi per qualche mezzora e più l' altezza del Barometro alquanto maggiore della vera; e in questa spiegazione mi trovai d' accordo con uomini intelligentissimi delle cose fisiche, tra' quali poi lo stesso Nicolai.

12. Io dissi poi, che la causa del fenomeno potrebbe essere anche un moto *fisico*, e sarebbe questo l' elettrizzamento del Mercurio suscitato mediante la scossa od agitazione del Barometro, e questa è la spiegazione che altrove ho data. Tutti i fluidi elettrizzati diventano più scorrevoli, e vaporosi, in conseguenza sono più dilatati, e vi sono anche dell' esperienze che un Barometro elettrizzato si alza due linee, circa, e perciò è naturale, che un Barometro venendo scosso od agitato, il Mercurio si abbia ad elettrizzare mediante lo sfregamento contro il tubo.

13. Ma all' opposto, che per la sola percussione del Barometro debba la colonna del Mercurio allungarsi qualche poco, ciò è in qualche contraddizione coll' esperienze allora recenti del Beccaria: inferisce il Beccaria, che in quell' elettrizzamento li pori del vetro dovendosi dilatare, il mercurio per cagione dell' uscita laterale del fuoco elettrico, invece di ascendere, piuttosto dovrebbe discendere; e ciò, posto vero l' allungamento della colonna del Mercurio, non sarebbe che la differenza degli effetti delle due cause *meccanica*, e *fisica*. Ma salva la verità dell' esperienze del Beccaria, senza perdere un momento di stima a sì grande Fisico, io direi, che in questa quistione le sue esperienze non lo provano, perchè il fuoco elettrico prima di perdersi per li pori del vetro, che gli è resistente, deve propagarsi per tutta la colonna del Mercurio, ch' è un perfetto conduttore; il momen-

to di questa propagazione, per infinitesimo che sia, è sempre diverso dal momento dell'uscita interiore del fuoco per li pori del vetro; perciò sono due azioni separate. Quando adunque il fuoco elettrico abbandona il Mercurio, la colonna nel Tubo ormai dilatata non può subito per forza d'inerzia restringersi al suo primo volume, perchè la tendenza delle particelle del Mercurio a restituirsi non è così pronta in quello stato d'inerzia. (*a*)

14. Io penso dunque, che abbiasi a concludere, essere la causa dell'aumento dell'altezza del Barometro consecutivo alla scossa od agitazione di esso una causa *mista*, cioè il dislogamento delle particelle del Mercurio insieme coll'elettrizzazione del medesimo fluido. Tutte e due queste azioni sono conseguenze immediate di quei piccoli colpi. Che poi nei Barometri volgari di Mercurio non bollito non si veda effetto, la ragione è chiara: il Mercurio essendo impuro, non hanno le sue particelle quella mobilità, così pronta come quelle del Mercurio bollito, e depurato, nè può ricevere una elettrizzazione così forte, perchè misto di bolle d'aria, di vapori umidi, e di particelle eterogenee, e se qualche minimo aumento della colonna sta per ispiegarsi, questo viene represso tosto dall'elaterio della porzione d'aria scappata nel vacuo del Mercurio non defecato.

15. Resta a dire una parola dell'allungamento, che si osserva della colonna dopo il trasporto dei Barometri da luogo a luogo; ma ciò si spedisce coll'applicazione di quanto si è detto; altra differenza non v'è se non che l'effetto è maggiore. Il trasporto è un'agitazione più forte, e dura più lungo tempo; dunque la sovversione delle particelle del Mercurio, e l'elettrizzazione in questo caso sarà più forte, e produrrà necessariamente un effetto più grande, qual lo si vede.

(*a*) J'ai fait communiquer plusieurs fois mon grand Conducteur pendant l'orage avec le Mercure de mon Barometre; des l'instant de la communication, il sautoit aussitôt d'un quart de ligne; lorsque la communication étoit interrompue il mettoit une heure à redescendre au point où il étoit auparavant. Il P. *Cotte* Estratto delle osservazioni Meteorologiche del mese di Giugno 1780 fatte a *Montmorency*. *Journal des Sçavans*, *Oct.* 1780.

SUPPLEMENTO
ALLA DOTTRINA TORRICELLIANA
SOPRA LE COCLEE

MEMORIA

Del Sig. Pietro Ferroni

Ricevuta li 29 *del* 1810.

Torricelli il primo di tutti sino dall'anno M.DC.XLIV adoperando gli *indivisibili* curvi estese con elegantissima sintesi l'applicazione della Geometria alla ricerca della misura dei solidi *cocleari*, ch'ei mostrò essere eguali a' solidi *annulari* rotondi, i quali poi si riducono facilmente a solidi *pieni*, come le *armille* a circoli *interi* (1)* . I fili o elementi delle *coclee*, cioè l'*elici* ossiano *spirali cilindriche*, meritarono la considerazione geometrica nelle prime età della Scienza delle grandezze *continue*, come può riscontrarsi nel *commentario* di Proclo Diadoco dove egli nomina specialmente tra gli Autori, che ne fecer parola, Gemino di Rodi ed Apollonio Pergéo (2). E ben a ragione, perchè diversamente dalla spirale *piana* o *voluta* di Conone (3), dalla *sferica* rammentata da Pappo (4), dalle *spiriche* di Perseo (5), dall'*elica* d'Archita (6), o altre curve così dagli antichi appellate, la *cilindrica* è tale, che quantunque dotata di *doppia curvatura*, ha la proprietà d'essere uniforme in ogni sua parte, si-

(*) La moltiplicità delle Note ha indotto il Signor Cavalier Presidente a senso dall' Art. XIII dello Statuto a sopprimerle, di concerto anco coll'egregio Autore: siccome però questo ha mostrato desiderio di averle nelle 50 copie, che la Società distribuisce ai Socj attuali, così si lasciano sussistere li numeri che le chiamano.

Il Vice-Segretario.

mile per questo lato alla *retta* ed alla *periferìa circolare*, dalla combinazione o mescolanza delle quali due linee resulta. Fuori però di quest'unica prerogativa, che collocandola nella terna delle linee dette *similari* la fece da tutte l'altre distinguere (7), i Geometri Greci non attesero a contemplare siffatta *spira* sennonchè a riguardo della meccanica com' elemento della *vite* (8), annoverata la quinta tra le macchine semplici (9) quantunque volte alla *coclea* maschia o in rilievo s'univa la femmina scalpita in incavo congenere, o quando il *verme* della maschia *perpetua* s'incastrava nei *denti* tagliati in iscorcio d'una ruota *dentata* nei così detti *pancrazj* (10). I monumenti dell'antichità manifestano che Archimede (forse dietro alle tracce degli Egiziani) adattasse la stessa *coclea*, ma *tubulata*, anco all'elevazione dell'acqua (11), destando meraviglia grandissima in tutti coloro, che n'osservavano l'andamento, nè sapean mai concepire come l'acqua, sempre scendendo per archi *idrofori*, disgiunti o isolati, di giro in giro salisse difatto dalla bocca inferiore alla superiore, che a guisa di fontana intermittente la versava alla fine nel ricettacolo destinatole (12). Nè malgrado i suoi inconvenienti lasciò di sorprendere i Fisici sperimentatori l'istessa *elice* tubiforme avvolta nell'età nostra attorno al *tamburo* o timpano d'una ruota, qual'è quella della macchina ingegnosissima di Veltman o Wirtz, che chiamata in soccorso anco la forza *centrifuga* alza parimente l'acqua da un serbatojo o canale (forse più del recentissimo *Ariete idraulico*), e la porta dentro d'una conserva a *riprese* (13).

Ma ommettendo di trattenermi su tutto quanto appartiene alla *coclea* dipendentemente dalla Dinamica e Idrodinamica, nè tampoco fermandomi a rilevare la falsità della statica della *vite*, che si legge nel libro VIII.° ossia ultimo delle *collezioni* di Pappo (14), e la mancata o smarrita teoria della *vite* idraulica, che dopo l'opera postuma di Guidubaldo Del Monte venuta alla luce nel M.DC.XV a vicenda illustrarono durante il secolo scorso superiormente agli altri

Parent (15), Pitot (16), Euler (17), e Daniello Bernoulli (18), fa specie che alcuni dei molti encomiatori del Torricelli, la più parte de' di lui biografi (19), e segnatamente gli enciclopedisti e lo Storico universal delle matematiche Montucla (20) [per non dire la breve *Cronica* di Bossut (21)], malgrado la lode fattane amplissima da Roberval (22), o abbiano affatto taciuta, o mal enunciata la maniera facile e nuova di conseguire la dimensione della solidità delle *coclee*. Quel Toscano geometra ingegnosissimo e sommo pe' tempi suoi, nato ne' monti dell' Emilia, istruitosi in Faenza ed in Roma, e morto assai giovine cinque anni dopo di Galileo, col quale a commendazion del Castelli avea convivuto familiarmente i tre mesi estremi nella suburbana villa d' Arcetri (23), espose con tutta chiarezza e semplicità il suo ritrovato insiem con altre bellissime proposizioni geometriche, e verso il M.DC.XL, o in quel torno, per mezzo dei Minimi Niceron e Mersenno, con cui era in carteggio, partecipollo ai più insigni matematici della Francia (24), d' onde presto pervenne alla Gran Brettagna (25). Lo arricchì poscia di poche, ma pregevoli giunte, che per la morte immatura del Cavalieri (26), la noncuranza del Ricci (27), e quinci la gelosia del Viviani (28), ad onta delle premure incessanti di Ferdinando II.° e Leopoldo de' Medici rimasero sempre inedite nel MS.° Codice originale, che dalla Libreria Palatina passò a quella dell' Imperial Museo di Firenze, ove tuttavia si conserva (29). Nulla però in questo Codice vi s' incontra, che risguardi o affezioni particolari dell' *elici* avvolte attorno un Cilindro, o misura dell' aree di Zone *elicoidi*, o delle superficie *spiralmente* contorte terminanti le *Coclee*. Havvi solo spiegato il modo di rintracciare il valor della superficie, che circoscriva un anello (*chiuso* od *aperto*), le cui sezioni sono le *spiriche* antiche, e perciò sia generato dalla rotazione d' un circolo intorno a un asse posto nel medesimo piano (30); dal che si rileva che Torricelli prevenne su tal proposito il Tacquet, cui Pascal sembra dare il primato della scoperta (31),

pubblicata nel libro o parte IV.ª e V.ª *Cylindricorum et Annularium* del M.DC.LI e LIX (32), vale a dire almeno quattr'anni in circa dopo mancato il primo di vita (33). Dietro all'autorità di quel Codice (noterò di passaggio), e dei MSS.ⁱ del Lorenzini, parte esistenti nella Fiorentina Biblioteca pubblica Magliabecana (34), e parte tra gli altri del Grandi in quella dello Studio di Pisa (35), sarebbe agevole impresa rivendicare ai Geometri della Toscana parecchie sintetiche invenzioni sublimi sopra le Curve, e loro varie attenenze; invenzioni finissime, che si credono esotiche, ma doverebbero ad ogni buon dritto servir d'appendice alla corta *Lettera* di Timauro Antiate, ossia Carlo Dati, concernente soltanto il Barometro, e la Cicloide (36), non meno che alla manchevole *Storia letteraria d'Italia* del Tiraboschi (37).

Procedendo il secolo XVII.°, ad eccezione dei *piani* allora detti *flessuosi*, mentovati altresì da Pappo (38), poco o niente fu aggiunto dal Gesuata De-Angelis al già discoperto dal Torricelli in materia della *cubatura* o solidità delle *Coclee*, e delle qualificazioni *centrobariche* alle medesime competenti (39); nè altro Italiano, ch'io sappia, prese a trattare di siffatto argomento. Pascal tra i Francesi presso al M.DC.LIX considerando meno generalmente del Torricelli i Triangoli *cilindrici* (40), assai più semplici delli *sferici*, perchè svolgibili in piano, e se terminati dall'*Elica* rettilinei, immaginò e *ricubò* un Solido nuovo da lui chiamato *Escalier* (41) o *solidum scalare* da Wallis (42), colla base però circolare, colle altezze progressive in eguaglianza cogli archi sottoposti, e solamente colla superior superficie in qualche sorte analogo al *Cocleare*: il prenominato Wallis (43) e Wren (44) si distinsero quasi contemporaneamente nell'Inghilterra o ripetendo o di poco avanzando gl' insegnamenti Torricelliani; sennonchè l'ultimo, noto eziandio nella Storia delle Belle Arti per essere stato l'Architetto e Ornatista del Tempio di S. Paolo di Londra emulo della Basilica Vaticana (45), spinse le sue ricerche geometriche (presone quasi dalla coclea,

κοχλία (46), *limaçon* del laberinto dell'orecchio umano il modello) anco sopr'una *Coclide* piramidata, e *spiralmente* ritorta intorno ad un Cono (47). In questa foggia la Geometria s'accostava semprepiù alla Natura, come quella che, osservandolo tra i primi speculatori *ex professo* Sulzer (48), e Hogarth (49), nelle immense specie e varietà delle chiocciole, testacei, conchiglie, sì viventi che fossili, e massimamente dei *corni d'ammone*, de' quali è stata cotanto prodiga quanto dei grani d'arena, sino al segno di mostrarne all'occhio degli Orittografi in un pugno di terra millioni di microscopici (50), e nelle vaghissime *strie* o scannellature polistrofe delle lor valve affetta soprattutto *spirali* rastremate o affusate (51), come gli antichi copiarono nelle colonne degli ordini più delicati (52) e Dante nello spartimento fantastico dell' Inferno, ed a differenza delle vitalbe e trachée delle piante perfino le affaccia nei vortici acquei o turbinosi atmosferici, nel moto apparente del Sole, nel serpeggiar delle folgori, nel tipo istesso della bellezza delle forme animali, ed in somma nell'universalità dei tre regni del Mondo fisico tende più al tortuoso che al retto, nè manca d'esservi disgraziatamente proclive eziandio nel morale. Comunque però inoltrata si fosse la considerazione dei corpi geometrici *cocleiformi*, niun matematico di detta età mai cimentossi ad assegnarne le superficie. Aveva l'Huygens di già compianati, senza comunicarne la prova, i contorni o perimetri dei Conoidi e Sferoidi (53), alla qual misura non era giunto colla mirabile sua perspicacia il gran Geometra di Siracusa (54); e deesi poscia a Barrow (55), Fermat (56), e Parent (57) il perfezionamento non solo, ma oltracciò il metodo generale per conseguire la dimension delle superficie di tutti i solidi generati dalla circonvoluzione di qualunque linea di *semplice curvatura* attorno una retta (58). Anzi, siccome Archimede, oltre a non aver fatto parola del Solido Iperbolico-acuto Torricelliano (59), lasciò parimente d'attendere tra i corpi rotondi nati dal girar delle Coniche al Cilindroide, o Timpano

iper-

iperbolico così nominato, e malgrado l'autorità di Fontenelle (60) avanti di Wallis descritto dal Cavalieri (61), e taciuto nulladimeno dall' Huygens, la superficie di quest'ultimo Solido misuratasi da Parent (62) aprì in virtù d'un sottile ritrovamento di Wren (63) la nuova strada, che conduceva a sottoporre alla Sintesi perlomen le più semplici tra le superficie formate in guisa di tele, o in altri termini assomigliantisi ad un tessuto di rette linee. Tali eran forse, standosi all'etimologìa del lor nome, le *Plectotides* dei Geometri Greci, rammentate da Pappo dietro all' opere ora perdute di Filone da Tyane e Demetrio Alessandrino (64); nè son tampoco dissimili la superficie ideata per descrivere la *Quadratrice* (65), quella del *Prismale* immaginato dal Grandi (66), l'altra della nuova *Trattoria*, e sua generatrice insieme, considerate nel Tomo V degli Atti antichi dell' Accademia R. di Berlino (67), le superficie che proverrebbero conducendosi dal perimetro delle sezioni-coniche de' Cilindri, Coni, e Conoidi le normali agli assi di siffatti corpi rotondi (68), e tutte in generale dei corpi *gauches* ed *amorfi*, rispetto ai quali, e definitivamente alle superficie loro, appellate *sviluppabili*, o con isvolgerle compianabili, sul declinare del secolo scorso Euler (69), Tinseau (70), Monge (71), Bossut (72), ec. si diedero ad applicarvi l'Analisi degli Infiniti.

Ben è vero che con i mezzi possenti somministrati per avventura dal Calcolo Infinitesimale, o sivvero delle *funzioni* analitiche *derivate* e *primitive* (che concesso lo sviluppo d'ogni qualunquesiasi *funzione* in *serie* procede immediatamente dalla regola del *binomio* di Newton), data in genere l'*equazione* alla superficie se ne deduce immantinente il valore, sciogliendola in elementi di secondo ordine, e doppiamente integrandoli. Così operaron difatto sin dalla nascita della nuova Analisi Leibnitz (73) e i due Bernoulli seniori (74) quando appigliaronsi a decifrare l'Enimma Fiorentino della Volta-a-vela *quadrabile*; così in processo di tempo l'A-

nonimo nei Supplementi agli *Atti* degli Eruditi di Lipsia (75) e Bezout nel suo *Corso* (76), con tutti quelli che poi seguirono, o Elementografi o Trattatisti moderni, i precetti dettati dall'Euler tostochè prese a generalizzare il Problema di Firenze usando del doppio *segno* d'integrazione (77). Conseguenza di queste formule universali sarebbe subito il caso particolare della dimension delle superficie di tutte le *Cocliti*, e infra i moderni il primo a specificarle è stato il Frisi nel suo *Trattato* d'Algebra e Geometria-analitica (78); conciossiachè Caraccioli avanti di lui nel M.DCC.LV (79) null' altro avea fatto se non se inutilmente ed erroneamente saggiare il Calcolo per investigarne la sola di loro solidità, ormai dopo più d'un secolo conosciuta. Racconta l'istesso Frisi nel precitato volume (80), e più diffusamente in una lettera posteriore diretta a Fabroni (81), che tra le speculazioni inedite del Perelli eravi ancora quella d'essersi applicato a cercare per via sintetica, com'avea in uso, alcune delle più ovvie tra le superficie *elicoidi*, ricavandone preziosissimi resultati.

Io dunque, che largo estimatore di Torricelli e Perelli, sagacissimi entrambi nel magistero della più forbita e recondita Geometria (il primo de' quali proverbiavasi ancora vivente colla versione di *Evangelista Torricellius* nell'anagramma *En virescit Galilœus alter*, il secondo ammiravasi come raro e valente ingegno per ricondurre l'antica semplicità ed eleganza delle geometriche dimostrazioni nelle più difficili e astruse teoríe), non ho altro divisamento fuori di quello di compiere una dottrina cominciata con sì favorevoli auspicj in Toscana, passo adesso a satisfare all'assunto propostomi con indicarne i sommi-capi soltanto, e tacerne, mentre sian facili e pronte, le prove. Già dal mio Opuscolo intitolato *Ocia Perelliana* (82) dietro alle indicazioni del Frisi e alle proprie ho trascritte e pubblicate in diversi tempi parecchie Proposizioni di Perelli, uniformandomi al di lui gusto nel dimostrarle. Giova citare tra l'altre la vera indole della *Logi-*

stica (83) od *Emiperbola* (84), onde ricavasi la spiegazione d'un *paradosso* di Boscovich (85), la specie di *Lemniscata* non avvertita come terza projezione ortografica del perimetro della *vela* celebre del Viviani (86), l'*Ipociloide* non ravvisata dal Radicati (87), le singolari prerogative d'un'elegantissima varietà delle *Spiriche* (88), lo scompartimento o riunione di due o più movimenti *rotatorj* simile a quella de'*progressivi* (89), la vera curva in cui si piegano gli archi del ponte di Firenze disegnato dall'Ammannati (90), e nella soggetta materia la *spirale iperbolica* projezion stereografica della *cilindrica* (91), come stereografia della *conica* l'*elice* sempre analoga all'Apolloniana Iperbola referita agli *asintoti*, ed icnografia la *spirale* aritmetica o Archimedéa, che dovrebb'essere per avventura, in cambio d'un complesso *discontinuo* d'archi circolari a più centri, la *voluta* grande del Capitello Jonico insieme coll'altre piccole imitanti i *viticcj* de'vegetabili, le quali adornano i Corintj e Compositi nell'Architettura Greco-Romana (92). Intendo parlare d'*elici coniche* e *cilindriche* regolari, in cui cioè si verifichi in genere uniformità o *equabilità* di moto nel generarle sì circolare che rettilineo, o si combinino i due movimenti sempre *accelerati* o *ritardati* insieme colla medesima legge; il che non s'avvererebbe se l'*elici* sopraccennate, per esempio, prendesser norma dalla geometrica o *conchiliforme* di Wren (93), che per icnografia n'avrebbe una simil di nome altrimenti detta Torricelliana (94), che piacque poi di chiamare *Spiral logaritmica*, ed Halley mostrò (95) essere ancora la projezion stereografica sul piano dell'Equatore della *Loxodromìa* nautica sopra la sfera, traguardandola dal polo opposto. Nè importa, facendo parola di quelle Coclee, distinguere se sian *monostrofe*, *distrofe*, *tristrofe*, *tetrastrofe*, *pentastrofe*, ec. imperocchè, attesa la *similarità* loro, un sol giro o porzione di giro, senz'anche scioglierle in *lineole* o *trapezioli* o *prismetti*, conduce alle dimensioni intere che vogliansi, o a sembianze del *Canone* Guldiniano, per vaghezza d'analogìa

qualche volta velate sott'altro aspetto o larvate, come avverrebbe di chi dicesse esser il contorno della Cicloide *primaria* alla base nella ragione stessa dell'area d'un quadrato a quella del suo circolo iscritto.

SEZIONE I

Degli Elementi o Indivisibili delle Coclee.

Son questi l'*Eliche*, ovvero *spirali cilindriche*, delle quali, oltre ad essere le più brevi o *minime* di lunghezza tra due punti estremi segnati sulla superficie del Cilindro, verificansi i seguenti principali attributi.

1.° Ciascheduna di loro è una vera *Loxodromia* sul Cilindro, analoga alla *sferica* di Nunez (96), o recentissima *sferoidale*, ed in piano alla *spiral logaritmica*. Oltre di ciò dessa ha per projezione ortografica sul rettangolo, che passa per l'asse del suo Cilindro, la curva anguiforme de'*seni*, cioè il contorno dell'*Ellissi*, od *Ungula espansa*, ossia la *compagna della Cicloide* nella sua integrità [non come piacque di mutilarla a Montucla (97)], e questa *comune*, *contratta*, o *protratta* secondochè l'angolo della *spirale* colla periferìa della base sia semiretto, minore, o maggiore. Dunque l'*Elica* prenominata è una linea, che non solo si può tracciare anche sulla superficie d'un Cono retto a base di *spirale iperbolica*, ma di più sopra quella d'altro Cilindro retto a base d'*Ungula espansa*, che son due casi tra innumerevoli rimanenti di superficie men semplici.

2.° Cresce e si fa più stretto il rapporto colla Cicloide *primaria e secondarie* aggiungendo che mentre le tangenti dell'Ungula o dell'Ellissi incontrano il pian della base segnandovi una retta infinita due volte calcata, cioè diretta e retrograda, quelle per il contrario d'ogni *Elica* segnano nel piano del cerchio, base del loro Cilindro, la *spirale evoluta* del circolo, o comune o allungata o scorciata, (di cui,

perchè diversissima dalla *Lumaca* Robervalliana (98), Varignon e Diderot specialmente (99) rilevarono le particolarità più distinte), come avviene nei medesimi casi degl' incontri delle tangenti della Cicloide e Circolo-genitore, a seconda di ciò che avanti di tutti discoperse in Italia il Viviani (100). Queste relazioni patenti tra la *Cicloide* e la *Coclea* fecero forse equivocare Fabroni allorchè rendendo di ragion pubblica ed *illustrando* alcune *lettere inedite d' Uomini illustri* prese l' una per l' altra (101); mancamento di maggior conto di quello del Traduttore Italiano della *Storia Ecclesiastica* di Racine, il quale parlando di Pascal, deluso dal nome Francese *roulette*, convertì la *Ciclode* in troclea o *girella* (102).

3.° I *fili* del *verme* d' una *Coclea* (come sarebbero quei del guscio spirale di *Bernardo-l'-eremita* e della *Conchiglia-vite* ossia *Turbo duplicatus* del *Systema Naturae* di Linnéo), a proporzione che restano più o meno distanti dall' asse del loro Cilindro, sono *spirali dissimili*, perchè diversamente inclinate rispetto al pian della base. Difatti se s' inclinasse il Cilindro sull' orizzonte, i punti più bassi degli archi *idrofori* di ciascun *filo* del *verme* verrebbero ad esser disposti non sopra una retta orizzontale, ma piuttosto sopr' una curva. Quindi è che la *Vite* non può nè dee dai Meccanici considerarsi come profilo d' un solo piano inclinato, ma più presto come l' unione d' innumerevoli profili di piani differentemente declivi. Se una *Coclea* suppongasi traforata da una retta, la quale si parta dall' asse del suo Cilindro e gli sia perpendicolare, le inclinazioni dei *fili* scemano sempre quanto più si discostan dall' asse medesimo; di modo che i due limiti estremi, quando la *Coclea* fosse *piena*, o si stringesse sull' asse, e la base del Cilindro diventasse infinita, sarebbero l' angolo retto ed il nullo. La legge, che unisce insieme le varie inclinazioni dei *fili*, si è che le *tangenti* dei predetti diversi angoli d' inclinazione stanno tra loro in ragion *reciproca* delle distanze dall' asse, o come appunto *graficamente* dimostra la I.^{ma} Figura, postochè ad una data distanza

BC dall' asse (o sua proporzionale) corrisponda l'angolo d'inclinazione ACB; dalla qual Figura o *Scala*, indefinita dalla parte di D, e segnata in guisa che AB denoti la distanza o *raggio* dove il cammino di *rotazione* agguaglisi al *progressivo*, si ricavano ancora gli angoli *complementari* dei *fili* coi lati del Cilindro, cui danno regola le *cotangenti* dei primi e respettive *tangenti* degli ultimi in ragion *diretta* delle distanze. Di quì sorge un'altra analogia vistosissima colla *spirale iperbolica*, i cui angoli al centro o *foco*, formati dai raggi *polari* colla paralella all'*asintoto*, son parimente in ragione *inversa* dei raggi stessi o distanze centrali (103). Una cognazione men ovvia affacciasi ancora colla *catenaria* o *funicularia* semplice o volgata, nella quale si sa che le *tangenti* segnate sulla medesima *scala*, correspettive alle inclinazioni degli elementi di quella linea *trascendente* sopra la base (e viceversa le *cotangenti*) riesconvi *direttamente* proporzionali alle distanze contate sugli archi di quella curva, dall' imo suo punto venendo verso del sommo (104).

4.° Malgrado che tutte quell'*Elici* innumerabili e variamente inclinate non sian *paralelle* tra loro, perchè poste in diversi piani considerandone eziandio gli elementi infilati da due medesime rette normali all'asse del loro Cilindro, sono contuttociò *equidistanti*, e *perpendicolari* ciascuna alle frapposte rette suddivisate. *Paralellismo*, *equidistanza*, *normalità* duplice delle interposte rette non istanno perciò sempre insieme, nè costituiscono una perfetta ed universale geometrica *sinonimia*. Passando difatti dalla generalità delle vere *paralelle*, che nelle linee di curvatura *scempia*, oltre delle rette illustrate da Legendre (105) e delle concentriche periferie circolari, prendon origine dall'*evoluzione* d'una medesima curva, come avvisò Leibnitz il primo (106), seguitato da Gio: Bernoulli (107) e Varignon (108), ed in ultimo da Cagnazzi (109) e Lottèri (110), a ragionar sulle linee di *doppia* curvatura, e generalizzando la dottrina Leibnitziana per

mezzo della bella teoria delle infinite *Evolute* data da Monge nel M.DCC.LXXI (111), d'onde nascono le superficie *delle tangenti* o così dette *sviluppabili*, s'incontra subito il caso di linee *equidistanti* ad un tempo e *non paralelle* .

5.° Le *spirali cilindriche* semiortogonie (Num.° 3.°), in cui cioè il viaggio *rotatorio* del punto, che le descriva, precisamente pareggi il cammin *progressivo*, sviluppate che sieno, come le curve in piano, generano egualmente che la sviluppata circonferenza della base del Cilindro, sulla superficie del quale son disegnate, la stessa *evoluta del circolo* . Quelle stesse *spirali* (a forma del Num.° 1.°) appellano all' *ungula cilindrica* parimente semiretta, cioè alla *sferocilindrica primaria* di Roberval (112) o *circolo* così detto *cilindrico*, da cui deriva la *spirale sferica* Vivianéa (113); cosicchè le rammentate tre curve di *doppia* curvatura, mediante il contorno dell' *ungula* di curvatura *semplice*, sono in tale strettissima corrispondenza tra loro, non meno che le *secondarie* delle *specie* prenominate, che somministrano la vera chiave per risolvere colla massima semplicità geometrica ed evidenza tutti i Problemi più ardui concernenti il ritrovamento delle porzioni *quadrabili* di superficie sopra una sfera; chiave, di cui, se v'è luogo a criticamente congetturarlo, erasi forse servito Perelli (114) .

6.° Dipende dalla *similarità* dell' *elica* del Cilindro la dimostrazione [non soluzione, come scriveva Fabroni (115)] del Teorema insigne lasciatoci senza prova da Gemino (116), e vale a dire che da un punto qualunque condotte all' *elica* stessa due rette d'egual lunghezza fanno sempre colla medesima angoli eguali, come accade nella linea retta e nel circolo, altre due *similari* . E difatto, se il punto si prenda nella retta normale all' asse, dentro o fuor del Cilindro, su cui è la *spirale*, stando quella ad angolo retto su questa, e pigliandone pari porzioni dell' ultima a destra e sinistra, si vede chiaro che rivoltando un Triangolo sovra l'altro, come ho suggerito il primo in proposito dei Triangoli sferici (117),

perfettamente combacianti. Ora la medesima coincidenza e per conseguente le stesse attribuzioni de' Triangoli isosceli o equicruri si verifican parimente tenendo ferma la *perpendicolarità* della retta intermedia, e supponendola più o meno allungata o abbreviata nel rivolgersi della Figura per una completa revoluzione.

7.° Ha un giro intero della *spirale cilindrica* il suo *centro di gravità* ossia *delle medie distanze* nel punto, che biseca la porzione dell'asse del suo retto Cilindro, la quale determina il viaggio *progressivo* dall'imo al sommo, e corrisponde all'altezza del medesimo giro. Il *centro di gravità* d'una parte d'*elica* minore del giro intero è poi collocato nel punto medio dell'altezza, normale alla base del Cilindro, la quale si parta dal *centro di gravità* del correspettivo arco di circolo, su cui riposa. Manifestissimo è ciò in virtù della *similarità* della curva; nè può tampoco arrecare veruna difficoltà la determinazione del *centro di gravità* d'un corso d'*elice* più che *monostrofa*, conoscendosi ormai i *centri* de' giri interi e delle lor parti, non meno che le relazioni delle lunghezze di queste parti col tutto.

8.° Nella terna delle *similari* manca di *curvatura* la sola *retta*, e la *curvatura* di tutte le *linee*, che giacciono in piano, misurasi dai Geometri mediante quella della seconda *similare*, o sivvero della circonferenza del *circolo osculatore*. Non sarebb'egli perciò convenevole misurare altresì le *curvature* delle *linee* non giacenti nel medesimo piano per mezzo dei *contatti* di vario *grado* dei diversi piani *osculanti* ed *elici cilindriche osculatrici* di questa o quella inclinazione e apertura (118), essendo l'ultime le semplicissime di tutte le curve di cotal genere, e tra le immense famiglie di queste l'uniche *similari*?

SE-

SEZIONE II

Delle Armille o Zone Cocleari o a Lumaca (119).

Hanno tre differenti maniere d'essere siffatte *Armille*, o fasce piegate e contorte che dir si vogliano, l'*ordito* delle quali è composto d'*elici* cilindriche, e la *trama* o ripieno di linee rette d'egual lunghezza. Difatti 1.° o son nastri acconciamente avvolti sulla superficie convessa d'un Cilindro retto, *accartocciati* tai quali sarebbero intorno il suo maschio, anima, o forma le laminette o liste d'acciaro, onde si fabbricano canne da schioppi nelle officine di Spagna; 2.° o sono zone *spiralmente* condotte sul modello dell'*Escalier* di Pascal, cioè in rassomiglianza all'andamento o *sdrajo* d'una *rampa* continua *non cordonata* e senza *gradini*, o volta o piano inclinato ritorto *a chiocciola*, la cui pianta sia o una circolare armilla o un circolo intero, come per esempio la scala *a lumaca* (tranne i gradini) della Farnesina rurale o palazzo di Capraròla nei dintorni di Ronciglione o di Castro, l'altra del palazzo Barberini nella piazza Grimana di Roma, e quella del palazzo Cavalieri al Quirinale ossia Monte Cavallo; 3.° o finalmente sono corone *a sdrucciolo* più o meno declivi in foggia di zone o corolle coniche, ma stirate di modo da collocarsi in linea *spirale* lungo una retta, fuso, asse, ec., o come dicesi *a pozzo* attorno il vacuo conformato a cilindro.

Rispetto all'ultime, la dimensione della cui superficie immantinente apre il campo a rintracciar la misura di quelle, che circoscrivono i solidi *cocleari*, non diversamente dall'area degli anelli *conici* conducenti ad assegnare la superficie di tutti i corpi *rotondi*, mi riservo a parlarne nella Sezione che segue. Ed in proposito delle prime, che convengono appieno cogli *indivisibili curvi* introdotti da Torricelli, e copiati dipoi da Pascal (120), la misura dell'aree de'quali è

conseguenza immediata di *Triangoli cilindrici* in generale, eguali sempre e simili a un tempo (e come ho già detto, se contornati dall'*elica*, rettilinei), che sovrapposti coincidono senza niuna diversità dalla Proposizione XXV del Libro I degli *Elementi* d'Euclide, gioverà d'aggiunger soltanto che i *Triangoli conici* insistenti sopra due simili archi, superiore e inferiore, d'un'*armilla* conica retta, compresi tra due lati del Cono, ed aventi per terzo lato due archi simili di simili curve coniche, i cui piani perciò sian paralelli tra loro, o sivvero egualmente inclinati rispetto a quei delle basi, non appresentano *zone* come sul Cilindro tessute di rette eguali, ma pel contrario decrescenti sempre dal basso all'alto, non altrimenti che scemano in proporzione scambievole gli archi conici e circolari, e scemano l'aree triangolari, che stan come quelle dei loro *arbèli* icnografici (121).

Restano dunque unicamente le seconde delle tre specie d'*armille* per argomento di questa parte del mio discorso, cioè quelle appunto conformate in guisa di *montata* andante di *scala elicoide*, di cui fa menzione recente anco il *Giornal Politecnico* (122), e sono o *chiuse*, perchè senza vuoto interno nè solido appoggio centrale, ch'io chiamo *circoli cocleari*, od *aperte*, perchè *a pozzo* o nucleo concentrico che lo riempia, rapporto alle quali conservando l'analogia nominale non sarà improprio appellarle *armille cocleari*, siccom' è uso anco invalso presso il comune degli Architetti d'individuar qualche volta le *rette* col titolo d'*Archipiani* (123). Essendo porzioni l'ultime delle prime, le superficie loro misuransi scambievolmente, come avviene dei circoli ed armille ordinarie, nè fa di mestieri perciò di ricorrere a differenti principj.

PROPOSIZIONE FONDAMENTALE.

La superficie, concava sopra, e sotto convessa, d'un *circolo cocleare* di qualunque raggio stà nel tutto e nelle

parti all'area intera e porzioni omologhe del *circolo piano*, sua pianta o projezione ortografica, come la superficie del *complemento* o quadrilineo d'un'iperbole equilatera Apolloniana referita al suo asse secondario sta all'area e porzioni corrispondenti del sottoposto triangolo equicrure-rettangolo-asintotale.

Tutte le iperbole equilatere sono *simili;* laonde di qualunque grandezza si scelga una infra loro, la relazione dei due *spazj* indicati riman sempre l'istessa. Oltrediciò attesa la *similarità* di composizione d'ogni *spicchio* o settore contato dall'asse o *centro* del *circolo cocleare*, e la *similarità* di ciascuna altresì delle parti d'un'*armilla* o zona *cocleare*, il rapporto cercato, che valga per una porzione (o commensurabile o incommensurabile rispetto all'intero) del giro totale, varrà egualmente per questo, e a vicenda. Or supponendo che l'*elici* sieno fuor d'ogni *limite* assegnabile una all'altra vicine, e si decomponga così il *circolo cocleare* o suo settore in *zonule* intere o parziali concentriche, vien ad essere ognuno di questi elementi superficiarj eguale al rettangolo dell'*elice* o sua porzione nell'elemento del raggio o distanza dall'asse o centro (*Sez.^e I.^ma N.^o* 4), e l'elemento correspettivo della sua *icnografia* eguale al rettangolo del sottoposto arco di circolo nell'istesso elemento del raggio, cioè come l'*elice* all' *arco* suddetto. Ma l'*Elici* di giro intero o parte di giro (*Sez.^e cit.^a N.^o* 3) stanno alle *Circonferenze* sottoposte o loro porzioni *icnografiche* come AC a BC, AM a MB, ec. della 1.^ma figura. Dunque ripetendola come *scala* e colle medesime lettere e *modulo* AB e spartimento nella 2.^da, e d'altronde sapendosi che nell'*Iperbola* equilatera ogni ordinata CE, MP, ec. normale all'asse secondario o *conjugato* BD s'agguaglia ad AC, AM, ec., come CF, MT, ec. tagliate dall'*asintoto* semiortogonale BG pareggiano respettivamente BC, BM, ec., si conclude che la *somma* dei primi elementi stia a quella de'secondi nella proporzionalità accennata dall'enunciato.

COROLLARIO I

Supposta perciò la *quadratura* del *Circolo piano* e delle sue parti, dipende la dimensione *assoluta* dell'area del *Circolo cocleare* e sue porzioni omologhe dalla *quadratura* dell' *Iperbola* d'Apollonio, e vale a dire dai *logaritmi*, o piuttosto dalla rettificazione della *Parabola* ordinaria, o sivvero della *Spirale* aritmetica (124), non diversamente dal modo di costruire la *Catenaria* (*Sez.*ª *I.*ª *l. c.*) (125), e di descriver col mezzo della teoria di Wright e Percks (126) ossia delle *latitudini crescenti* o *somme delle secanti* le *Carte ridotte* o *loxodromiche* (ivi N.° 1) per la determinazione del lato *mecodinamico* ad uso della Marina: nuova e riguardevole affinità tra le nominate Curve e la Coclea.

II

La misura poi *relativa* o *compianazione* del *Circolo cocleare* e di lui porzioni si conseguisce mediante la sola dottrina dei *Logaritmi*; di tal maniera che se sulla medesima *scala* o *modulo* sia BH il *raggio* estremo del *Circolo cocleare* e sua *Pianta*, ed assegnisi il Quadrato eguale al doppio del *Quadrilineo* ABHI, sarà il lato di quel Quadrato eguale al *raggio* di quel *Circolo piano*, che agguagli il *Circolo cocleare*. Si dica l'istesso dei *settori* o altre parti respettivamente *simili* de' due *Circoli*; e riguardo alla specialità delle armille omologhe o loro porzioni *simili*, la riduzione d'una *cocleare*, per esempio, della larghezza LM, ad una circolare *eguale* (o per gli *Elementi* ad un Circolo *pieno*) nasce dall'assegnar due Quadrati, eguali ciascuno al doppio de' Quadrilinei ABMP, ABLN, i lati de' quali saranno i *raggi* de' circoli *piani* concentrici, che racchiudono l'*armilla* cercata, la lor differenza ne darà la larghezza, ed il lato del Quadrato d'area eguale alla differenza degli altri due somministrerebbe il *raggio* dell'egual Circolo *intero*.

III

Mentre lo spazio triangolare BHK fa vedere palpabilmente con qual proporzione vadano a grado crescendo l'aree dei Circoli *icnografici*, e lo spazio iperbolico ABHI rappresenta il progredimento di quelle dei Circoli *cocleari*, cominciando da AB ossia da B centro comune l'uno e l'altro procedere, manifestissimo ancora si è che le differenze di questi rapporti, comunque crescendo *aritmeticamente* i raggi sempre diminuiscano, pur tuttavia accumulandosi abbian per *limite* una differenza totale *infinita*; che tal è appunto lo spazio intero *asintotale* iperbolico. Ma questo spazio AIGKB richiama a quella specie singolar d'*Infinito*, che appellasi *logaritmico* (inferiore di grado a paragone dell'*aritmetico* stando ai termini della controversia famosa dei *più che Infiniti*); laonde i due *limiti* di relazione sono 1.° all'origine o centro l'Infinito *assoluto*, che passa tra la retta AB ed il suo punto estremo B; 2.° l'eguaglianza o quasi-eguaglianza quando arrivassero le due grandezze ad ingolfarsi nell'Infinito. E quel primo rapporto d'una linea finita ad un punto farebbe rivivere il *paradosso*, che si legge nei *Dialoghi* di Galileo, e che non appropriasi solamente all'orlo d'una *scodella* scavata nell'emisfero, ma si verifica di tutti gli orli o tagli consimili de'*ciati* o scodelle scavate nei Conoidi o Sferoidi, come avvertì *Torricelli* (127).

IV

Per dividere mediante una o più *Elici* concentriche in qualunque *date* ragioni, o in parti *eguali*, o comunque *proporzionali* il *Circolo cocleare* (che pel digià detto può esser *Volta* ad un tempo e *Montata* di scala) o un di lui Settore, basterebbe saper tagliare nelle ragioni medesime, o in parti *simili* il precitato *Quadrilineo* Iperbolico. Nè per avventura

s' incontrerebbe difficoltà ognivoltachè passar si volesse dal *Circolo cocleare* monostrofo a più d' un giro o rivoluzione di *Coclea*; conciossiachè i *multipli* respettivi della trovata misura insiem colla giunta delle parti *aliquote* od *aliquante* della medesima soddisfarebbero tosto a siffatto Quesito.

V

In cambio di determinare il confronto d' un Settor di *Circolo cocleare* con quello della sua *Icnografia*, non meno che la comparazione delle lor parti omologhe, potrebbe fors' esser gradevole paragonarlo all' area del Rettangolo (che per comodo dirò *verticale* in contrapposto alla *pianta*) formato dal raggio, o sua parte, come *base*, e dalla porzione corrispondente dell' asse del Cilindro, che ne costituisce l' *altezza*. Ma le aree di questi rettangoli disegnati nella 2.^{da} figura tengono la proporzione istessa dei raggi, e lor parti, ed in quei tali punti, ne' quali il movimento *rotatorio* pareggi il *progressivo* lungo dell' asse predetto, l' aree dei divisati rettangoli son doppie de' respettivi settori del *Circolo piano*. Se dunque dal vertice A della già descritta equilatera Iperbola conducasi la tangente indefinita AR, l' area del *Circolo cocleare*, o suo settore, sarà a quella del rettangolo corrispondente come, per esempio nella distanza dal centro BQ, l' area del solito *Quadrilineo* iperbolico ABQO a quella del sottoposto rettangolo ABQS; ragione, che non varia perciò il suo carattere *trascendente*, ed è collegata coi digià fissati principj e rilievi.

VI

Posto che il *Prismale* Grandiano (*Fig.*^{a} 3) (128) sia retto, e retto l' angolo MΩY, affaccia allora nel suo primo elemento contiguo al taglio supremo, e lungo quanto il medesimo, l' immagine schietta dell' elemento-settore d' un *Circolo*

cocleare . Imperciocchè comparando il detto elemento, segnato colle medesime lettere, al settor *cocleare* della Fig.ª 2.da, non ha dubbio che questi due non siano esattamente gl' istessi. Sono difatti tessuti per un verso, come gli elementi delle superficie di tutti i *Corps gauches*, di rette B*b*, C*c*, L*l*, M*m*, ec. eguali ad una ad una e similmente disposte; nè lo sarebbero meno tutte l' altre innumerevoli, che tagliassero sempre proporzionalmente le *direttrici* BM, *bm*, e quelle eziandio per il verso opposto, che incrociasser le prime congiungendo i punti di proporzional divisione di B*b*, C*c*, L*l*, M*m*, ec. nominate di sopra . Ma appunto perchè queste ultime rette sono nella 2.da Figura elementi dell' *Elici* ossia delle loro tangenti, dopo di MB*bm* il *Circolo cocleare* non combina più ne' suoi seguenti settori col rimanente della Superficie (*Plain gauche*) del *Prismale* MΩYXB, che col piano-tangente MΩY staccasi dal Cilindro. Egli è però qui da notarsi che anco tagliando l' elemento-settore MB*bm* come il *Prismale* trasversalmente per via di piani secanti s' ingenererebbero sulla di lui superficie elementi di Parabole *convesse* e *concave* e d' Iperbole Apolloniane . Nè sarà discaro sapere che per quanto sia curva la superficie MBXY del *Prismale*, pur tuttavolta il di lui volume agguaglisi alla metà di quello del *Prisma* triangolare, da cui è stato reciso; poichè gli elementi *prismatici* di prim' ordine, nei quali risolverebbesi mediante i triangoli LΠΓ, CΘΣ, ec., paralelli e non simili alla base MΩY, avendo l' altezza comune BX, procedono come le distanze XΠ, XΘ, ec., e perciò la lor *somma* equivale all' area d' un triangolo mentre l' altra del *Prisma* verrebbe ad essere rappresentata dall' area del paralellogrammo, suo doppio .

VII

D' un intero *Circolo cocleare* (supposto omogeneo), o *zona* intera, apertamente si vede essere collocato il *centro di gravità* nel punto di mezzo della porzione dell' asse del

Cilindro distesa dall' imo punto al supremo della completa rivoluzione *spirale*. Manifestissima cosa ella è parimente che il *centro di gravità* d' un *Settor cocleare* prende regola da quello del Quadrilineo *iperbolico* della Figura 2.[da], cosicchè se il *raggio* di questo Settore fosse BL sul citato modulo o *scala* quel *centro* sarebbe a tanta distanza dall' asse AB del Cilindro quant' è la distanza nota del *centro di gravità* del *Quadrilineo* o area ABLN dall' asse medesimo, e perciò nel *raggio* medio del Settore tagliata questa distanza dall' asse, il suo termine estremo vi determinerebbe quel punto o *centro*, che si ricerca. Chiedendosi poi il *centro di gravità* d' una sola parte di *zona* o settore bisogna notare sul modulo stesso i due *raggi* estremi, per esempio BQ, BM, tra i quali la *zona* è compresa; quindi assegnare il conosciuto *centro di gravità* del *Quadrilineo* parziario OQMP; e diportarsi nel resto come per l' intero Settore. Determinato il *centro di gravità* d' un sol *giro* e d' una parte quantunque di *giro*, non ha più veruna difficoltà determinarlo di due, tre, ec. *giri*, o interi, o colla giunta d'altra porzione di *giro*. Giova riflettere contuttociò che rispetto al *Circolo cocleare* e sue parti non ha luogo l' applicazione della Dottrina *centrobarica* delle Figure rotonde [*Amphismata* (129)] motivata da Pappo nella *Prefazione* al VII.° Libro, amplificata dopo Kepler nella *Stereometrìa* (130) dal Guldino (131), e dimostrata prima di tutti dal Cavalieri insieme e dal Roccha (132). Imperocchè stando ai termini di questa Teorica, anco renduta più generale, col mutarsi i centri o assi di rotazione, da Varignon sul principio del Secolo scorso (133), la superficie d'un *Circolo cocleare*, o d'un suo Settore (e l' istesso dicasi delle *zone*) generata, per esempio, (*Fig.*[a] 2.[da]) dal moto *rotatorio* e *progressivo* insieme della retta BL verrebbe ad esser eguale all' area del Rettangolo, che avesse per base la medesima retta, e per altezza quell' *Elice* sempre ad essa normale, che fosse descritta dal punto medio Δ, la quale in virtù della 1.[a] e 2.[da] Figura e dei Num.[i] 3.° e 4.° della 1.[ma] *Sezione* ha il saputo rapporto di AΔ a ΔB comparandola all' icnografica Periferia circolare

circolare del *raggio* BΔ; il che torna a dire eguale alla superficie convessa o concava d'un Cilindro retto, la cui base fosse il Circolo del *raggio* AΔ e l'altezza BΔ, o ad una parte di lei proporzionale al Settore, o sivvero eguale all'area d'un Circolo (o suo Settore) di *raggio* pari alla *media* proporzionale geometrica tra BΔ e 2AΔ, siccome abbiamo dagli *Elementi*. Ora, quanto ciò s'allontani dalla vera misura (che in questa ipotesi supporrebbe la sola *quadratura* del Cerchio) riguardo all'area del Circolo costa dalla *Proposizione* premessa, e rispetto alla Superficie cilindrica si farà chiaro dalla seguente. Frattanto sarà permesso dedurre come con tutta ragione secondando il titolo istesso dell'Opuscolo inedito del Torricelli concernente l'abuso, che della Teorìa degli Indivisibili o *atomica* potrebbe farsi nelle cose geometriche (134), non sarebbe scevro d'utilità compilare anco un breve Trattato, arricchito d'esempli scelti a proposito, intitolandolo *De Doctrina centrobaryca temere non usurpanda*.

Proposizione derivata.

Dato qualunque *Circolo cocleare* v'ha sempre (sul medesimo *modulo*) un *Emicilindroide Iperbolico*, la cui concava superficie rotonda non solamente è *analoga* e *proporzionale* in genere, come in altri *Emicilindroidi*, nelle parti e nel tutto alla superficie del primo, ma gli è ancora *eguale*, o, conforme con più chiara espressione i moderni Geometri dicono, *equivalente*.

Mercè l'ispezione della 4.ª Figura cesserà tosto la maraviglia dell'*analogìa* tra due Superficie, che al primo aspetto rassembrano tanto difformi, quanto sono difatti una rivolta in *elice*, l'altra in sembianza di *timpano* affusato e rotondo, o sivvero in foggia di *capitello*, o vaso di Callimaco, della colonna Corintia. Ed il vero, la superficie dell'*Emicilindroide*, generato dalla rivoluzion del perimetro del ramo d'Iperbola Apolloniana AO'I'G' intorno all'asse suo secondario o *conju-*

gato BD, può considerarsi ancor dessa come tessuta di linee rette indefinite, fuori di piano una l'altra, non paralelle tra loro, e collegate per mezzo di circolari Circonferenze, che o intere o nelle respettive porzioni ed elementi *simili* procedono colla medesima legge dell'*Elici*, le quali legano i raggi del *Circolo cocleare*. Imperciocchè tutti i Geometri sanno che cominciando da segnar sull'*Emicilindroide* quella linea retta, la quale sovrasta a un *asintoto* BF'T'K', e si confonde in pianta con esso, e gli è paralella e distante quanto importa il semiasse *conjugato* della Curva *generatrice*, se si taglino quindi per la medesima direzione archi *simili* sulle circonferenze de'Circoli, che hanno i lor raggi eguali alle *ordinate* BA, CE', LN', QO', MP', HI', ec., come chiaro apparisce dalla Figura, i punti estremi di detti archi vengono ad essere distribuiti o collocati sempre sopra una retta. Queste rette innumerevoli, disposte sulla superficie concava dell'*Emicilindroide*, e non mai situate nell'istesso piano, nè paralelle tra loro, potrebbero ancora disegnarsi per altro verso della superficie medesima andando a seconda dell'altr'*asintoto*; cosicchè in ogni *Emicilindroide* vi son sempre due *serie* d'infinite rette giacenti sulla di lui superficie, d'onde n'ha tratto il suo nome, armonizzate con identifica simetria, e due a due nello stesso piano e paralelle ai due *asintoti* e facienti un angolo all'*asintotico* eguale. Di qui è che mentre si ponga sulle punte d'un *tornio* B, D una massa corporea capace di ricevere e mantenere forma rotonda girandola e consumandola a poco a poco per via di ferro tagliente, ogni volta che il *taglio* sia situato e si tenga ben fermo in iscorcio o in direzione obliqua rispetto all'asse di rotazione BD, sotto qualunque angolo DBG', purchè il detto *taglio* conservi il paralellismo a BG', n'escirà sempre *tornito* un *Emicilindroide iperbolico*, concavo nel senso della *generatrice*, convesso in quello della rotondità procacciatagli in virtù dell'asse immobile di rotazione, che congiunge i due centri, su cui resta stabilmente *imperniato*. Così d'agevol maniera operan-

do venivano a fabbricarsi in addietro le *forme* metalliche (*moules*) delle *lenti* oggettive *iperboliche* di vetro o cristallo, quando cioè riputavansi da Descartes ed altri Fisici egregi acconce e valevoli a correggere l'*aberrazion di figura* nei Telescopj poco dopo del nascimento della Diottrica (135). E quel *Cilindroide* (giacchè vale del doppio l'istesso discorso che del suo mezzo) si fa più o meno aperto, meno o più concavo a proporzione che scemi o cresca l'obliquità del *taglio* per rapporto all'asse BD; di tal maniera che diventato nullo quest'angolo, il *Cilindroide* convertesi in *Cilindro retto*, che rimane intermedio ai due *tagli* simetrici opposti, perde la sua *concavità*, e la di lui superficie resta tessuta d'una *serie* sola di linee rette, ma tutte paralelle tra loro ed all'asse. Ora tornando alla considerazione delle *rette* eguali, che sono i lati dell'*Emicilindroide*, ognuno di questi in totalità e nelle parti finite ed elementari è proporzionale al *raggio* e sua omologa parte finita ed elementare, che si contasse sopra BD nel *Circolo cocleare*, e come in esso, gli archi od archetti *simili* (qui *circolari*, là *elicoidi* proporzionali) frapposti ai lati seguono la proporzione dei *raggi* delle circolari *Circonferenze*, cioè quella delle *normali-ordinate* del *Quadrilineo* Iperbolico, proporzionali *in genere* non *in ispecie* all'altre *ordinate* consimili d'un'Iperbola *equilatera*, che avesse il semiasse medesimo AB, conforme si sa dalla Teorìa delle *Coniche*. Dunque supposta la superficie dell'*Emicilindroide* divisa in *liste* finite od elementari, ciascuna di queste *liste*, o sua parte, è contesta per lungo e per largo come un *settore* o parte omologa del *Circolo cocleare*; ogni *zona* o parte di *zona* tra quelle *liste* è formata nella medesima guisa d'una *zona* o parte omologa di *zona* del *Circolo cocleare*; ed ognuna di dette *liste* nel tutto e nelle parti venendo ad essere di superficie eguale a quella tal *lista* d'*Emicilindroide*, che comprenda gli stessi archi *simili* circolari, e sia terminata dagli archi dell'Iperbola *generatrice* (perchè o dividendo nelle prime o nelle seconde *liste* la superficie dell'*Emicilindroide* costa del medesimo

numero di parti eguali o respettivamente proporzionali) restan concluse l'*analogìa* e *proporzionalità* in genere, ch'erano prima da dimostrarsi a' termini dell' enunciato. Se poi conservando, come sopra, il medesimo *modulo* o *scala* l'*Emicilindroide* nascesse dalla circonvoluzione di tale Iperbola, il cui semiasse *trasverso* essendo AB avesse per *semi-parametro* principale una retta di tanta lunghezza quantà occorresse perchè divisa in *estrema e media ragione* ossia *proporzione divina* contasse l'istessa AB come sua *parte maggiore*, la superficie del detto *Emicilindroide*, oltre all' *analogìa* più eminente e *proporzionalità* in specie, pareggerebbe dipiù nel tutto e nelle parti quella del *Circolo cocleare*, conforme restava a concludere. Conciossiachè tutte le normali alla Curva *generatrice* distese sino all'asse *secondario* BD, e quinci poste nella direzione delle *ordinate* terminerebbonsi a quella stessa *equilatera* Iperbola AENOPIG, ch'è la *compianatrice* del *Circolo cocleare* (Coroll.° II.° della *Proposizion* precedente), ed or la sarebbe dell' *Emicilindroide* Iperbolico, siccome ho con facilissima *sintesi* dimostrato in una corta *Appendice* a questo *Scritto* geometrico, onde provare i già citati *Teoremi Ugeniani* del M.DC.LVII e LVIII, prodotti a notizia del pubblico nel M.DC.LXXIII mancanti di prova (136) egualmente che gli altri sulla *Logistica* e sulle *Forze centrali* (137).

COROLLARIO I

D'ogni *lista* o *spicchio* tra due rette, o di lui porzione, concernente l'*Emicilindroide* essendo l'*equivalente* in superficie un altro *spicchio* dell' istesso Solido colle due medesime basi *ab*, *mn*, *cd*, *op*, ciò ha risparmiata l'investigazion delle altezze de' minimi *trapezioli abcd* di quelle *liste*, nei quali bisognava d'altronde risolverla secondo il metodo comunemente adottato anco dalla sublime *Analisi*, che a tal effetto si serve del doppio segno d'*integrazione*. Somministrerebbe poi quelle altezze minime, sebbene inutili all'uopo, la sola Fi-

gura senz'altro ragionamento o apparato, perchè sono appunto gli archetti *mo* ovvero *np*; e per le porzioni finite di queste *liste* gli archi finiti dell'Iperbola *generatrice* rappresentan le *somme* di tutte l'altezze degli elementi, in cui si sciogliessero.

Corollario II

Ricavasi altresì apertamente che il *centro di gravità* d'un *Circolo cocleare*, e sue porzioni, dipende dalla notizia di quello della Superficie d'un Solido di rivoluzione, qual è l'*Emicilindroide* Iperbolico, e delle sue omologhe parti. Parve nell'epoca della prima scoperta ai Matematici transalpini ammirabile che un Solido *spirale* s'agguagliasse a un *rotondo* (138). Or quantopiù Torricelli sarebbe cresciuto di fama se avesse potuto nell'età sua dimostrare che una Superficie girata in *Elice* e pel suo valore e per le proprietà *centrobariche* fosse la stessa cosa d'un'altra girata in *Cerchio*?

Corollario III

Anzi la Superficie d'un *Circolo cocleare* nel tutto e nelle parti, *zona* per *zona*, *settor* per *settore*, ec., riesce eguale eziandio a quella d'una metà di Sferoide o *Ellissoide* oblata o compressa, cioè dell'iscritta dentro un concentrico *Cilindroide* iperbolico, godente dell'istess'*asse trasverso* e dei due medesimi *vertici* principali, e coi *conjugati* talmente diversi che ne derivi la stessa Iperbola *compianatrice*. Fu questo sino dal M.DC.XCVIII il ritrovato perspicacissimo di Parent (139), la cui prova ho renduta ancora più semplice combinandola colla dottrina Ugeniana nella prenunciata *Appendice*; ed è da stimarsi tantopiù commendevole quel ritrovato geometrico quantochè desso contiene come caso particolarissimo ed unico l'eguaglianza di superficie del *Cilindro* circoscritto alla *Sfera* iscritta, quando cioè il *Cilindroide* si converta nel primo,

fattosi l'*asse conjugato* infinito, e l'*Ellissoide* nella seconda venendo a farsi eguali i due *assi*, e la *compianatrice* comune diventando allora una *retta* paralella all'*asse* di rotazione. In conseguenza di che con molto maggior ragione sulla tomba del Francese Geometra si sarebbe dovuto incidere quel *Cilindroide* speciale coll' *Ellissoide* iscrittavi, come dei Siracusani antichi raccontasi che sul monumento d'Archimede incidessero il *Cilindro* e la *Sfera*, e dei moderni Elvetici sul sepolcro eretto a perpetua memoria di Giacomo Bernoulli di Basilèa la *Spiral Logaritmica* coll'epigrafe enfaticamente presa dalla favola della Fenice — *Eadem mutata resurgo* — (140).

SEZIONE III

Delle Armille o Corone elico-coniche.

Mentre la *retta*, che già descrisse un *Circolo cocleare*, mantenuto l'istesso *modulo*, in cambio d'essere paralella alla *base* o normale all'*asse* del Cilindro, vi fosse stata sotto qualunque angolo e sempre egualmente inclinata in tutto il giro *uniforme* spirale, o come i Pratici dicono *a lavatojo*, sorgerebbe allora un *Cono cocleare*, o sua *corona* od *armilla*. Vediamo in qual modo possa misurarsene la Superficie, e se abbia relazione ancor essa con altra d'un Corpo geometrico tra i conosciuti, dietro all'esempio procuratoci dalla passata *Sezione*, in cui sortì rintracciarla nel *Cilindroide*; Solido più dovizioso del *Cono*, poichè, oltre a generarsi sulla superficie del primo per mezzo di piani secanti tutte le specie di *Curve* coniche, e le *Rette* disposte in angolo, vi si generan anco le *Paralelle*.

Proposizione unica.

Determinare la relazione tra la Superficie d'un *Cono cocleare* di qualunque lato ed inclinazione all'asse, non meno

che de' di lei *spicchj* o settori, *zone*, ed altrettali porzioni, e la Superficie intera e parti omologhe del *Cono retto* (sua *projezione* spuria in figura di *nappa* conica), che abbia l'istesso asse e lato sotto l'inclinazione medesima, il qual *Cono* verrebbe descritto se mancando il moto *progressivo* vi fosse stato sol luogo a quello di *rotazione*.

Atteso il solito movimento supposto *equabile* sì *rotatorio* che *progressivo* la composizione d'una *zona* concentrica e d'un *settore* è *similare* in tutte le parti o grandi o piccole di detta *zona*, e respettivamente *simile* alla tessitura di quella d'ogni altro *settore* nelle sue porzioni correlative. Basta adunque considerare uno *spicchio* di *Cono cocleare* contenuto tra lati, che si discostino menomamente uno dall'altro, e paragonarlo al sottoposto corrispondente nel *Cono retto*, ove per conseguenza i lati formino un angolo d'inassegnabile piccolezza. La superficie del primo è *per traverso* tessuta d'elementi o lineole di *Spirali* cilindriche, mentre l'altra è parimente tessuta d'archetti minimi *circolari*, che hanno tutti il centrale comune nel vertice o sommità dello *spicchio* o *settore*. Ma nel tempo che questi archetti son perpendicolari ai lati del *Cono retto*, non lo son già pel contrario le particelle d'*Elici* ai lati del *cocleare*. In ciò unicamente consiste, se pur meriti dirsi tale, la difficoltà dell'assunto. Affine di convertire la *trama* degli ultimi elementi *obliqui* in altra di lineette *normali* ai lati del *settor conico-cocleare*, come fa di mestieri per indagare il valore della superficie cercata, ho espresso il caso nella 5.ª Figura con quella maggior chiarezza, che comportano i *segni* o delineamenti di Prospettiva.

Sia dunque lo *spicchio* o *settore* ABDO di *Cono cocleare*; EF il viaggio *rotatorio*; GO = *go* = ec. = BA il *progressivo* contemporaneo; DO, *do*, ec., ed altre innumerevoli, le lineole *oblique* (rispetto al lato AO), interposte tra AO e BD, o le particelle delle *Spirali* cilindriche, le quali vanno a terminare nell'ultima *obliqua* BA, elemento dell'*asse* comune ai due Coni *retto* e *cocleare*, non men che ai Cilindri concen-

trici, su cui parimente riposano le dette *Spirali*. Manifestissimo essendo che DG, *dg*, ec., ed altri *simili* archetti o paralelle lineole son tutte perpendicolari al pian del romboide AOFH, se si conducano da' loro *piedi* G, *g*, ec., B le normali GC, *gc*, ec., BI al lato *generatore* AO (prolungandolo quant' occorra) e tirinsi le rette minime DC, *dc*, ec., saran queste, in virtù degli *Elementi*, perpendicolarmente disposte ciascuna sul lato AO, conforme aveasi in veduta, avvengachè collocate in piani diversi come nei *Prismali* (Coroll. VI della Prop.ne fond.le) o consimili. Ora egli è chiaro che siccome i triangoli ortogonj GCO, *gco*, ec., BIA hanno eguali le *ipotenuse*, ed eguali altresì gli angoli in O, *o*, ec., A per le paralelle, avranno anco i lati CG, *cg*, ec., IB, ed insieme CO, *co*, ec., AI eguali o *costanti*; e perciò l'area della *zona* o *zonula conica-cocleare*, o suo elemento o porzione, starà alla sottoposta *conica-retta* compresa tra i medesimi ed egualmente lunghi lati *o*O, *d*D, e *m*F, *n*E, o loro interi, porzioni, od elementi eguali (l'istesso dicasi dei *settori* omologhi e loro parti finite od elementari) come la *somma* delle *ipotenuse* DC, *dc*, ec. (che finiscono in BI) de' triangoli parimente rettangoli DGC, *dgc*, ec., aventi il lato eguale CG, *cg*, ec., a quella degli archetti DG, *dg*, ec., o sivvero EF, *mn*, ec. proporzionali ai lati HE, H*n*, ovvero BD, B*d* ec., e così non diversamente degli altri. Ciò torna a dire come la *somma loxodromica* delle *secanti* alla *somma* delle *tangenti* in una *scala di proporzione* segnata a foggia della 1.a o 2.da Figura, dove sopra BD, cominciando da B, stian le parti *proporzionali* ai lati *crescenti* del Cono contati dal *vertice* od *asse* ABK sul *modulo* della costante A*o*, o sivvero B*d*, H*m* porzione del *lato* del Cono, rispetto a cui si verifichi l'archetto di *rotazione gd* eguale a *gc* = BI, ossia l'angolo *cdg semiretto* (ved.si il Corol.° IV.°); il che richiama alla ragione dell'area solita d'un *Quadrilineo* d'Iperbola *equilatera* a quella del sottoposto *Triangolo isoscele-asintotale*, e sue omologhe parti.

COROL-

Corollario I

Il rapporto è adunque l'istesso tra la superficie del Cono formato *a chiocciola*, o delle sue parti, e quella della *projezione spuria ortogonale* sul Cono *retto*, o delle sue parti omologhe, come tra il Circolo *cocleare* e porzioni, ed il Circolo *piano* e respettive porzioni. Nè dee ciò far meraviglia; imperocchè ho in altro luogo mostrato (141), parlando nominatamente delle misure del *Cuore Ellittico* contemplato da Varignon (142) e dei *Solidi-Iperbolici-acuti* Torricelliani nati dalla circonvoluzione d'Iperbole *scalene* (143), che le *simili* superficie coniche-rette, tenendo conto delle minori *spessezze* tra siffatti *indivisibili curvi* di Corpi rotondi, possono surrogarsi a quelle dei Circoli basi loro, rispetto alle quali stanno in una *data* ragione, che quella si è del *lato* al *raggio* della lor base.

Corollario II

E bramandosi di sapere la relazione tra la superficie medesima del *Cono cocleare*, o sue parti, e quella della sua *vera* e natural *projezione*, o sue parti omologhe, cioè del *Circolo piano* e parti correspettive, basterebbe tagliare sul *modulo* stesso della Figura 5.^{ta} il lato, per esempio, HK dell'equicrure Triangolo rettangolo indefinito nel punto V di maniera che HK a HV fosse come HF a FK nella or ora citata 5.^{a} Figura, ossia nella ragione del *lato* al *raggio* della base del Cono di *projezione spuria*, ch'è la ragione appunto *sempre costante* [in sequela della scoperta di Parent (144) e Giovanni Bernoulli (145)] della superficie del Cono *retto* e porzioni a quella della base sua circolare e porzioni omologhe di *projezione* ortografica. Sostituito allora al Triangolo BHK indefinito l'altro ortogonio *scaleno* BHV, non meno che le sue parti, verrebbero queste e quello ad essere pel detto Circolo

il *termine* di paragone, o sivvero il *conseguente* dei ridetti Spazj *Iperbolici*.

COROLLARIO III

Quindi avviene che affine di convertire la superficie intera o parziaria d'un *Cono cocleare*, come sarebbero *corone* o *armille* o *settori* interi o troncati, in quella d'un *Circolo piano* alla medesima eguale, o delle respettive sue parti, bisogna prima tagliar sulla *scala* della 5.ª Fig.ª, per esempio, BQ rappresentante il *lato* del Cono, e poscia ridurre il Quadrilineo Iperbolico ABQΓ in un Rettangolo d'area eguale BQZY. Fatto ciò, la *media continua* geometrica proporzionale QΦ tra 2QZ eguale a QΔ e QU in forza del Coroll.° II.° scioglierebbe il Problema; perchè 2ABQ = 2QZ.BQ sta a 2BQU = QU.BQ come 2QZ a QU, ossia come il Quadrato della *media* a quello di QU, che rappresenta il *raggio* del *Circolo piano*.

COROLLARIO IV

Del rimanente il Corollario I.°, l'ultima parte del II.°, il IV.°, ed il VI.° (mutato il *Prismale* retto in obliquo) della *Proposizione fondamentale* si verifican anche nel caso delle *superficie* di Coni *cocleari*, e segnatamente le stesse *analogie* colle nominatevi Curve *trascendenti*, e la dipendenza medesima dall'Iperbola e Parabola Apolloniane. Non ha però luogo il Corollario III.°, che verte intorno all'Infinito *logaritmico*, se non quando si parla del *Cono cocleare* paragonato al *Cono retto*; poichè in vece dell'ultimo ponendo, come nel Corollario II.°, il *Circolo piano*, non si prende più regola dall'*asintoto* BKG, ma dalla retta BVX, la quale da lui e dall'Iperbola sempre maggiormente discostasi dopo passato il punto della *tangente* paralella a BX, facilissimo a rintracciarsi dietro la teorìa delle *Coniche*. E finalmente in proposito del Corollario VII.°, oltre della disapplicazione anche al

Cono, come al *Circolo cocleare*, dell' ordinaria Regola *centrobarica* per indagarne la dimension della Superficie, vale precisamente l' istessa dottrina conducente alla ricerca de' *Centri di gravità* del *Cono cocleare* intero e sue parti, giacchè quelli della Superficie del *Cono retto* e porzioni seguono la stessa legge e si determinano nella maniera medesima delle *Icnografie* circolari. Gioverà nullameno notare alcune leggieri disparità tra il *Cono* ed il *Circolo cocleare*. Primieramente la *projezione*, che per comodo dirò *verticale* (Coroll.° V.°), era nell' ultimo un *rettangolo*, ma diventa nel primo *romboidale* G*go*O, eguale d' area all' altro *rettangolo* G*gc*C. In secondo luogo, quantunque ancor qui i lati della *Nappa* conica sovrapposta sien due a due paralelli a quei della sottoposta (come BD a HE, AO a HF, ec. in infinito), tuttavia gli elementi DC, *dc*, ec. non appartengono più a *Spirali* cilindriche, ma piuttosto a Linee di *doppia curvatura* ancor esse, che si succedono a *stacchi* od *ammorsature* in guisa di Prismi circoscritti ed iscritti col metodo *d'esaustion* degli Antichi (146) attorno e dentro l' *Escalier* celebre di Pascal (147). Gli angoli CDO, *cdo*, ec. dei detti elementi con quei dell' *Elici* sul Cilindro procedono colla medesima legge come ODG, *odg*, ec., ovvero CDG, *cdg*, ec.; havvi un punto facilmente determinabile, in cui uno degli ultimi angoli si fa semiretto, cioè rispetto a cui si combina il viaggio *assoluto* di rotazione eguale al *progressivo* perpendicolare alla retta *generatrice* del Cono *elicoide*. Quest' angolo singolare corrisponde mirabilmente a quella parte del *lato generatore* contata dal *vertice*, che sia eguale al *raggio* AB della Fig.ª 1.ª considerato nel Num.° 3.° della I.ma *Sezione*: imperocchè dovendo esser $dg = gc = GC$ nel *Cono cocleare*, e $DG = GO$ nel *Circolo cocleare*, sarà il *raggio* nel primo caso al *raggio* nel secondo, cioè *bg* a *f*G come CG a GO, ovvero KF a FH, ossia *bg* a gB, d' onde nasce appunto $fG = gB = AB$ d' amendue le *Scale* della 1.ª e 2.ª Figura. Qualora poi il *lato* o la retta *generatrice* medesima viapiù s' avvicini al *paralellismo* rispetto all'

asse AK, diminuendosi a proporzione gli angoli BAI, *goc*, GOC, ec., *cdg*, CDG, ec., dessi divengono alfine nulli tostochè il *Cono cocleare* prende l'aspetto d'una *Fascia spirale*, e fa sì che confondendosi allora CD con DG, *cd* con *dg*, ec., e questi diventando tutti eguali infra loro, la misura della di lei *superficie* unicamente dipenda dalla *rettificazione* o *quadratura* del Circolo. Si conferma ciò riflettendo al sottoposto *Cono* HFEK, che si converte allora in *Cilindro*, ed al *lato* BD, il quale sul *modulo* o *scala* dee prendersi di lunghezza *infinita*, ed a motivo dell'*Infinito logaritmico* (Coroll.° III.° della *Prop.ne fond.le*) fa conoscere la *ragione d'egualità* tra l'area della *Fascia spirale* di qualunque larghezza, e la *circolar* sottoposta, entrambe descritte sulla superficie dell'istesso Cilindro.

COROLLARIO V

Ma qual sarà mai il rapporto di *superficie* tra il *Cono cocleare* ed un'altra di lui *Projezione*, che parrebbe appropriarsegli meglio, come della sua stessa *specie*, qual è la *varietà* già chiamata *Circolo cocleare*? Bisogna ripigliare la cosa un poco più da lontano. *Costante* si è la ragione di D*d* a D*k*, perchè uguale all'altra *invariabile* di FH a FK; non così quella di DC a DO, cioè del *lato* all'*ipotenusa* d'un Triangolo ortogonio, che ha CO secondo *lato* sempre *costante* per tutti i punti di AO. Non può dunque esser *costante* la ragion *composta* delle due sopraespresse, ch'è quella degli *elementi* (o *corone* intere) delle Superficie del *Cono* e *Circolo cocleari* DO*od*, DO*lk*; laonde viapiù s'avvalora il principio oramai stabilito da tutti i Geometri che le pochissime Superficie curve, le cui *projezioni* nella totalità e nelle parti abbiano sempre alle *projettate*, o viceversa, un rapporto *dato*, e segnatamente quello, diretto, od inverso, del *coseno* dell'angolo d'inclinazione al *seno-tutto*, sieno del genere delle sole *svolgibili* o *distendibili* in piano (*développables*), cioè

tessute di linee-rette che vicinissime incontrinsi, o sian paralelle; il che non si verifica nè del *Cono* nè del *Circolo cocleare* per le premesse. E le *distendibili* sopraddette e ad un tempo dotate della singolarità divisata non sono altro in sostanza se non che le distribuzioni degli *elementi* triangolari d'una Superficie *conica* più o meno allungati, e disposti coi loro *vertici* su d'un' *Elice cilindrica* tra le infinite considerate nella I.ª *Sezione*; di tal maniera che questa proprietà singolare sia originaria del *Cono retto*, e si trasfonda e comunichi unicamente al primo e natural suo *derivato*. Ed a quest' ultimo difatti, come al *Cono*, competerebbe quella stessa prerogativa, che quasi un secolo dopo parve nuova a Tinseau ed all' Estrattista della sua *Memoria* citata (148), di circoscriver cioè sulla di lui superficie degli *spazj* geometricamente *quadrabili* in guisa dei *Tabernacoli Camaldolensi*, o per dire anco meglio *Tende* o *Padiglioni* a finestre, motivati sotto il primo nome speciale dal *Monaco* Grandi (149). Come poi deggia esprimersi quel rapporto dimostrato *variabile*, agevolmente si conseguisce osservando che *mercè* del *Corollario* antecedente essendo precisamente della grandezza medesima le Iperbole equilatere *modulari* delle Fig.e 2.ª e 5.ª, ed essendo perciò il *semiasse* A*o* della seconda eguale ad AB della prima, se BQ rappresenti BD, e BΠ rappresenti D*f*, cioè si divida sempre nella ragione *data* di HF a FK, staranno tra loro i due *elementi* considerati, o piuttosto le *zonule* intere, di cui son parti *simili*, come la retta o *raggio tangenziale* AQ all'altro *raggio* AΠ, e vale a dire come le due *ordinate* all'Iperbola QΓ, ΠΘ, e le parti *finite* o gl'interi nella ragione dei Spazj *quadrilineari* iperbolici BQΓA, BΠΘA, sempre *variabile* l'una e l'altra variando *ascissa*.

Corollario VI

Insegnasi dal Coroll.° III.° la *compianazione* facile della Superficie d'un *Cono cocleare*, qualunque esso sia purchè de-

scritto con movimento *uniforme*, o sivvero la riduzione ad un *Circolo equivalente*, cioè d'area eguale; e l'istesso si dica delle respettive lor parti, come *corone*, *armille*, *settori* interi o troncati. Ma ricorrendo dietro alla traccia medesima del Corollario III.° della *Proposizione derivata* la Geometria non può suggerire anco il modo d'assegnare un *Emicilindroide* iperbolico o un *Emisferoide* ellittico *oblato*, la cui Superficie nel tutto e nelle parti a quella d'un *dato Cono cocleare* s'agguagli. Per ottener quest'intento necessario in primo luogo sarebbe che la Superficie del *Cono cocleare* stasse a quella dell'*Emicilindroide* affacciato dalla 4.ª Figura nella *ragione data* del *lato* del *Cono* al *raggio* della sua *base*, e vale a dire come (*Fig.ª 5.ª*) BQ a QU, BH a HV, ec. Se dunque le *ordinate* BA, ΠΘ, QΓ, HΛ, ec. dell'Iperbola *equilatera* si prolungassero in quella *data* ragione, proverrebbe allora un' altra Iperbola ma *scalena*, che sarebbe la *compianatrice* dell' *Emicilindroide* cercato; cosicchè l'Iperbola *generatrice* di questo dovrebb'avere [in virtù del Teorema noto di Barrow (150)] le sue *normali*, condotte dal di lei *perimetro* sino all'asse *secondario*, eguali a ciascuna delle già protratte *ordinate*.

SEZIONE IV

Della Superficie dei Solidi cocleari.

Tutte le *Superficie curve* delle *Coclee uniformi* risolvonsi in *corone* d'inassegnabilmente piccola altezza di Superficie di *Coni cocleari* parimente *uniformi*, come quelle dei *Corpi rotondi* in *corone* minime di Superficie di *Coni retti*. Si è dunque fatto nella *Sezione* precorsa il passo più grande per giungere adesso alla determinazione *sintetica* del valor della Superficie di qualunque *Coclea* generata dall'*equabile* rivoluzione *spirale* d'ogni Linea *algebrica* o *trascendente*. Spetta ora soltanto alla *Geometrìa delle Curve* rintracciare le *Quadratrici* di siffatte Superficie *elicoidi* com'ella adopera per quelle dei

Corpi rotondi, subitochè il principio, da cui derivarle, è segnatamente l'istesso, delle due *corone* cioè di relazione conosciuta tra loro. Egli è questo il pregio maggiore in proposito della presente ricerca, che non ammetterebbe ridursi ai medesimi termini semplici casochè in generale il movimento si fosse supposto *difforme* ed espresso da una *funzione variabile*; imperocchè non potrebbesi allora a meno di non isciogliere ogni *corona* in *trapezioli* distinti, tali che DO*od* della 5.ª Fig.ª e chiamar poscia in soccorso il *Calcolo sommatorio*. Sennonchè anco nei casi del moto *difforme* sopra una *Spirale cilindrica* variamente inclinata s'è assai guadagnato per la Teorìa universale, che ne dipende, colla notizia *geometrica* del rapporto di quel *trapeziolo* al conico EF*mn*, ed al *circolare icnografico* EF*is*, che son gli *elementi primi* delle respettive *corone*, e *secondi* delle *Superficie curve* e *piane*, alle quali separatamente appartengono.

L'argomento della *Sezione* attuale essendosi dunque *in genere* quasi appieno esaurito nella passata, gioverà solo additarne *in ispecie* l'applicazione ad alcuni *Esempj* particolari. Escludo da questi quella tal *Coclea*, che prenda origine dalla *rotazione* e *progressione* allo stesso tempo d'un *Paralellogrammo* rettangolo od obliquangolo. Imperciocchè nell'un caso e nell'altro le Superficie in un sol *giro* descritte (*interna* ed *esterna*) dai due *lati*, ch'io dirò *verticali*, son quelle d'un *Cilindro vuoto* ossia *Tubo cilindrico* d'eguale altezza (*Coroll.*° IV.° precedente verso la fine), e stanno tra loro come le distanze dall' *asse* comune; laddovecchè le descritte dai rimanenti due *lati* son della classe di quelle misurate nella II.ª e III.ª *Sezione*, essendo per avventura superficie eguali di *Coni* o *Circoli cocleari*. Quando il *Rettangolo* generator della *Coclea* fosse specialmente un *Quadrato*, la superficie *esterna* insiem coll'*interna* delle due *fasce spirali* agguaglierebbonsi alle due *armille circolari icnografiche*; e perciò ciascheduno dei due *Circoli cocleari* (o basi eguali della *Coclea*) starebbe alla *semi-somma* di quelle due Superficie come l'area

del *Quadrilineo* iperbolico (*Fig.ª 2.ª*) OQMP all'altra del *Trapezio* rettilineo VQMT (*Sez.ª II.ª Propos. fond.*) postochè le distanze dall'*asse* si rappresentassero da BQ, e BM sulla *scala di proporzione*. Quesiti simili ed anche più complicati risolverebbersi di leggieri dietro alle dottrine premesse, e quello nominatamente tra gli altri, in cui si cercasse per riguardo a una *Coclea* generata dalla revoluzion d'un *Rettangolo* la *ragione dei lati* rispetto ad una *data* distanza dall' *asse*, onde la *Superficie interna* od *esterna* riescisse eguale a quella della sua *base* o *Circolo cocleare*.

ESEMPIO I.°

Determinare il valore della Superficie d'una *Coclea* prodotta dal rivolgersi di qualunque *Triangolo rettilineo* spiralmente attorno a un Cilindro.

Sia ABC nella Fig.ª 6.ª il *Triangolo* generatore; CDEF il Cilindro d'indefinita lunghezza; G, I, H i tre punti d'incontro dei tre lati del Triangolo stesso, prolungati quanto bisogna, e dell'*asse* del detto Cilindro, su cui si rivolge; ON finalmente la distanza dall'*asse* di quel punto N, che riguardo alla *Coclea* supposta moverebbesi con una velocità *progressiva* eguale all'altra di *rotazione*.

Intendo qui sempre, come negli *Esempj* seguenti, di parlare d'un *giro* solo del *verme*, o sue parti, poichè non sarebbe che replica della misura medesima l'estensione della ricerca oltre a un *giro*, nelle ripetizioni dei quali *giri* i lati *generatori* corrispondenti si mantengono *paralelli*.

Or tutto è disposto nella precedente *Sezione* all'effetto di confrontare la Superficie di questa *Vite* triangolare, sì nell' intero che nelle parti, a quella d'un Solido *rotondo*, e nominatamente d'un *tronco annulare* di Cono *retto*. E quando (ammesse sempre secondo l'uso le *quadrature*) sia trovata la relazione delle Superficie dei Solidi *cocleari* a quelle dei Corpi *rotondi*, il Problema dee dirsi sciolto, perocchè gli

ultimi

ultimi hanno le lor Superficie determinate da regole classiche e formule generali.

Col *modulo* o *semiasse* proporzionale ON descrivasi dunque l'indefinita *equilatera* Iperbola Apolloniana OPQ unitamente al suo *asintoto*. Prendansi quinci sull'*asse* secondario le *ascisse* NR, NS respettivamente eguali a GA, GB, ed alzate le perpendicolari RTP, SVX, la Superficie della *corona* di Cono *elicoide* descritta da AB starà a quella della *corona* di Cono *retto* generata dalla medesima AB come l'area del *Quadrilineo* iperbolico PRSX alla corrispondente del rettilineo *Trapezio* TRSV; e così coll'istesso metodo *grafico* troverebbesi la ragione delle parti *proporzionali*, nè giova perciò replicarlo in appresso.

Parimente tagliate l'*ascisse* NR', NS' eguali ad IC, IB, ed elevatesi le *ordinate* dai loro estremi, il *Quadrilineo* iperbolico P'R'S'X' starà al rettilineo T'R'S'V' nella ragione della Superficie della *corona* di Cono *cocleare* generata da CB alla *corona* conica *retta* nata dalla circolare revoluzione della medesima linea.

Nè diverso è il discorso relativamente alla *corona* inversa prodotta dal moto *spirale* della rimanente retta AC, terzo lato dell'istesso Triangolo. Imperciocchè segnate del pari sull' *asse* conjugato le *ascisse* NR'', NS'' eguali a H'C, H'A, ed innalzate le respettive normali, la relazione che passa tra la *corona elicoide* prodotta da CA e la conica *retta*, ch'abbia il medesimo lato, è determinata da quella dell'aree dei due *Quadrilinei* P''R''S''X'', T''R''S''V'' *iperbolico* e *rettilineo*.

Che se piacesse piuttosto referir le misure di tutte tre le ridette *cocleari corone* coniche alle circolari *armille* icnografiche delle larghezze BM, BK, AL, ovvero MK (e vale a dire anco ai di loro eguali Circoli interi) satisfarebbesi a ciò con altre rette che si staccassero dal centro N dell'Iperbola, a senso del *Corollario* II.° della *Proposizione unica* della III.ª *Sezione*, la quale, oltre a contenere il fondamento di tutto, parimente provvede nel *Corollario* IV.° al caso che il

lato CA si posasse sul lato del Cilindro, o AB gli fosse paralello, mentre la *Sezione* II.ª risolve l'altro, in cui il lato CB si disponesse ad angolo retto sopra l'*asse* di *rotazione*.

ESEMPIO II.°

Venga adesso generata la *Coclea* da una *Semi-parabola* d'Apollonio ABC (o semi-segmento contato dal *vertice* principale), e si cerchi la dimensione della di lei *Superficie* senza la *base*.

Avvertasi che se più fossero i *giri*, e la *Semi-parabola* si prolungasse a piacere, i *perimetri*, ch'io direi verticali, della Curva *generatrice* non s'incontrerebber giammai, perchè tra loro *asintotici*.

Suppongo pel comodo della Figura fisso il *modulo* ON, non dando ansa a difficoltà nuova il cambiarlo come più piaccia.

Si sa che la *Superficie* dell'*Anello Parabolico* nata dalla circonvoluzione del *perimetro* APB della *Semi-parabola data* è uguale all'area del Rettangolo, le cui due dimensioni in generale siano il *perimetro* stesso e la circolare *circonferenza*, che abbia per *raggio* la perpendicolare condotta dal *centro di gravità* di detto *perimetro* sull'*asse* del *Cilindro*, intorno al quale s'avvolge la *Vite*.

Ciò presupposto, è sempre agevol cosa conoscere partitamente il rapporto *di superficie* tra un'intera *corona* minima *parabolica cocleare* e la *parabolica tonda*, o la *circolare armilla*, ch'è projezione *ortografica* d'ambedue. Condotta difatti la *tangente* PR della Parabola sino all'incontro coll'*asse*, e riportata sulla *Scala* solita *modulare* da N in T'''', quelle due *corone* staranno tra loro come OT'''' a T''''N, e la prima all'*armilla* ortografica, che ha il centro in S e l'inassegnabil larghezza PV, come OT'''' a PS, dalla cognizione de' quali *elementari* rapporti, per mezzo delle *Quadrature delle Curve* ricavasi tosto la relazione delle lor *somme*. Accaderebbe il medesimo adoperando le *tangenti* rovesce in proposito dell'

altro *semi-segmento* della Parabola, la *superficie* curva del di cui *Anello* sta a quella del primo nella ragione delle due distanze dello stesso *centro di gravità* del diretto ed inverso *perimetro* dal citato *asse* di rotazione. Se l'arco AB della *Parabola generatrice* facesse parte di UB, ed U fosse il principal *vertice* della Curva, sappiamo dai Teoremi *Ugeniani* (151) e da' più generali inediti del Lorenzini (152) che la *Superficie* dell'*Annulo Parabolico* ridurrebbesi allora a quella d'un Circolo, e perciò vi si ridurrebbe egualmente, previe le solite *Quadrature*, la *Superficie* dell'*Annulo cocleare*. Nè può a meno di non comparire meraviglioso che in tutte le possibili posizioni e diversità delle *Linee generatrici* la *Scala Iperbolica* si mantenga sempre *invariabile*, come la *Logistica* conducente alla costruzione *armonica* de' Tubi *fonici* nel *Gamma* musicale usitato (153), in virtù della quale *Scala* si venga a determinar sempre il rapporto delle *flussioni* per passar quindi a quel de' *fluenti*. Uno dei casi più semplici sarebbe per avventura quando l'*Anello* si convertisse in *Conoide parabolico*, di *superficie* eguale ad un Circolo facilmente determinabile (154), e la *Coclea*, in cambio d'essere *aperta*, si tenesse *stretta* sull' *asse*. Allora l' *equazione* diventa $y^2 = 2px$; la *sottangente* $2x = \frac{y^2}{p}$; la relazione tra i due elementi *annulari* delle Superficie, *cocleare* e *rotonda*, eguale a quella tra le semplicissime due *funzioni* $\sqrt{y^4 + r^2p^2}$ e y^2 (posto r il *raggio-modulo*); e la *Superficie* della *Coclea chiusa*, sì nel tutto che nelle parti, ha per *Quadratrice* la *Linea* di quarto grado, facilissima a costruirsi per punti, $y^4 - p^2x^2 + r^2p^2 = 0$, e vale a dire (contata y qualunque sulla Semi-parabola *genitrice*) agguagliasi a ϖ moltiplicato per l'*area* della medesima *Linea* referita all' *asse* delle y, dove ϖ rappresenta il *numero trascendente*, cognito e fisso, della circolare *Circonferenza*, che abbia 1 per *raggio*. Dalla *Quadratrice* o *Compianatrice* oror divisata si conseguisce eziandio la collocazione del *centro di gravità* o d' *equilibrio* della Superficie *paraboloido-cocleare* descritta, co-

me analoga all' area della medesima, e nel tutto e nelle parti proporzionale.

ESEMPIO III.

Chiedasi finalmente il valore della Superficie d'una *Coclea serrata*, la quale proceda dalla *rotazione* e *progressione* d'un Semicircolo A'B'H, il cui *raggio* C'B' eguaglisi al *modulo*, e dia perciò la *velocità massima rotatoria*, ch'è quella del punto B', eguale alla *progressiva uniforme* lungo dell' *asse*.

Trovata che sia la *Superficie cocleare* generata dal solo Quadrante superiore A'B'C', raddoppiandola s'ottiene l'intera generata dalla Semi-circonferenza, a motivo dell'eguaglianza e similitudine dei due Quadranti.

Tanto nell'ipotesi scelta della *Vite chiusa*, quanto nell' altra della *Vite aperta* che si scegliesse, anco prodotta dalla circonvoluzione *spirale* d'un *Circolo* intero, si verifica il caso della *tangente* infinita nel punto di congiunzione dei due Quadranti B', B'', B'''; ma tuttavia la dottrina proposta (come l'Infinito *logaritmico* venne a proposito nelle *Sezioni* anteriori) non abbandona il Geometra, che faccia uso della medesima solita *Scala*, il punto T'''' andando allora a distanza infinita dal centro N, e le due rette OT'''', T''''N facendosi eguali per dimostrare che la *fascia* minima *a chiocciola* s'uguaglia alla *sferica* od *annulare*, che in tutti quei punti si confonde colla *cilindrica*.

Avendo nominata per incidenza la *Coclea aperta* si torna a dire che le due distanze de' *centri di gravità* delle Semi-periferie circolari dall' *asse* del Cilindro stabiliscono la ragione, che passa tra la *Superficie annulare* esterna ed interna, ma che questa *regola* diventa fallace nella comparazion delle *cocleari*, come quella che già s'è dimostrata non sussistente parlando dei loro *elementi* (Coroll.° VIII.° Sez.e II.a e Coroll.° IV.° Sez.e III.a), che sono le minime *superficie* de' tronchi *conici cocleari*.

Condotta adesso da qualunquesiasi punto X del Quadrante *generatore* la tangente XZ, ed insiememente la normale XY sopra l'*asse*, ed il raggio C'X, e sapendosi esser C'Z a ZX come C'X a XY, cioè come C'X per l'archetto *minimo* a XY pel medesimo archetto, cioè come ϖ per C'B' per l'archetto a ϖ per XY per l'archetto, o alla *corona minima* della *Superficie emisferica*, l'elemento della *cocleare* corrispondente resulta eguale a ϖ pel raggio C'B' per l'archetto, e così la *cocleare emisferica* eguale a ϖ pel rettangolo del Quadrante A'XB' nel raggio C'B', laddove la *rotonda emisferica* eguagliasi a ϖ pel quadrato del raggio C'B' suddescritto.

Mentr'adunque la *Superficie* del Cilindro *cocleare* circoscritto conservasi eguale a quella del Cilindro circoscritto alla Sfera (Sez.e III.a Coroll.° IV.° in calce), all'incontro la *Superficie* della *Vite* generata dal *Semicircolo* sta a quella della Sfera dal medesimo nata come un Quadrante di Periferia circolare al suo Raggio, o come la Semi-circonferenza al Diametro, che è quanto dire dipende a pari della seconda la prima dalla sola *rettificazione* o *quadratura* del Cerchio; imperocchè bisogna moltiplicare per $\frac{\varpi}{4}$, coefficiente costante, la *Superficie sferica* affine di conseguire la misura o compianazion della *cocleare*; e l'istesso ha luogo dall'*emisferica* passar volendo a conoscere la dimensione dell'ultima configurata in guisa di *Volta spirale rampante* sul cattivo gusto Borrominesco della *lanterna* della Cupola della *Sapienza* di Roma (155). E se in virtù del Teorema bellissimo d'Archimede la *Superficie* di tutta la *Sfera* sta a quella d'una sua *zona* o *callotta* qualunque, e queste *zone* o *callotte* stanno tra loro a vicenda, come l'*asse* intero all'altezza corrispondente, o come le respettive altezze; e se per dividere in parti eguali o in qualunque *data* ragione la *Superficie* sferica, o una delle parti sunnominate, basta dividere in questa ragione o in parti eguali tutto l'*asse* od altezza; non comparirà meno bello che la *Superficie* sferica *cocleare chiusa* (di *passo* disteso quant'impor-

ta la circonferenza del Cerchio massimo), o sua porzione generata dal rivolgersi di un arco qualunque, dividasi in parti eguali o in una *data* ragione dividendone così l'arco che le porzioni stiano tra loro come gli archi di Cerchio massimo *generatori* delle medesime; e che finalmente una *callotta cocleare* stia in superficie ad una *sferica* corrispondente come l'*arco* alla sua *freccia* (*sagitta*) ossia *seno-verso*, ed il *centro di gravità* della prima si determini (vedasi per analogìa l'*Articolo* III.° della *Sezione* seguente) nel modo stesso notissimo di quello dell'*arco* circolare *generatore*.

O fu perciò mal espresso da Frisi nella sua *Lettera* del M.DCC.LXXXIV (156) quello ch'ei scrisse al Fabroni dopo d'aver due anni prima pubblicate le *Formule analitiche* di second'*ordine* sopra le *Coclee* (157) — „ tra le varie applica-
„ zioni della formula generale mi ricordo di avere inteso (da
„ Perelli) che quando la figura piana è un semicircolo, e la
„ maggiore velocità della rotazione si uguaglia alla velocità
„ uniforme secondo l'asse, la *superficie* del Solido cocleare
„ dev'essere *otto volte* maggiore della *superficie* della Sfera „--, o la sua memoria durante il lasso di circa ventisett'anni erasi molto debilitata in vecchiezza. Di siffatte difettose espressioni n'incontro per avventura altri esempj nella medesima *Lettera* (158), la quale men che all'elogio dell'elogiato mira a quello dell'elogista (159), e massimamente dov'egli annunzia tra i ritrovati del Perelli „ la soluzione sintetica ch'esso
„ ha dato [nel *Giornale de' Letterati di Firenze*] (160) di
„ quel problema (delle *tazioni di Pappo*), in cui si cerca
„ il raggio d'un Circolo, che passi per tre punti dati „.
Potrebbe fors'essere che Perelli pronunciasse così a mezza voce quell'*otto volte la Superficie sferica* per il caso d'una vera *Vite* polistrofa o *Coclea stretta*; poichè cinque *giri* e un decimo incirca, o pochissimo meno, della suddescritta *Coclea chiusa* averebbero tutti insieme la coacervata lor *Superficie* eguale a $5\frac{1}{10} \cdot \frac{\varpi}{4}$ di *Superficie sferica* $= \frac{51}{10} \cdot \frac{\varpi}{4} = \frac{51}{10} \cdot \frac{6{,}2831853 \text{ ec.}}{4}$

$= \frac{51}{10} \cdot \frac{3,1415926 \text{ ec.}}{2} = \frac{51}{10} \cdot 1,5707963$ ec. $= 8,01$ ec. $= 8$ prossimamente. Si dedurrebbe l'istesso usando ancora dei numeri men esatti d'Archimede [a paragone di quei di Nicole derivati da un poligono regolare di 393216 lati] (161), Metio (3,1415929 ec.), o sivvero 3,1416 proveniente dai due termini di rapporto 3927 : 1250, cioè da un poligono regolare di lati 768, come sino da remotissime età aveano scritto nel Libro sacro *Ayeen Akbery* i Bramini dell'Indie Orientali (162).

SEZIONE V ED ULTIMA.

Osservazioni sulla solidità delle Coclee.

Poche aggiunte e compendiosissime è mio divisamento finale riunire in diversi *Articoli* per illustrazione della dottrina data a questo solo proposito magistralmente da Torricelli. Alcune di lui Proposizioni inedite, e lasciate nei suoi MSS.ⁱ mancanti di prova meritano, specialmente avuto riguardo alla lor singolarità, d'essere qui raccolte e provate. Diverse maniere nuove, e tutte concordi nei resultati, onde giungere alla misura di tali Solidi *cocleari*, servono a confermarne ed avvalorarne ad un tempo la conosciuta teorìa. Come deggia considerarsi rispetto ai Solidi stessi la familiar *Regola centrobarica*, può anch'essere oggetto di particolar discussione. Trattandosi del volume o *solidità* delle *Coclee* non ha luogo distinzione nessuna tra il moto *progressivo* ossia *passo di vite* uniforme o difforme, equabile o comunque variabile: in ogni supposizione che facciasi (anco d'una linea di *semplice curvatura*, qual sarebbe un'*Ellissi*), a differenza delle *superficie*, si sa oramai che il volume del Corpo *cocleare* non cambia, ma resta sempre dell'istesso valore. Oltrediciò nella soggetta materia, sin ad ora pochissimo diffusa tra i dotti, e promossa, limitandosi ad un sol *giro* di *Coclea*, s'affacciano tali vaghezze ed eleganze geometriche, che crescono onore alla

chiarezza e fecondità della *Sintesi*, in cui segnalaronsi con tanto lustro i Viviani, i Grandi, i Lorenzini, i Boscovich, i Torelli, e non ha guari altri pregevolissimi Matematici dell' Italia.

ARTICOLO I.° Senza bisogno di sciogliere in fasce *indivisibili* ossian *specie curve* il Volume d'un Solido conformato a *verme* di *Vite*, onde mostrarlo eguale nel tutto e nelle parti a quello del Solido *tondo*, o pieno o annulare, procedente dalla rivoluzione della stessa Figura *genitrice* intorno all'*asse* medesimo, come adoperò già il Torricelli [sommamente laudato in ciò dal suo emulo Roberval (163)], e lo copiarono i Sintetisti che vennero dopo di lui (164), se ne può parimente concludere l'eguaglianza paragonando due Settori corrispondenti, o loro tronchi, finiti od infinitesimi, e pel principio di *coincidenza* od *identità* seguendo il metodo classico in Geometrìa, osservato riguardo ai Paralellepipedi *retto* ed *obliquo* nelle Proposizioni XXIX e XXX del Libro XI.° degli *Elementi d'Euclide*. Difatto richiamando a memoria quei *Prismali*, o *mezzi-Prismi* in solidità, di cui s'occupa, specialmente in sul fine, il *Corollario* VI.° della I.ª *Sezione*, si rende manifestissimo dalla Fig.ª 7.ª che mentre due *ordinate* infinitamente prossime dell'area *genitrice* ABC, e perpendicolari all'*asse* di rotazione, come IO, *io*, tra loro eguali nel *limite* estremo, si muovano di moto *rotatorio* pei circolari archi eguali OS, *os*, e descrivan così un Settore intero o troncato di Corpo *rotondo* OIS*ois*, aggiuntosi quindi il moto *progressivo* paralello all'*asse* ed eguale SM, *sm*, ovvero IN, *in*, onde i due moti compongano il *resultante* eguale OM, *om*, e diano nascita all' intero o troncato Settor della *Coclea*, vengono a formarsi due specie di *Prismali* triangolari, e lor tronchi (*Fig.ª* 3.ª), *simili, similmente* disposti, ed in tutto *identici* OSINM, *osinm* posanti sui Settori eguali OIS, *ois*, aventi lo spigolo eguale (*arrêt*) IN, *in*, limitati dagli eguali rettangoli MSIN, *msin*, dai triangoli cilindrici eguali OMS, *oms*, e superiormente dai settori di Circoli *cocleari* ONM, *onm* ancor essi *identici*, di

tal

tal maniera che defalcando ciò, che han di comune, i resti per conseguente s'agguagliano, e sono i Settori corrispondenti (solidi) *cocleare* e *rotondo* . Procede siffatta eguaglianza dal principio d'egualità *assoluta* in virtù di vera *soprapposizione*, nè incontra per avventura la difficoltà rilevata in correzione d'Euclide da Roberto Simson dei Polièdri *simetrici*, così nominati da Legendre (165), ai quali Ampère non ha guari di tempo, e prima di tutti, potè conciliare la pienezza ed integrità d'una perfetta e rigorosa dimostrazione (166). Ed è qui da notarsi che l'eguaglianza istessa sussiste qualunque siasi la *legge* uniforme o difforme, continua o discontinua, del movimento *progressivo*, e di qualunque natura perciò sian le Linee direttrici del moto *composto* descritte sulla *cilindrica* Superficie; lo che più di tutto sorprese verso la metà del Secolo XVII.° i Matematici oltramontani allora viventi (167).

Articolo II.° Giungesi in altra maniera alla medesima conclusione considerando gli *strati* o elementi *spirali* del Solido *cocleare* posti, dirò, *per piano* piuttostochè *per ritto* come piacquero a Torricelli. A quest'effetto immaginiamo le due *ordinate*, come sopra, dell'area *generatrice* EF, *ef*, segnate in prospettiva ma perpendicolari difatto all'*asse* di rotazione, e paragoniamo il tubo *cilindrico* dell'altezza infinitesima E*e*, che abbia per base la circolare *armilla* della larghezza Gg parimente infinitesima al tubo *cocleare* sovrapposto, ed avente per base l'*armilla* di *Circolo cocleare* della larghezza medesima. Si fa chiaro dalla Fig.ª 2.ª che l'ultima superficie *armillare* sta alla prima (e l'istesso vale qui ed in appresso delle lor parti *omologhe*, comunque difforme ed irregolare sia il movimento *progressivo*) (Art.° 1.°) come il *seno-tutto* al *seno-retto* dell'angolo d'inclinazion della *spira* (o sua parte finita od infinitesima) rispetto al lato del Cilindro, la cui base sia il Circolo del raggio ET. Dall'altra banda le due basi *armillari* del tubo *cocleare* sono più strette o vicine tra loro di quello che sian le due *armille* del tubo *cilindrico*, distanti appunto quant'importa E*e*, e la minor di-

stanza delle prime [*in linea transituum* giusta la frase del Torricelli (168)] sta alla maggiore delle seconde nella ragione del *seno-retto* del detto angolo d' inclinazione al *seno-tutto*, cioè in ragione *inversa* o *reciproca* della prima. Quindi è che s' agguagliano i *volumi* dei due tubetti paragonati, e perciò ancora le *somme*, o sivvero i due Solidi *cocleare* e *rotondo* descritti col rivolgersi *spiralmente* o *circolarmente* dell' istessa piana Figura.

ARTICOLO III.° Se dunque riescono sempre uguali i *volumi* del Solido *cocleare* e *rotondo* (o delle lor parti omologhe) ogni volta che abbiano una medesima *generatrice*, la determinazione del *centro di gravità* della *Vite* si conseguirà tosto per mezzo delle notissime regole generali e particolari, che conducono a stabilirlo nei Corpi *rotondi*. Mentre sia stretta al proprio *asse* la *Vite*, il suo *centro di gravità*, concernente un intero *giro*, trovasi come quello del Solido pieno, prodotto dalla rivoluzione della Figura *generatrice*. Quando poi la *Vite* monostrofa fosse (ed il caso n' è più frequente) *aperta* o addossata a un Cilindro, in tal supposto dipende la ricerca del suo *centro di gravità* dalla nozione di quello del Solido *vuoto* o *annulare* sopraddescritto, o del *Frusto Capitellare rotondo* e parimente *pieno* (169), al cui volume s' uguaglia nella totalità e nelle parti. Avendo luogo o l' una o l' altra supposizione, dee trasportarsi, come con qualche oscurità l' avvisò Torricelli (170), il punto supremo o *vertice* A dell' altezza AC della *genitrice* al punto di mezzo del vero *passo* di *Vite*, cosicchè il primo combini con esso, e dividersi poscia l' altezza medesima collocata sull' *asse* com' ella resta divisa dal noto *centro di gravità* del Solido *tondo*. Modificato quanto conviene alla specialità del soggetto torna qui in campo il Teorema celebratissimo *centrobarico*. Imperciocchè il *centro di gravità* della *genitrice* nella prima rivoluzione *spirale* fa (è vero) un viaggio *assoluto* eguale alla Curva *elicoide* da lui descritta, ma viaggio *obliquo* rispetto al piano della *generatrice* medesima. Ridotta dunque, come fa di mestieri

ben concependo ed interpretando a senso di Kepler e Varignon (171) lo spirito della dottrina di Pappo, alla perpendicolarità di viaggio quella Curva *elicoide*, si cambia allora il viaggio *utile* o *relativo* nella Periferìa circolare descritta dal *centro di gravità* generandosi il Solido *tondo*, ed è altresì per siffatto motivo che il *cocleare* ad esso s'agguagli. Così risolvonsi nelle direzioni *relative*, utili e convenevoli all'uopo, tutte le *potenze* di varia tendenza o direzione nella Dinamica; nè diversamente s'ottiene l'*Equazione* cattolica *delle forze* dietro al principio delle *velocità virtuali*, che, come l'altro della *minima Azione* introdotto da Maupertuis (172) e ristretto nei suoi veri termini da Lagrange (173), più che principio è un teorema *peripatetico* (174), o a sentimento di Lacroix (175) dee risguardarsi sempre dai Matematici *comme un résultat analytique des lois générales de la Mécanique*.

Articolo IV.° Prendono adesso il carattere di tutte verità elementari e lucidissime di lor natura quelle, che vado brevemente a soggiungere.

1.° La *Vite chiusa* triangolare, generata cioè da un Triangolo rettangolo HTU, ha lo stesso volume del *Cono retto* generato dal ridetto Triangolo. Ma quando sia *aperta* diventa eguale al volume d'un *Conoide Iperbolico* della medesima altezza, e della *specie* agevolmente determinabile e già determinata da Torricelli (176). Nè dee ciò recar meraviglia essendo le Linee rette sulla superficie d'un Cono i *limiti* de' perimetri delle Iperbole, ed anzi prendendo origine e norma da quelle gli *asintoti*, e d'altronde sapendosi che assorbite nell'*infinito* tutte le Curve *coniche* s'assomigliano nelle loro prerogative, e la Parabola, per esempio (*Fig.*[a] 8.[va]), il cui *foco* sia O, imita la proprietà dell'Ellissi colla *somma costante* dei *raggi polari* e delle paralelle all'*asse* limitate da qualunque *ordinata* (177), che nell'Ellissi sarebbe col centro nell' altro *foco* un arco di Cerchio. Non seppe capire il De Angelis [ed anzi parve dubitativo sull'incidente che vado a narrare] (178) ciò che Torricelli soggiunse alla collocazione del

centro di gravità nella *Vite triangolare aperta* pari al sito di quello competente al precitato *Conoide Iperbolico*, e, se *stretta*, ad un *Cono limite* dei *Conoidi* [come dopo accennò di passaggio e più semplicemente di Luca Valerio (179) lo Slusio (180)], e vale a dire che il suddetto *centro di gravità* combinasse con altro *centro* consimile d'un *Berrettino Sferico* ossia *Segmento di Sfera*. Riporto le parole precise dell'uno e dell'altro Testo, per non cadere in equivoco com'è avvenuto di chi dietro al medesimo nome suppose che il *Prismale* preaccennato del Grandi fosse l'istesso del considerato da Torricelli (181), che poi non er'altro se non se un *Prisma* troncato mediante un piano non paralello alla base: — *Centrum enim gravitatis in axe est, dividitque portiunculam quandam ipsius axis* (cioè EB) (Fig.ª del Lemma V.°) *veluti Conoidis cujusdam hyperbolici centrum secat proprium diametrum; sive prædictæ portiunculæ semissem ita dividit, uti eandem secaret centrum gravitatis cujusdam Segmenti sphærici duplam habentis altitudinem basimque dato cuidam Circulo æqualem* — (182). Il Gesuata repetente nel l.° c.° confessa — *Nescimus de quo Sphæræ segmento verificetur* —: e qui torna bene e in acconcio, avendone Torricelli co' *puntini* interposti al discorso finale fatta reticenza o segreto, nè incontrandosi più parola su questo particolare nei superstiti suoi MSS^i^. Ma non potea mai in buona Geometria sostenersi la giunta — *forsitan de aliquo, quod erit proportionaliter analogum cum Conoide hyperbolico* —; imperocchè non vi sono *Corpi rotondi* „ proporzionalmente analoghi a un *Conoide iperbolico* „ se non che altri *Conoidi* generati da *Iperbole simili*, o, in altezza eguale, da Iperbole dotate dello stess' *asse trasverso*, come segue delli *Sferoidi* in riguardo alle *Sfere*. Ecco dunque a seconda della laconica descrizione di Torricelli indovinato il suo metodo. Sia nella 9.ª Figura ADEB il semi-segmento Iperbolico *generator* del *Conoide*; dividasi l'altezza EB nel punto C per metà, e si conduca la *semi-ordinata* CD; quindi sul prolungamento di lei prendasi il punto S tale che CS sia terza

continua geometrica proporzionale dopo CD ed AB; finalmente nel prolungamento di EB presa BI eguale a BC, pei tre punti I, A, S si faccia passare un Arco di *Circolo*: il Semisegmento *circolare* SAIC genererà rivolgendosi intorno ad IC il *Segmento Sferico* suddivisato. Di fatto il *centro di gravità* O del *Conoide* [in virtù della *Regola* generale concernente tutti i *Frusti* e *Segmenti* di Solidi *tondi* nati da Curve *coniche* (183)] divide talmente l'*asse* EB che $EO : OB :: AB^2 + 2DC^2 : 2DC^2$, ed il *centro di gravità* O' del *Berrettino sferico* divide l'*asse* IC di maniera che $IO' : O'C :: SC^2 + 2AB^2 : 2AB^2$; ragione patentemente *identica* alla prima subitochè in vece di AB^2 vi si sostituisca $SC . DC$, che l'agguaglia per costruzione. In conseguenza $OB = O'C$, e vale a dire la *mezza-altezza* CB resta divisa da O *come* da O'. Ed è notabile oltrediciò che quando il *Conoide* trasformisi in *Cono* AVEB, onde CD divenga $CV = \frac{AB}{2}$, e $CT = 2AB$, i tre punti I, A, T si dispongono allora nella medesima linea retta IAT, che determina $CT = 4CV$, e perciò il *Segmento sferico* corrispondente si converte in un altro *Cono*, ma inverso, CTAI egualmente alto; dimodochè i due *centri di gravità* O, O', i quali sempre procedono *di conserva* infra loro, e son sempre nelle varie posizioni l'un l'altro equidistanti dai due estremi della mezza-altezza C, B, confondansi in un sol punto Q, che divide CB per metà, nell'ultimo *limite* delle innumerevoli *coppie* così combinate, e taglia tanto EB quanto IC come 3 : 1, ossia come d'altronde sappiamo che tagliar devesi l'*asse* d'un *Cono* dal suo *centro di gravità* o *delle medie distanze*.

2.° Doppio del Triangolo il Rettangolo genera la *Vite stretta* rettangolare tripla dell'altra, perchè di volume pari al Cilindro, che verrebbe prodotto dalla rotazione dell'istesso Rettangolo; e la sua *Vite larga* od *aperta* ha parimente il volume medesimo d'un altro Cilindro retto d'eguale altezza, ma la cui base sia un Circolo di *raggio* pari a TK (*Fig.ª 7.ª*), che portando l'apertura del *compasso* LH da L in K sul lato TV si determina *graficamente*.

3.° Dei due Triangoli tagliati dalla *diagonale* HU del Rettangolo il secondo a sinistra genererebbe una *Vite stretta* egual di volume al *Bicchiere cilindrico*, che rimarrebbe vuotandolo del *Cono* iscritto: la *Vite aperta* agguaglierebbesi all'eccesso dell'ultimo *Cilindro* mentovato nel Num.° 2.° precedente sopra il *Conoide* del Num. 1.°; eccesso che si conosce in sequela dei ritrovamenti d'Archimede generalizzati da Cavalieri, Torricelli, Slusio, ec. (184), valendo l'istesso se si tagliasse il Rettangolo coll'altra delle sue *diagonali*, che collocherebbe la *Vite* medesima in ordine inverso.

4.° Oltre alla *Coclea chiusa* di volume eguale a una *Sfera* quando venisse descritta da un Semicircolo, lo sarebbe parimente l'*aperta* tutte le volte che il circolar Segmento *generatore* ZXQ avesse il proprio *centro* situato nell'*asse* del Cilindro, intorno a cui s'avvolgon le *spire*, e quella *Sfera* averebbe ZY per suo *raggio*. Ed i volumi delle due *Viti aperte* procedenti dai due Semicircoli eguali, esterno ed interno, il cui comune diametro posi sul lato TV, stanno tra loro nella ragione del *raggio* LT della base del Cilindro più due terzi di quello del Semicircolo *genitore* a LT men due terzi dell' ultimo *raggio*, siccome costa dal *Canone* Guldiniano. Dall' istessa *Regola* s'attinge la prova dell'altro Teorema Torricelliano, cioè „ mentre un Circolo fosse il *generator* della *Vite*, „ questa *Coclea* sarebbe eguale ad un *Solido*, che avesse al- „ la *Sfera*, di cui sarebbe gran Circolo il *genitore*, l'istesso „ rapporto della periferìa circolare del *raggio* LT a $\frac{2}{3}$ del *dia-* „ *metro* del Circolo suddivisato (185) „. Aggiungo che la *Vite aperta* prodotta dalla rotazione d'un Semicircolo sarebbe eguale al volume del Corpo *rotondo*, il quale nascesse dal rivolgersi di quella *Spirica*, che provenisse dalla sezion dell'*Anello* generato dalla circonvoluzione del Semicircolo stesso attorno ad EL, tagliando l'*Anello* per mezzo d'un piano, che passasse pel diametro del Semicircolo, e fosse a questo normale. E dalle sezioni degli altri *Anelli* in una direzione qualunque deriverebbero l'altre *Spiriche* più o meno intrecciate, annodate,

clipeiformi, ec., ma rientranti sempre in sè stesse, e *trascendenti* allor quando, come in tutte le *Coclee*, il piano segante o tagliasse difatto o incontrar potesse le infinite di numero rivoluzioni o *giri* d'una *Vite*, che di sua indole non ha fine (186).

5.° Dato che il Semisegmento P *generator* della *Coclea* appartenesse ad una Parabola d'Apollonio referita all'*asse* suo o diametro principale, e che avesse il proprio *vertice* tanto distante quanto lo è per appunto dalla medesima parte l'*asse* EL del Cilindro, il volume della *Vite* farebbesi eguale a quel d'un *Paraboloide* dell'istessa altezza di P, e dello stesso *parametro* (187). Rendesi più generale il Teorema osservando che poste le medesime condizioni, qualora il Semisegmento fosse d'Ellissi od Iperbola, la Spira o *Vite* di prima revoluzione sarebbe, per la teorìa delle *Coniche* eguale sempre al volume d'uno *Sferoide* o *Conoide*. Nel caso poi che P, R fossero i due Semi-segmenti d'una stessa Parabola situati a destra e sinistra del comune *primario* lor *vertice*, la *Vite* nata dalla circonvoluzione di P a quella prodotta da R starebbe, per riguardo ai volumi, in una ragione assegnabile anco indipendentemente dalla ricerca del *centro di gravità* dell'uno o dell'altro Semi-segmento. Torricelli la dà senza prova, e la deduce da un principio più universale, parimente non dimostrato da lui, ma suscettibile d'elegantissima e non difficile dimostrazione (188). Qualunquesiasi Figura piana (egli scrisse) divisa da un *asse* AD in due parti simili e uguali (*Fig.*ª 10.ª) P, R, che colla rotazione intorno a BF descriva un *Anello*, darà sempre il volume di quella parte generata dalla mezza-figura P al volume dell'altra generata dalla restante mezza-figura R come due Rettangoli per l'*asse* DACE più tutta l'area della Figura *generatrice* ai due stessi Rettangoli meno la *genitrice* medesima; e l'istessa proporzione varrà in conseguenza rispetto alle due parti di *Coclea*. Difatti il Solido P si risolve in tubetti cilindrici aventi per basi *armille* circolari rappresentate dai rettangoli di OI in IS, mentre quelle

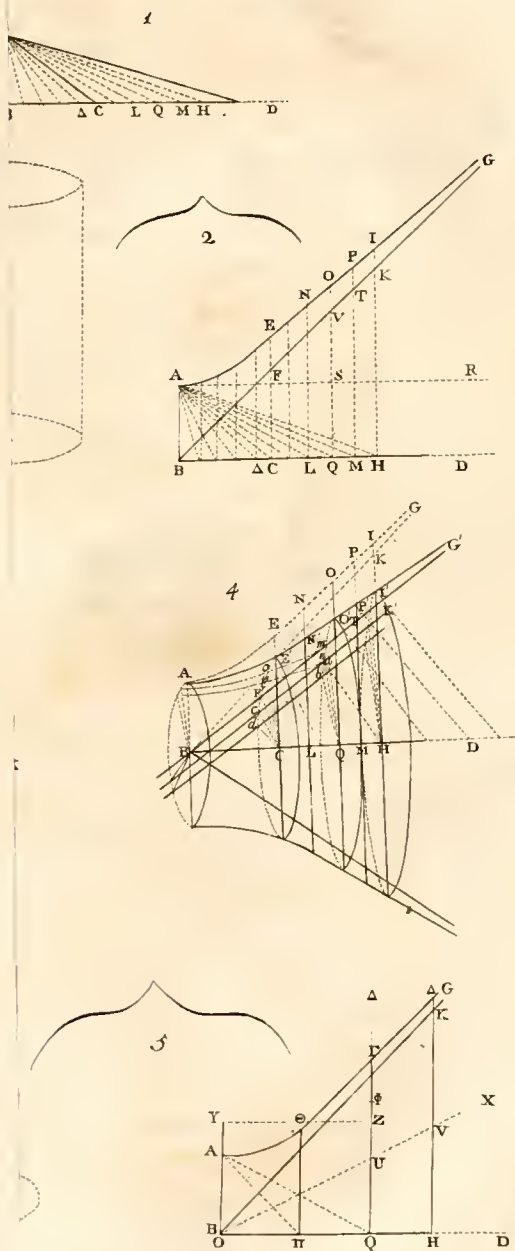
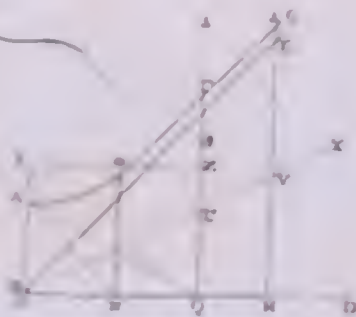
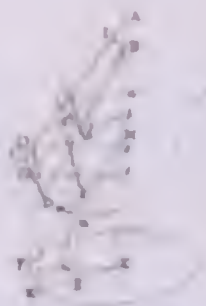
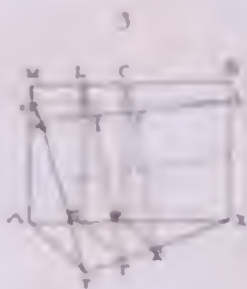
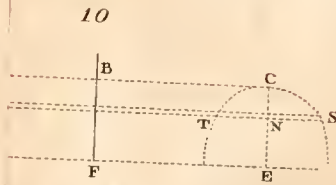
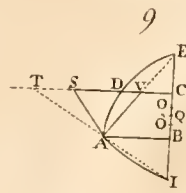
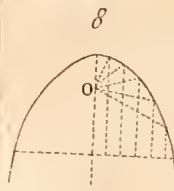
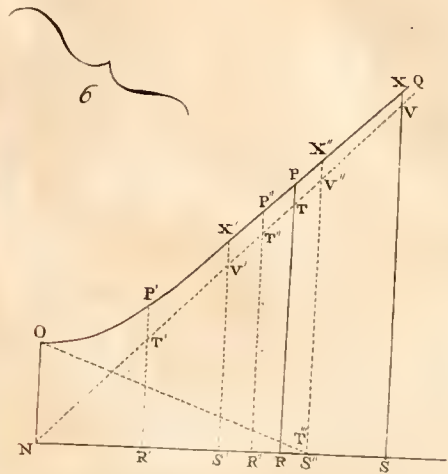
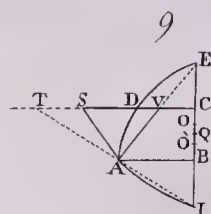
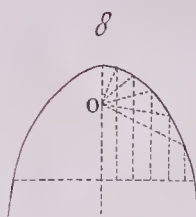
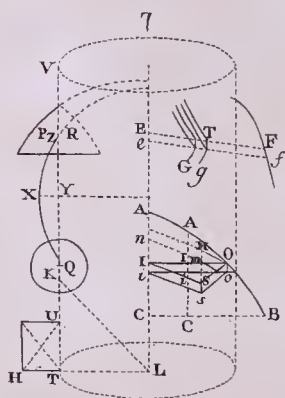
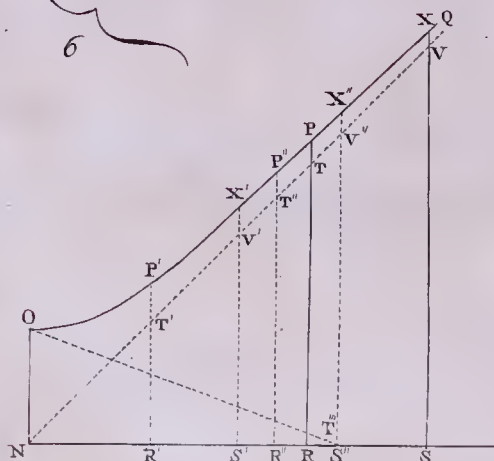
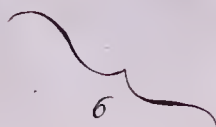
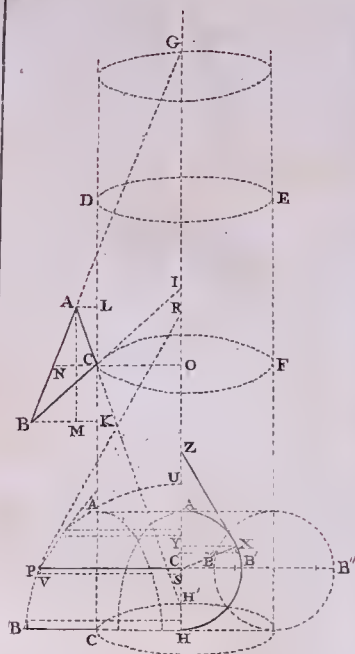
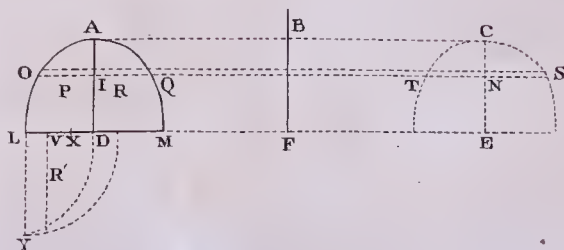
del Solido R si rappresentano da' rettangoli di IQ in QN ovvero OI in QN, e stanno i primi ai secondi come IS a QN, o come IN + NS a IN — NS, o sivvero come 2IN + 2NS a 2IN — 2NS, ch'è la ragione appunto indicata. Applicandola adesso al singolar caso della Parabola, in cui l'area della Figura s'uguaglia al rettangolo di due terzi della retta LM nella medesima altezza AD, o BF, la *general* ragione suddetta diventa *particolare*, e si cambia in quella di 2ED + $\frac{2}{3}$ LM a 2ED — $\frac{2}{3}$ LM, cioè di 4FD + $\frac{2}{3}$ LM a 4FD — $\frac{2}{3}$ LM, ossia 4FD + $\frac{4}{3}$ DL a 4FD — $\frac{4}{3}$ DL, cioè 2FD + FD + DL a 2FD + FD — DL, ovvero 2FD + FL a 2FD + FM, nella qual semplicissima proporzione saranno perciò i due Solidi *annulari* e *cocleari*, respettivamente *esteriore* e *interiore* (189). Annuncia oltrediciò Torricelli (190) che se P s'invertesse in maniera che LD stando ferma prendesse D il posto di L, e viceversa, ed il Semi-segmento si ripetesse capovoltato col vertice in Y, e DL si tagliasse egualmente in X, V nella posizione R', il volume dell'*Anello* parabolico o *Vite* P a quel dell'*Anello* o *Vite* R' starebbe nella ragione di FX a FV; poichè coll' istesso discorso delle *armille* si proverebbe che il primo al secondo *Anello* (e così delle *Coclee*) sta come 2FD + $\frac{2}{3}$ DL a 2FD + $\frac{4}{3}$ DL, cioè, prendendone le metà respettive, nella ragione predetta; laonde, per avere i due *Solidi* eguali, converrebbe disporre l'inferiore Semiparabola facendo scorrere in avanti il punto L sino a V, e situandola quale apparisce dalla Figura.

Scolio generale.

Ciò che non fece e dovea fare il Viviani circa un secolo e mezzo indietro a perpetuo decoro della gran mente del Torricelli (191), non sarà discaro che siasi oggi intrapreso in Toscana per aggiunta e corredo (*pendant*) delle Opere edite da questo valente Geometra ed a molti titoli irrefragabili veramente immortale. Non è già retrocedere, ma progredire

in

1
2
4
5
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
V
X
Y
Z
U
Θ
Π
Γ
Φ
Δ

6
X
Q
V
X″
P
V″
P″
T
X′
T″
V′
P′
O
T′
N
R′
S′
R″
R
S″
S
T‴
8
O
9
E
T
S
D
V
C
O
Q
Ȯ
B
A
I
10
B
C
S
T
N
F
E

6
7
8
9
10

in applicando la pura Geometria elementare a Problemi, ch' essa non avea tentato risolvere, e massimamente sulla misura di *Superficie*, la cui *equazion* generale non può mai essere *algebrica*. Di quanta sublimità, sottigliezza, e nitore ad un tempo sia capace la *Sintesi figurata* o *lineare* che debba dirsi (*et quod palmarium est*, come s' espressero gli Erruditi di Lipsia (192), *ad Veterum methodum*), oltre alle più delle superbe dimostrazioni, che sono sparse nei *Principj* di Newton, havvene una luminosa conferma nelle *ricerche* ammirabili di Maclaurin (193), commendate a ragione da Lagrange (194) e Lacroix (195), sull' attrazione delle Sferoidi. Platone e Teon d' Alessandria, volgarizzati dal nostro Marsilio Ficino (196), nel contrapporre alla *Sintesi* l' *Analisi lineare*, sì ben circoscritta da Pappo (197), non ebbero altra mira che quella d'aprire coll' ultima una via men diretta per arrivare alla *Verità*, casochè questa nelle più spinose quistioni si rifiutasse di cedere all' ordin solito e naturale del raziocinio geometrico.

ANALISI E SOLUZIONE SPERIMENTALE DEL PROBLEMA DELLE PRESSIONI

Del Signor Paolo Delanges.

Ricevuta li 8 *Marzo* 1810.

INTRODUZIONE.

A chiunque legge gli Atti di questa scientifica Società, sembrerà certamente, che l'Italia siasi determinata di dare la soluzione, o di mostrarne l'impossibilità, d'una tra le più ardue questioni che alla statica de' solidi appartengono, e cui può in questi termini enunciarsi. " Giacendo un corpo con piedi ad „ esso annessi sul piano soggetto, o sopra sostegni di cui le „ estremità sieno nello stesso piano; trovare la pressione, os- „ sia la parte del peso di detto corpo che gravita sopra ciascu- „ no de' punti nel primo caso, o degli appoggi nel secon- „ do „. Ognun poi intende che l'essenza del problema consiste nelle due supposizioni " I.° che la sodezza degli appoggi de- „ ve esser tale da sostenere almeno ciascuno da per sè anche „ l'intero peso del corpo, II.° e che esser deve la sua rigi- „ dezza tale che inflessibili rimangano le sue parti che spor- „ gessero fuori degli appoggi per l'azione del peso ad esse „ spettante „. Qualunque però sia il risultato delle serie applicazioni fatte sì da' passati che da' presenti Geometri intorno a così interessante e famoso problema, convenir è duopo, che quantunque non fossero compiutamente riusciti nell' intento loro, le immaginate ipotesi ed i lumi sparsi da essi, inutili non debbono reputarsi per chi di nuovo ne volesse tentare l'impresa. Innanzi pertanto di esporre ora gli studj che su questo particolare io ripigliai colla scorta dell'esperienza, in quanto può esserne esso sottoposto, mi credei in

dovere di richiamare qui le obbiezioni che sono state fatte a quelli che ho già pubblicati, manifestando con ingenuità la mia persuasione per quelle che mi convinsero; e di rappresentare nello stesso tempo pure succintamente i metodi proposti e le opinioni degli illustri Autori che sull'argomento stesso trattarono, il che feci osservando per ogni riguardo l'epoca de' loro scritti, onde trarre e raccogliere tutte quelle nozioni che mi comparvero utili a maggiormente dilucidarlo.

§. I

Dal primo istante ch'io rivolsi la mente a siffatta questione, ho pensato, come tuttavia sono di parere che se " sieno quanti si vogliano i piedi co' quali un corpo giace ,, sopra un piano immobile ed orizzontale, o sostenuto venga da appoggi di cui le estremità situate sieno nello stesso piano, la pressione sofferta da ciascun punto dipender ,, deggia dalla posizione respettiva che ha verso gli altri, e ,, verso il centro di gravità del corpo; come appunto avviene se è sostenuto in equilibrio da un solo sottoposto al ,, detto centro, ovvero combinato coll'azione d'una potenza ,, che agisca in direzione contraria a quella della gravità; o ,, da due appoggi ad esso sottoposti (Tom. V Società Italiana delle Scienze) ,,; e quindi seguendo questa massima condussi rette linee dai punti d'appoggio al centro di gravità del corpo, riducendo il problema a quello d'un vette di tre, quattro ec. braccia o rami, ed avendo ottenuto un risultamento determinato pel caso dei tre appoggi in triangolo, col supporre tre istantanee rotazioni intorno ai tre assi menati perpendicolarmente ai tre rami, e coll'instituire le tre equazioni proprie del principio meccanico de' momenti o delle minime azioni; passai alla soluzione del caso dei quattro appoggi, come si vede nella citata mia Memoria al problema II, in cui, chiamando qui quella figura IX col numero I,

essendo G il centro di gravità del corpo che riposa con quattro piedi ne' punti A B C M sul piano soggetto, trasformai il problema in quello del vette a quattro braccia che denominai $AG = a$, $BG = b$, $CG = c$, $MG = d$, alle cui estremità condotti ad angoli retti gli assi RAI, DBE, FCP, ZMQ, calai ad essi le perpendicolari, nominandole come segue, $AD = f$, $AH = g$, $AQ = \delta$, $BI = h$, $BF = l$, $BZ = \lambda$, $CE = m$, $CL = n$, $CS = \gamma$, $MR = p$, $MN = q$, $MP = \omega$. Fatto ciò instituii le quattro equazioni (1) (2) (3) (4)

$$(1) \ldots\ldots Ag + Bl + M\omega = Gc$$
$$(2) \ldots\ldots A\delta + B\lambda + C\gamma = Gd$$
$$(3) \ldots\ldots Af + Cm + Mq = Gb$$
$$(4) \ldots\ldots Bh + Cn + Mp = Ga$$

convenienti ai detti quattro assi di rotazione, dalle quali dedussi le formole esprimenti le pressioni sentite da ciascuno de' quattro appoggi. Cotali formole aveano per comune denominatore

$$(h\delta\omega + gp\lambda - lp\delta)(m + q) + f\omega(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma$$

ed il numeratore per esempio della frazione che deffiniva la pressione in A, era

$$(dh\omega + cp\lambda - a\omega\lambda - lpd)(m + q) + b\omega(n\lambda - b\gamma) + blp\gamma.$$

Non riferisco le altre tre formole, perchè ciò non abbisogna.

§. II

Nel successivo Tomo VI trattò il Sig. *Paoli* da grande Geometra questo problema, e convertendolo in quello di cercare le forze necessarie a rattenere un piano orizzontale in equilibrio aggravato in un dato punto da un dato peso, mediante tre, quattro forze ec., applicate a tre, quattro punti ec. dati di posizione sul piano stesso, e che agiscano in direzione opposta a quella della gravità, stabilisce, che una delle equazioni per la soluzione del problema sia quella che dà il principio meccanico delle velocità virtuali o istantanee, per impedire al piano suddetto il movimento di discesa, cioè, che

la somma delle forze sostenenti, eguagliar deve il peso che lo aggrava nel fissato punto; e col supporre poscia due istantanee rotazioni del dato sistema intorno a due arbitrarj assi, deduce pel principio de' momenti altre due equazioni conchiudendo (pag. 538, Tom. cit.) che se tali tre equazioni soltanto “ avranno luogo, sarà impedito al piano qualunque „ moto progressivo e di rotazione, e quindi egli sarà in equi„ librio „. Siccome poi, com'ei dice (pag. 539, Tom. cit.) „ i principj della meccanica non ci danno per determinare „ le pressioni esercitate da varj appoggi di un corpo che *le* „ *tre suddette equazioni*, ne segue che il problema si potrà „ risolvere quando tre sono gli appoggi, ma resterà indeter„ minato, quando il numero degli appoggi è maggiore „. O per meglio dire, conchiude il prelodato Autore (pagine 536, 537, Tom. cit.), che il problema “ è indeterminato „ quando gli appoggi sono più di tre, o quando gli appoggi „ sono in linea retta; e nel caso dei tre appoggi non in di„ ritto che le soluzioni de' Signori *Euler*, *Bossut*, e *Delanges* „ sono esatte, e son comprese tra le infinite soluzioni che „ si possono dare di questo problema differenti di aspetto, „ ma in sostanza conformi „.

§. III

Ma avendo io considerato in seguito nella seconda mia Memoria (Tom. VIII, P. I), che coll'ipotesi del Sig. *Paoli* trasmutasi il problema degli appoggi nell'inverso problema di trovare, cioè, dato il centro di gravità, e la somma d'un sistema di corpi, il peso di ciascuno di essi, oppure, data la resultante d'un sistema di forze verticali, il valore di ciascuna di esse, data già essendo sì nel primo, che nel secondo caso, la posizione respettiva de' corpi, o delle forze componenti il proposto sistema: e fermo io altronde che nel problema degli appoggi devesi riguardare il corpo non già sostenuto, ma con piedi ad esso annessi poggiato sopra un piano

immobile ed orizzontale, ovvero giacente sulle sommità esistenti in un piano orizzontale di sostegni inconcussi che sorgono dal piano sottoposto; intrapresi nella summentovata Memoria a trattare l'enunciato statico problema inverso, e mi lusingo di avere geometricamente dimostrato, che nell' unico caso della ricerca delle tre forze in triangolo, data la resultante, il detto problema è determinato, non differendo perciò da quello degli appoggi; e che appunto a questa combinazione voluta, dirò così, dalla natura, è da attribuirsi l'identità de' resultati della soluzione *Euleriana*, nella quale ammette esser sufficiente, per ottenere l'equilibrio nel dato Sistema, l'istituzione di due equazioni dipendenti da due rotazioni di esso intorno a due arbitrarj assi, dovendosi assumere per terza quella della somma delle pressioni; e dell'altra proposta dal sommo Geometra Sig. *Bossut* fondata sulla teoría del centro di gravità, con quelli che dalla mia si ricavano, senza introdurre l'equazione della somma predetta, dando spontaneamente la teoría de' momenti, applicata nel modo da me indicato, le tre equazioni necessarie alla soluzione determinata del problema.

§. IV

Non ostante ciò giudicai opportuno per confermare il mio metodo d'imprendere un'applicazione pratica delle formole che avea trovate pel caso dei quattro appoggi agli angoli d'un trapezio, come riscontrasi nella sunnominata Memoria, ed essendomi comparsi valori determinati per le pressioni su i quattro appoggi, e che insieme presi eguagliavano il peso totale del corpo supposto, mi parve in tal guisa di avere compiutamente sciolta l'agitata questione; quando ecco, che nel Tom. IX il Sig. *Paoli*, immutabile nella già spiegata sua massima ripete, che " in luogo di cercar le pressio-
" ni esercitate sopra i punti di appoggio da un corpo soste-
" nuto sopra un piano immobile " possano sostituirsi " alle

„ pressioni ne' punti d'appoggio delle forze attive in senso „ contrario „ e cercare " l'equilibrio di un piano mobile spin- „ to da una parte da queste forze attive, e dall'altra dal „ peso del corpo „ nè trovando errore nel calcolo dell'assunto mio esempio, prese il lodevole partito di esaminare la riduzione delle quattro equazioni primitive dalla mia ipotesi somministrate, e quindi conobbe; che a me " era occorso uno sbaglio nelle formole generali „ danti i valori delle ricercate pressioni, nella prima mia Memoria (Tom. V), cioè " che il denominatore comune ai valori delle quattro pres- „ sioni, è il seguente

$$(h\delta\omega + gp\lambda - lp\delta)m + (gh\gamma + ln\delta - gn\lambda)q + f\omega(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma$$

„ e che il numeratore, per esempio, della formola che as- „ segna la pressione sul punto A, deve essere

$$(dh\omega + cp\lambda - a\lambda\omega - dlp)m + (dln + ch\gamma - cn\lambda - al\gamma)q$$
$$+ b\omega(n\lambda - h\gamma) + blp\gamma.$$

E così è certamente. Le variazioni che passano tra queste e le espressioni date da me al §. I si rilevano con il semplice confronto.

§. V

Il palesato errore in cui io sono incorso, avvertiti ci rende di non doversi fidare, che esatto sia il calcolo da cui una formola viene dedotta, quantunque presenti essa risultati ragionevoli in alcune sue particolari applicazioni. In fatti è forse irragionevole il risultato che dà le mie formole, che eguali sieno le pressioni sopra i quattro appoggi nella circostanza che sieno disposti agli angoli d'un quadrato, o d'un parallelogrammo qualunque, nel di cui centro cada il centro di gravità del corpo? Poteva io dubitare della verità di esse quando in una data posizione irregolare degli appoggi, mi presentarono quattro valori distinti, determinati, e di cui la somma pareggiava il peso intero del corpo? È osservabile però, che se le formole in questione corrette, come trovò il

Sig. *Paoli*, ne' due casi indicati, danno valori della forma $\frac{0}{0}$, cioè indeterminati, concorrono nullameno colle surrogazioni di $a=\frac{1}{4}(h+n+p)$, $b=\frac{1}{4}(f+m+q)$, $c=\frac{1}{4}(g+l+\omega)$, e $d=\frac{1}{4}(\delta+\lambda+\gamma)$ convenienti al noto teorema *Guldiniano*, a comprovare il teorema II, che dimostrai nella già accennata prima mia Memoria (Tom. V), cioè, che " Qualunque sia il „ numero de' punti di appoggio, se il punto in cui cade nel „ piano di essi la verticale che passa pel centro di gravità „ del corpo, è centro di gravità di supposti pesi uguali col- „ locati ne' punti medesimi, gli appoggi sono aggravati ugual- „ mente „. Riservandomi di parlare sul caso degli appoggi situati in direzione rettilinea, ricorderò qui, come merita d'essere ricordato, che dopo l'esame che fece il Sig. *Paoli* de' miei e degli studj altrui, come si vedrà in seguito, convenne pure col parere de' sommi Geometri *Euler*, *d' Alembert*, e *Bossut*, esprimendosi così " dopo i varj tentativi che „ sono stati fatti per risolvere il problema degli appoggi mi „ confermo sempre più nella mia opinione; che, finchè non „ sarà scoperto qualche nuovo principio di statica, quelli che „ finora si conoscono, saranno insufficienti a determinare le „ pressioni sofferte da più di tre appoggi, a meno che non „ si unisca ad essi qualche particolare supposizione „.

§. VI

Nel Tomo VII havvi la Memoria col titolo *Dell' azione d' un corpo retto da un piano* ec. del Sig. Cav. *Lorgna*. Conchiusi io (Tom. VIII P. I), che siccome il metodo da questo Autore proposto, tirate a cagion d'esempio le diagonali AC, BM (*Fig. II*) nel trapezio ABCM " ai di cui angoli stanno „ disposti quattro appoggi A, B, C, M, e supposto cadere „ il centro di gravità G del corpo dentro i due triangoli „ ABM, ACM „ conduce al concreto risultato " che l'appog- „ gio B soffre la metà della pressione, che soffrirebbe se so- „ stenuto fosse il corpo dai tre soli appoggi A, B, M; l'ap-

„ poggio

„ poggio C la metà di quella, se sostenuto fosse dai tre soli
„ A, C, M; e che la pressione sull' appoggio A è la metà
„ delle due pressioni che porterebbe negli accennati due ca-
„ si, e così quella dell' appoggio M „ conchiusi dico " che
„ per non giudicare arbitraria l' enunciata distribuzione del
„ peso del corpo su i quattro appoggi, bisogna dimostrare
„ il teorema, o che l' ipotesi da cui esso immediatamente ne
„ deriva, convenga al problema da risolversi „. Il Sig. *Paoli*
non esitò di dire (Tom. IX) che " la soluzione del Cavalier
„ *Lorgna* è appoggiata ad una ipotesi così capricciosa, che
„ sembra impossibile sia per essere da alcuno abbracciata „.
Nel suddetto Tomo VIII, P. II si legge la Memoria del Sig.
Malfatti " Tentativo sul problema delle pressioni ec. „.
Sono degne d' un eccellente Geometra le osservazioni che fe-
ce lo stesso Sig. *Paoli* anche sul metodo immaginato da que-
sto Autore, dimostrando come può vedersi nel sopra citato
Tomo IX, che si ottiene con esso una soluzione " che non
oltrepassa di molto i confini di una ipotesi ingegnosa „.

§. VII

È decorato il Tomo X, P. II della pregevole, non dirò
Memoria, ma Opera, e che giustamente porta il titolo " I prin-
cipj della Meccanica richiamati alla massima semplicità ed
evidenza „ del chiarissimo Collega Sig. *Ferroni* in cui riluce
e il suo genio veramente geometrico nell' agitare le più subli-
mi questioni fisico-matematiche, ed insieme la vastissima sua
scientifica erudizione. In siffatta Opera pertanto nell' appli-
care il prelodato Autore i suoi principj a parecchi difficili
problemi meccanici, non dimentica anche quello degli appog-
gi, ed è suo sentimento, che per arrivare alla completa ed
esatta soluzione di esso, necessario sia il soddisfare alle con-
dizioni " pag. 574, 1.ª che la *somma* delle pressioni di tut-
„ ti insieme gli *appoggi* equivalga precisamente alla forza
„ unica da sostenersi; 2.ª che rimanga ad un tempo elimi-

„ nata e distrutta ogni *tendenza* del sistema alla rotazione;
„ 3.ª che dal *centro delle medie distanze* d'un sistema qua-
„ lunque di punti si propaghi sopra i medesimi con eguale
„ scompartimento la forza che in esso risieda ec. „. Quindi
inammissibile riguarda " la maniera ideata da *Lorgna* de' due
„ sistemi *attivo* ed *inoperante* d'ogni ternario d'appoggi per
„ la falsità del principio „ . . . . . " che gli appoggi medesimi
„ tutti insieme sostengano una forza maggiore della premen-
„ te, e che poi con un' *ipotetica* regola di proporzione deb-
„ ba ridursi alla rigorosa eguaglianza „. Dimostra *redargui-
bile il piano Malfatti* perchè " dipendente da un' analogìa
„ non abbastanza provata, e più pel motivo ch' esso repu-
„ gna „ alla terza delle riferite condizioni; il che conferma
coll' esaminare i risultati singolarmente del caso in cui esi-
stano gli appoggi agli angoli del Romboide, o del Rombo;
ed è consona la di lui conclusione sopra tale metodo a quel-
la del Sig. *Paoli* (§. VI), vale a dire " che incerto egli sia
„ il cammino *retrogrado* per via di vetti, aperto in sequela
„ della nuda analogìa del triangolo „ pag. 576. Così stessa-
mente conviene che il Sig. *Paoli* abbia (Tom. VI) " vitto-
„ riosamente provata insussistente, e scevra d'incongruenza
„ nel caso unico dei tre appoggi in triangolo „ l'ipotesi *Eu-
leriana* ec.; e lodando in ultimo assai più di quello meri-
tano i miei studj intorno, com' egli con fondamento dice
" a quest' oscuro ed astruso problema „ . . . . . è persuaso, ch'
io debba convenire " giusta i rilievi esatti di *Paoli*, 1.° che
„ il problema del quale si tratta, altro non sia che un' equi-
„ librazione di forze; 2.° che in conto di queste forze deb-
„ bano annoverarsi le *reazioni* degli *appoggi* „ da me " con-
„ cesse in principio, e dipoi ritrattate; 3.° che due soli as-
„ si di rotazione s' abbiano da contemplare a piacimento in
„ un piano per l' egualità dei *momenti*, poichè introducendo-
„ ne altri, l' equazioni nuove che si ottenessero per satisfare
„ alle *condizioni* dell' equilibrio, non sarebbero *indipendenti*,
„ ma *identiche* colle prime, siccom' è teorìa già fissata, non

„ che dalla Statica, dalla Geometrìa elementare „. Io non ho giammai dubitato che il problema degli appoggi non sia, parlando in senso astratto, un problema di *equilibrazione di forze*, ma ho sostenuto, che la di lui condizione è ben diversa da quella del problema notissimo di un sistema di forze agenti in direzione verticale, cui è di natura sua indeterminato, eccettuato il caso dei tre appoggi in triangolo (§. III). Confesso pure che nell'occasione di trattare nuovamente la soluzione del caso degli appoggi in linea retta (Tom. VIII, P. I), conobbi, che per convenientemente usare il principio de' momenti, o delle minime azioni, onde mantenere il problema generale degli appoggi nella sua naturale condizione (§. III) essere duopo piuttosto, che supporre le istantanee rotazioni provenienti dalle rotazioni istantanee degli appoggi, il supporle relativamente all'istantanea cessione del centro di gravità del corpo, considerando sempre che ogn'uno di essi faccia a vicenda la funzione di centro del moto. Per reputare poscia certo il terzo su rapportato precetto, bisognerebbe che assurda riuscita fosse la mia soluzione per i tre appoggi in triangolo, perchè fondata sopra tre, e non due soli assi di rotazione; ma essendo essa difesa da geometrica dimostrazione, non può perciò asserirsi che la comune accennata teorìa, che vale per l'*equilibrazione* d'un sistema di forze verticali, valga insieme per determinare le pressioni in un sistema di appoggi generalmente.

§. VIII

Sugli esami fatti degli studj altrui, e da me ora compendiosamente raccolti, propone il Sig. *Ferroni* un metodo molto ingegnoso per la soluzione del problema in controversia, e di cui per lo scopo prefissomi in questo mio lavoro, conviene che ne produca qui l'esposizione sua propria. " Ma „ veramente non havvi egli mezzo di risolvere questo pro- „ blema difficoltoso relativo agli *appoggi* senz'analogìa di *fun-*

„ *zioni*, salve tutte le regole della statica, e d'averne sem-
„ pre una soluzione determinata? Io sono andato meco me-
„ desimo divisando, che potrebbe pur essere infra i tanti
„ possibili il modo *speciale* di distribuire una forza sopra gli
„ *appoggi*, che si realizzi in natura, quello di cui vado a
„ darne un brevissimo saggio. Siano quanti mai si vogliano
„ appoggi (*Fig. III*) A, B, C, D, E, ec., la forza P pre-
„ mente in I, ed O *centro* solito *delle medie distanze* dei
„ punti dati. Congiungasi I con O mediante la retta IO, e
„ questa si prolunghi dalla parte opposta a quella del centro
„ suddetto, rapporto ad I, fino all'incontro in M col lato
„ DC, o col vertice dell'angolo C quando occorra. Spartita
„ la forza premente come porta la leva OIM in due forze
„ parziali, una $F.\frac{MI}{MO}$ che agisca in O, l'altra $F.\frac{OI}{MO}$ che sol-
„ leciti in M la leva CD, o il punto solo C, la prima si sud-
„ divide *egualmente* pei principj premessi su tutti gli *appoggi*
„ assegnati; mentre la seconda o preme unicamente C, o si
„ ripartisce tra C e D a motivo della frapposta leva CMD,
„ in due giunte di nuove forze, cioè quanto a C espressa
„ da $F.\frac{OI}{MO}.\frac{DM}{DC}$, e per D da $F.\frac{OI}{MO}.\frac{CM}{DC}$, nel qual repar-
„ to di forze ognun vede, che se gli appoggi A, B, C, D,
„ E, ec., sono n di numero, ciascheduno di loro (me-
„ no i due C, D) sopporterà la pressione $\frac{F}{n}.\frac{MI}{MO}$, i rima-
„ nenti C, D respettivamente $\frac{F}{n}.\frac{MI}{MO}+F.\frac{OI}{MO}.\frac{DM}{DC}$, $\frac{F}{n}.\frac{MI}{MO}$
„ $+F.\frac{OI}{MO}.\frac{CM}{DC}$, salvandosi insieme tutte e tre le sopraenun-
„ ciate fondamentali Regole dell'equilibrio. E nel caso che
„ M cada in C, questo unico *appoggio* soffrirà il carico equiva-
„ lente a $\frac{F}{n}.\frac{MI}{MO}+F.\frac{OI}{MO}=F\left(\frac{MI+n.OI}{n.MO}\right)$, e tutti gli altri
„ a $F\left(\frac{MI}{n.MO}\right)$ per ciascuno „. Successivamente in compro-

vazione di tale suo metodo fa vedere il Sig. *Ferroni* che applicato ai tre appoggi in triangolo dà quel risultato " che volontieri si presta a tutti i metodi sin qui adoperati dagli Analisti ,,: risultati poscia egualmente ragionevoli dimostra che esso somministra applicandolo al Bomisco, ponendo *eccentrica* la forza premente in un punto qualunque del suo asse che taglia per mezzo i due lati opposti paralleli, come eziandio supponendo gli appoggi situati agli angoli d'un poligono regolare. Nullameno sembra che di tale soluzione non ne sia rimasto esso interamente convinto, mentre opina in fine che " Pochi esperimenti d'abili Operatori, e su pochi punti d'appoggio sarebber valevoli a decifrare il mistero ec. ,,.

§. IX

L'illustre Collega il Sig. Cav. *Araldi* diede col titolo di *Esame di alcuni tentativi di soluzione di un famoso problema di Meccanica Statica*, una Memoria nel Tomo XIII P. I, in cui dà nuove pruove dell'acutezza sua d'ingegno, e dell'esteso e profondo suo sapere. Il di lui assunto pertanto si è di mostrare che il problema degli appoggi sia " non già re-
,, lativamente ai principj meccanici fin ora impiegati, ma per
,, propria indole ed essenzialmente indeterminato (pag. 101),,. Quindi sostiene con nuove ragioni, convenendo col Sig. *Paoli* (Tom. VI), che *illusoria* si è l'ipotesi *Euleriana*, eccettuato il caso dei tre appoggi in triangolo per cui dà " quella
,, stessa determinata soluzione a cui guidano i principj ordi-
,, narj della Meccanica (pag. 77) ,, e che così pure difettose ed insussistenti, fuori, che in detto caso, riescono le soluzioni proposte da *me* (Tomi V, VIII, P. I); dal *Lorgna* (Tom. VII), dal *Malfatti* (Tom. VIII, P. II), nè fa cenno veruno di quella del Collega Sig. *Ferroni* inserita nel Tom. X, P. II, e di cui ne ho fatta la succinta esposizione nell'antecedente paragrafo. Estimabile ed utile è l'enunciato lavoro del prelodato Sig. Cav. *Araldi* e singolarmente pegli schia-

rimenti che porta sulla metafisica de' principj statici. Lontano però io dal pretendere di proferir parere su le obbiezioni che fa agli studj degli altri Autori, siami concesso per ciò che dice riguardo al mio, di manifestare ch'io non posso convincermi che dedurre debbasi dall'osservazione che un corpo è sostenuto egualmente in equilibrio da una forza che equivalga al suo peso applicata ad un filo verticale che passa pel suo centro di gravità, come da un sostegno che collocato sia sotto il corpo nella direzione medesima, che il problema delle pressioni d'un corpo sugli appoggi sia " identico a quello della ricerca ,, delle forze parallele data la resultante. Alle considerazioni che ho già fatte e rammemorate ne' superiori paragrafi contro la stessa proposizione per cui altri Autori pure si dichiararono in qualche guisa fautori, trovo opportuno aggiugnere le seguenti, onde si conoscano maggiormente le ragioni tutte sulle quali io ho stabilita cotale mia disuasione.

§. X

Rappresentino le quattro sfere disuguali A, B, C, M (*Fig. IV*) poste agli angoli del trapezio ABCM quattro forze verticali: è manifesto, per la teorìa del centro di gravità delle due sfere B, C, ed E quello delle due A, M, congiunta la retta DE e divisa in G, sì che DG a GE abbia la ragione della somma delle due A, M, alla somma delle due B, C; sarà G il centro di gravità comune alle quattro sfere o forze verticali A, B, C, M. Ora immaginandosi che il dato sistema rattenuto sia dalle verghe rigide e non pesanti AG, BG, CG, MG unite nel comune punto G, è indubitato, che una forza verticale applicata in G equivalente alla somma di dette sfere o forze manterrà in equilibrio il proposto sistema: all'opposto è altresì chiaro, che data essendo detta forza, che dicesi *resultante*, all'infinito si possono variare le forze da situarsi ne' punti A, B, C, M, sempre pa-

reggiando la somma loro la stessa resultante, che si equilibrino con essa, come infiniti sono gli assi che possono condursi pel punto G tra i lati opposti AM, BC del trapezio ABCM; e quindi resta dimostrato che mentre il problema delle forze parallele è determinato qualora sono esse date, e si cerca la resultante, è essenzialmente indeterminato il problema inverso, cioè che data essendo la resultante si cerchino le forze da situarsi agli angoli del dato sistema capaci ad equilibrarsi con essa. Concependo poscia giacente col suo centro di gravità sul punto G una sfera eguale alla somma delle quattro A, B, C, M, e che le estremità A, B, C, M delle verghe poggiassero sopra sostegni inconcussi, si passa in tal maniera dal problema delle forze a quello delle pressioni, e se questo potesse considerarsi sotto lo stesso aspetto di quello, ognuno evidentemente comprende che non rimarrebbe più ragion veruna di contendere sull'argomento, e che il problema delle pressioni sarebbe per condizione propria indeterminato, come s'è mostrato esser quello della semplice ricerca delle forze verticali, data la resultante; e perciò o inutili estimare dovrebbonsi tutti gli sforzi fatti da *Eulero* e da altri Geometri poscia, per risolvere generalmente il problema degli appoggi, oppure confessar devesi che non sono, com'è di fatti, io il solo che mi abbia formato un concetto singolare di tale problema, cioè che la di lui soluzione dipender debba da una teorìa diversa da quella del centro di gravità, e tale che conduca alla determinazione delle pressioni sugli appoggi A, B, C, M dipendentemente dalle posizioni loro respettive riguardo al centro di gravità del corpo; posizioni deffinite dalla lunghezza e dalla mutua inclinazione de'rami GA, GB, GC, GM. Siccome poi le pressioni debbono per legge di natura eguagliare nella loro somma il peso del corpo dagli appoggi sostenuto, e supponendosi ad esse sostituite forze verticali rappresentanti le reazioni degli stessi appoggi, e congiunte ai punti del corpo con cui sopra essi riposa, verrebbe esso egualmente sostenuto in equilibrio;

così ne segue che a simiglianza del problema delle forze verticali, nel problema delle pressioni, il centro pure di gravità del corpo esser dee centro di gravità delle pressioni.

§. XI

Che la teoría delle forze parallele valga per la soluzione dei tre appoggi in triangolo, ne ho già io data la dimostrazione geometrica che superiormente ricordai (§. III). Dalle formole generali però della mia soluzione deduconsi risultati, che finora non sono stati dimostrati assurdi, adattandole a diverse particolari posizioni dei tre appoggi, e sopratutto al caso che situati fossero in linea retta, in cui fanno conoscere che i due soli A, C (*Fig. V*) tra quali consiste la direzione del centro di gravità del corpo lo sostengono interamente in reciproca ragione delle distanze AG, GC, e che nulla è la pressione sul terzo B posto più lontano dalla parte del C. Nullameno per confermare questo risultato da nessuno per l'innanzi presunto, eccitato dopo i primi studj inseriti nel Tomo V a rintracciare nuove dimostrazioni intorno ad esso, diedi nel Tomo VIII, P. I la soluzione di questo caso particolare assoggettandolo direttamente al mio metodo, e ciò coll'ammettere, come avvisai (§. VII), le momentanee rotazioni Acb sull'appoggio A, cedendo col peso G gli appoggi C, B; la B$c'a$ sull'appoggio B, cedendo col peso G gli appoggi A, C; e la b'Ca' intorno all'appoggio C, in cui per cedere il peso G non cede che l'appoggio A, e diventa inerte o inutile l'appoggio B: chiamate così AG $= a$, GB $= b$, GC $= c$; scopersi che posto G il peso del corpo, è la pressione in $A = G\left(\frac{c}{a+c}\right)$, la pressione in $C = G\left(\frac{a}{a+c}\right)$, e la pressione in $B = G\left(\frac{o}{a+b}\right) = o$, risultamento conforme a quello che diedero le formole generali per i tre appoggi in triangolo modificate alla circostanza d'essere situati in direzione

zione rettilinea, come s'è superiormente detto. Similmente procedendo trovai eziandio che essendo quattro gli appoggi in linea retta, i due più vicini, e fra i quali sta la direzione del centro di gravità del corpo, soli lo sostengono, comparendo nulle le pressioni sugli altri due laterali, che nominerò d'ora in poi *eccentrici*. Nello stesso tempo feci vedere come essenzialmente riesce al contrario indeterminato il presente problema nella supposizione di poter sostituire in luogo delle pressioni sugli appoggi delle forze verticali, cioè volendo impiegare per la sua soluzione il principio statico ch'è confacente al problema delle forze parallele in un dato sistema collegate; ed è forse che sotto la predetta supposizione sentenziarono *Eulero*, *Bossut*, e *d'Alembert* il caso perfino di soli tre appoggi in linea retta insolubile; il che da un altro canto fa arguire che sicuramente questi celebri Geometri riguardassero in generale di condizione determinata il problema degli appoggi.

§. XII

Mette in dubbio il Sig. *Paoli* tale mia soluzione dei tre appoggi in linea retta (Tom. IX), dicendo " Ma io non so, „ se i Geometri troveranno buone le ragioni; per le quali „ esclude (parlando di me) dalla terza equazione il momen- „ to di rotazione dell'appoggio B (*Fig. V*); anzi mi sembra „ che escludere questo momento sia lo stesso che supporre „ in principio nulla la pressione in B. Poichè se questa pres- „ sione ha qualche valore, la di lei reazione sul vette AB „ deve necessariamente produrre un momento di rotazione, „ e qualora questo si trascuri, si viene a supporre ciò che „ volevasi dimostrare, cioè che la pressione in B è nulla. „ Tutto ciò si oppone alla regola generale di sopra rammen- „ tata, per la quale alle pressioni si possono sostituire eguali „ forze attive in senso contrario „. Le tre equazioni che nascono dal mio metodo sono

$$(1) \ldots\ldots C(a+c)+B(a+b)=aG$$
$$(2) \ldots\ldots A(a+b)+C(b-c)=bG$$
$$(3) \ldots\ldots A(a+c) \ldots\ldots\ldots = cG$$

Frattanto che da altri Geometri vengano dimostrate erronee queste equazioni, o non bastantemente difese e tutelate dal principio stesso de' momenti, a me sembra poter salvarle dalle ora riferite obbiezioni del Sig. *Paoli*. Per poter asserire, che per non essere intruso nell' equazione (3) il momento dell' appoggio B " sia lo stesso che supporre in principio nulla la pressione in B „ io sono d' avviso che bisognerebbe ch' esso non si trovasse aggregato neppure nell' equazione (1): così la detta asserzione non ha luogo pel caso dei quattro, poichè se distribuiti sono due da una, e due dall' altra parte, ogn' uno dei due eccentrici comparisce in due equazioni delle quattro; e se i due eccentrici esistono dalla stessa banda, il più vicino entra in due equazioni, ed il più lontano in una sola, come osservasi nella sopraccennata mia Memoria. Quanto alla voluta regola di poter sostituire alle pressioni sugli appoggi le equivalenti reazioni, oltre all' avere io geometricamente dimostrato (Tom. VIII, P. II), che cangiasi in tal guisa il problema in altro di essenza sua indeterminato, confermerò presentemente anche in via analitica la proposizione medesima. Le verticali Aa, Cc, Bb (*Fig. VI*) sugli appoggi A, C, B proporzionali alle pressioni, che suppongonsi da essi sofferte, indichino le reazioni loro; è chiaro che riguardo alla rotazione sull' appoggio A, si avrà l' equazione (1) come prima, e così pure riguardo alla rotazione sull' appoggio B, avrà luogo l' equazione (2); ma riflettendo alla rotazione sull' appoggio C si scorge che questa non può immaginarsi se non colla cessione istantanea dell' appoggio B, diventando perciò negativo il suo momento di rotazione, e che in conseguenza la su descritta equazione (3) si riduce alla seguente

$$A(a+c)-B(b-c)=cG$$

la quale combinata colle (1), (2) somministra i valori $A=\frac{0}{0}$, $B=\frac{0}{0}$, e $C=\frac{0}{0}$ indeterminati e ripugnanti come s'è detto.

Valori pure inconcludenti si presentano, tenendo come convenevoli le equazioni (1), (2) ad impedire ogni moto di rotazione nel vette (§. II), ed alla terza si sostituisca l'equazione della somma delle tre ricercate pressioni eguagliata al peso totale.

§. XIII

Quantunque la mia soluzione intorno agli appoggi disposti in un vette retto induca ad ammettere, che sia legge naturale, che il peso di cui è aggravato venga distribuito su i soli due che stanno a canto dall'una e dall'altra parte del centro di gravità, impedendo essi, per così dire, che la sua azione si diffonda sugli eccentrici, io non sono per aderire col Sig. *Malfatti* che sia lecito assumere detta legge preventivamente per la soluzione del problema, avvegnachè allora con ragione potrebbe opporsi da' Geometri che supporrebbesi concesso ciò che devesi ritrovare e dimostrare. Il Sig. *Ferroni* (Tom. X, P. II) finalmente osservando che dal suo metodo (§. VIII), modificate le formole per i tre appoggi in triangolo al caso di essere situati in linea retta, risulta che l'appoggio eccentrico non risente pressione veruna, come palesano le mie formole e quelle del Sig. *Malfatti* in detto caso, conchiude da profondo Geometra " Conseguentemente a „ ciò inclino a credere, con *Galileo*, dov'esamina l'accidente della rottura d'una colonna sdrajata, e con *Delanges* e „ *Malfatti*, che l'economia della natura determini in modo „ le pressioni sopra più appoggi situati nella medesima di- „ rezione da caricarne soltanto quei due, tra i quali è *im-* „ *mediatamente* la forza premente, *quando non sia cedevole* „ *nessuno di loro;* laonde non abbiavi luogo per questo par- „ ticolare di ricorrere a qualche altro principio ignoto di „ statica, come sospettò *Dalembert* ec. „. Ragionamento in cui è da notarsi singolarmente la vera concezione che indica l'Autore doversi fare del problema, ricordando la sua condi-

zione principale, cioè che gli appoggi suppor si devono immobili, o della convenevole sodezza dotati.

§. XIV

Qualunque sia la forza però delle addotte ragioni in favore e conferma della soluzione ch'io proposi pel caso degli appoggi collocati in direzione rettilinea, nullameno l'estimazione che dee aversi, e ch'io altamente professo pegli studj fatti da parecchi sommi Geometri, come s'è veduto, su questo grave soggetto, mi spinse a rintracciare delle nozioni concrete intorno allo stesso, tentando la via sperimentale in quanto ho creduto potersi ad essa assoggettare, non alterando le condizioni sue naturali ed inseparabili. Il Sig. *Paoli* (Tom. VI) sagacemente riflette che le immersioni degli appoggi in una materia molle, sieno questi annessi al corpo, o spuntanti dalla superficie della stessa materia, non rappresentano le isolate pressioni da essi sofferte, ed anzi direi io di più, che non accertano se tutti in ogni combinazione sieno o no a carico soggetti, poichè dovendosi riguardare il corpo di qualità rigido ed inflessibile per sè stesso (Introduzione) una parte di esso ceder non può senza trascinar seco le altre, e quindi gli appoggi vengono gli uni dagli altri forzati ad immergersi più o meno di quello che alla loro respettiva pressione comporterebbe. Questa osservazione che decise il dubbio che mi si affacciò (Tom. V) nel considerare la teoría *Euleriana*, cioè che incerto fosse, che le estremità delle perpendicolari su gli appoggi proporzionali alle pressioni da essi sostenute " esister dovessero, anche se di maggior numero di tre in uno stesso piano ,, questa osservazione dico fa escludere per sempre siffatta sorta di sperimenti, onde acquistare pratiche nozioni sicure nella recondita questione degli appoggi, come inutili sarebbero quelle che trarre si cercassero dalle depressioni di elastri che ad essi si sottoponessero: perciò trascurando gli artifizj accennati descriverò quella maniera di spe-

rimenti che m'è riuscito di esercitare, e che giudicai adattati all'indagine.

§. XV

Poggiata co'suoi piedi A*a*, C*c*, B*b* l'assicella ACB (*Fig. VII*) sul piano soggetto PS, l'ho caricata nel suo centro di gravità G de'pesi M, *m*, *m'*, ec., e così facendo, osservai che trovandosi aggravata in fine, a segno di ridursi concava, rimanendo affrontati i due piedi A*a*, C*c* contro il piano soggetto, il terzo piede eccentrico B*b* da esso si distaccava innalzandosi. Dimostrando questo sperimento che non soffre pressione il terzo piede B*b*, dacchè l'assicella è nell'atto d'incurvarsi, pare certo che non ne debba soffrire nemmeno quando è caricata di peso che non la costrigne all'incurvamento; di maniera che il peso totale sopportato venga dai soli due piedi A*a*, C*c* fra quali è compreso il suo centro di gravità, venendo reso inutile ed inerte il piede eccentrico B*b* dalla presenza dell'anteriore piede C*c*, il quale insieme coll'altro A*a* dall'opposta parte situato, trovano già la sodezza necessaria nel piano soggetto per resistere o reagire a'carichi che ad essi competerebbero se soli esistessero. Lo stesso fenomeno succedendo se l'assicella BAGCD (*Fig. VIII*) è fornita di quattro piedi B*b*, A*a*, C*c*, D*d*, alzandosi i due estremi B*b*, D*d*, e restando affrontati al piano soggetto i due A*a*, C*c*, sforzandola con pesi M, *m*, *m'* all'incurvamento: così non esiterei a conchiudere, che in generale dalla proposta sperienza debbasi arguire, che nel vette rettilineo, i due piedi immediatamente laterali al centro di gravità del peso lo sostengano interamente, e che gli eccentrici inerti rimangono ed inutili. Ma qui si para dinanzi l'obbiezione che le parti estreme ABK, CDO (*Fig. IX*) del corpo KBAGCDO potrebbero essere costrette a piegarsi caricando gli estremi piedi B*b*, D*d*, o per la soverchia loro estensione, o per la ragione di pesi estranei ad esse soprapposti, o per qualche altra

causa, e che perciò dovrebbero necessariamente premere non solo i piedi A*a*, C*c*, ma eziandio i detti piedi eccentrici contro il piano soggetto. L'esposto fatto, che può di sovente avverarsi, se servir deve di precauzione per non trascurare, secondo le circostanze, d'impiegare nelle pratiche anche de' sostegni eccentrici per lo scopo a cui si mirasse, non vale però per istabilire veruna regola intorno alla teorìa degli appoggi, in cui, come s'è altre volte detto, non può farsi a meno dell'astratta supposizione, che il corpo sia rigido e per sè stesso inflessibile.

§. XVI

Corredato il prisma rettangolare AB (*Fig. X*) di legno con tre uguali piedi A*a*, C*c*, B*b*, lo eressi sul piano soggetto PS, avendo già in esso contrassegnato il centro di gravità G nel suo asse orizzontale AGCB. Vedendo poscia che collo spignere il prisma dalla parte del piede solo A*a*, subito che l'asse verticale di questo piede cadeva fuori dell'estremità P del piano soggetto, capovolgevasi esso verso la stessa parte, restando affrontato il piede C*c*, ed innalzandosi dallo stesso piano l'estremo piede B*b*; ho legato un filo in O in direzione cioè dell'asse verticale del piede A*a*, all'altra estremità di cui, ravvolto sulla girella T in sito opportuno affissa, era attaccata la lance Q. Instituito con diligenza questo apparecchio, ho sperimentato che il peso occorrente a sostenere in equilibrio il prisma spinto fuori del piano soggetto fino a che l'asse del filo OT era nella stessa direzione verticale con l'asse del piede A*a* trasferito in 45, appoggiati restando su di esso gli altri due piedi C*c*, B*b* nelle situazioni corrispondenti a tale trasportamento, al peso totale dello stesso prisma, avea la ragione della distanza GC dal centro di gravità G all'asse verticale del piede C*c*, alla distanza AC degli assi verticali dei due piedi A*a*, C*c*. Io non so porre in dubbio che questa sperienza non termini di assicurare che

il peso intero del prisma venga dalla natura stessa distribuito su i due soli piedi A*a*, C*c* nella già nota statica proporzione, e che indifferente sia il congiugnimento al prisma del terzo eccentrico B*b*. Questa deduzione viene inoltre, per così esprimermi, posta a coperto d'ogni scrupolosa e metafisica difficoltà coll'osservare, che spinto il prisma dalla parte opposta, sicchè il piede eccentrico B*b* (*Fig. XI*) cada fuori dell'estremità S del piano soggetto, come in *ou*, tuttavia immobile esso ne rimane. Imperciocchè ammesso questo fatto incontrastabile, è chiaro, che siccome concependo posto in contatto un piano *sur* colla base del nominato piede, non può sospettarsi che eserciti pressione contro di esso, e che nemmeno esercitar ne dovesse, se ad un tratto si supponesse congiunto in S in maniera che PS*sr* fosse un piano solo; così esercitar non abbia pressione nel primiero collocamento del prisma AGCB sul piano soggetto PS potendosi immaginare troncata la porzione RS in cui sovrasta, e quindi allo stesso connessa, come s'è detto del supposto piano aggiunto *sur*.

§. XVII

Confermato dalle mie ed altrui riflessioni sì teoriche che pratiche in questo mio scritto raccolte, che il principio de' momenti, o delle minime azioni adoperato nella maniera ch' io reputo convenire alla naturale costituzione del problema delle pressioni, e coll'avvertenza sopratutto di non usare del sussidio dell' equazione che la somma di esse equivaler debba al peso intero del corpo; il che è lo stesso che ammettere per cognita una condizione tuttavia incognita, e su di cui anzi è chiamato il Geometra a scoprire le posizioni degli appoggi nelle quali, o tutti, o in parte soffrano pressione; confermato dico di ottenere col proposto mio metodo una soluzione determinata sì pel caso di tre appoggi in triangolo, che di quanti si vogliano in direzione rettilinea collocati, mi

corse tosto in pensiero il dubbio, che il difetto della generale soluzione analitica pel caso dei quattro appoggi agli angoli d'un trapezio, come si è notato (§. IV), derivasse non già dall'insufficienza dell'assunto principio meccanico, ma dalla non aggiustata applicazione di esso, onde avere i convenevoli risultati nel passare ad una soluzione concreta e propria d'una data particolare posizione degli appoggi e del centro di gravità del corpo. Con tale prevenzione m'accinsi nuovamente a tale ricerca, prendendo principalmente per guida quelle nozioni che potei rilevare dalle sperienze che ora qui sotto rappresenterò.

§. XVIII

Sulla superficie di un grosso cartone del peso di oncie 36, e di figura rettangolare KVZO (*Fig. XII*), ho condotta pel punto G che corrispondeva nella verticale del suo centro di gravità G, e che trovavasi nell'intersecazione delle diagonali KZ, VO, la BGD parallela a'lati opposti KV, OZ, cioè perpendicolare agli opposti KO, VZ, e fatta BG uguale a GD, ho fissata per unità la sesta parte di tutta la BD. Tirata poscia la retta ADM ad angoli retti alla stessa BD in D, e presa AD eguale a quattro di dette unità, e DM doppia della AD, ho congiunta la retta BM, a cui, divisa per mezzo in E, innalzai la perpendicolare EC uguale alla BG, o GD. Unite le rette AB, BC, CM, e così conformato il quadrilatero ABCM tale che il punto G esistente nella superficie del cartone, e nella verticale innalzata dal suo centro di gravità, era compreso, menata l'altra diagonale AC, ne' due triangoli ABM, ABC; ed inseriti quattro eguali piedi agli angoli A, B, C, M, appoggiai il cartone KZ sul piano soggetto PS, su cui ho eseguiti gli sperimenti.

I.° Soprapponendo de' pesi sul punto G a grado che violentata era a farsi concava la superficie del cartone KVZO, nullaostante tutti e quattro i piedi si affrontavano contro il

piano

piano soggetto; il che, a differenza del caso che disposti sieno in direzione rettilinea (§. XV), dimostra che nessuno di essi va esente dal sofferire pressione, e di trasferirla sul piano stesso.

II.° Trasportato il cartone KZ, anche caricato d'un peso sul punto G, di modo che il piede C sortisse fuori del piano soggetto, rimaneva esso in quiete su i tre piedi A, B, M; e facendo sortire il piede M restava pure in quiete su gli altri tre piedi A, B, C.

III.° Cadendo fuori del piano soggetto il piede A, capovolgevasi il cartone rotando sulla diagonale BM, ed innalzandosi dallo stesso piano, il piede più lontano C; e così, spingendo fuori del piano soggetto il piede B, rotavasi sulla diagonale AC, sollevandosi il più lontano piede M.

IV.° Tirando fuori del piano soggetto i piedi a due a due collegati in un lato del trapezio ABCM, il cartone KZ si disponeva alla rotazione sul lato opposto: sicchè portando fuori i piedi A, M la rotazione facevasi sul lato BC; sul lato CM cadendo fuori i piedi A, B; sul lato AM facendosi sortire i piedi B, C; ed in fine sul lato AB non poggiando i piedi C, M sul piano soggetto.

V.° Delineati sul cartone i quattro rami AG, GB, GC, GM, osservai che inclinava esso a rotarsi secondo la direzione di essi, trasportando fuori del piano soggetto i tre piedi opposti: vale a dire i piedi B, C, M riguardo al ramo AG, gli A, M, C rispetto al ramo BG, gli A, B, M, pel ramo GC, e gli A, B, C pel ramo GM.

§. XIX

Nessuno potrà opporre che così fatti sperimenti non inducano a giudicare, che se il principio meccanico de' momenti è atto a dare la ricercata generale soluzione determinata del problema delle pressioni, questa dee resultare, o col considerare le rotazioni su i due assi del trapezio ABCM (sperim. 3),

o quelle intorno a' suoi lati (sperim. 4), o per ultimo le rotazioni nella direzione de' rami AG, GB, GC, GM (sperim. 5). Quindi imprenderemo ad analizzare i resultati proprj alle applicazioni accennate, e ciò alla bella prima in via concreta, come sembra dover essere trattato questo problema, in cui i resultati aver devono un' immediata relazione non solo alla prescritta scambievole posizione degli appoggi, ma eziandio a quella che hanno verso il centro di gravità del corpo, da cui emanano le pressioni sopra di essi. Suppongasi pertanto che il trapezio ABCM (*Fig. XIII*) sia simile a quello usato nell' apparecchio sperimentale (§. XVIII), onde sia $BG = GD = 3$, $AD = 4$, $DM = 8$, $CE = 3$; e sarà $AG = 5$, la diagonale $BM = 10$, la diagonale $AC = \sqrt{311.2} : \sqrt{5}$. Sia poscia *a* il punto in cui il ramo AG prodotto sega la diagonale BM, e *d* quello in cui la BD sega la diagonale AC, e facilmente si troverà che $Ga = \frac{5}{2}$, $Ba = \frac{25}{10}$, $aM = \frac{75}{10}$, $Gd = \frac{39}{49}$, $Ad = \frac{20}{49} \cdot \frac{\sqrt{311.2}}{\sqrt{5}}$, e $dC = \frac{29}{49} \frac{\sqrt{311.2}}{\sqrt{5}}$; e quindi con questi dati si troverà, per la già nota, e comunemente adottata soluzione di tre appoggi in triangolo, che rappresentato il peso del corpo, di cui G è il centro di gravità, dal numero 36; le pressioni su gli appoggi A, B, M, chiamate collo stesso nome di essi, come sempre faremo, supposto non esistente il quarto C, saranno nel triangolo ABM, $A = 12$, $B = 18$, ed $M = 6$; e le pressioni su gli appoggi A, B, C nel triangolo ABC, supposto non esistente il quarto M, saranno $A = 16\frac{26}{31}$, $B = 7\frac{17}{31}$, e $C = 11\frac{19}{31}$.

§. XX

Premessi i riferiti calcoli passiamo ad esaminare i resultati che ottengonsi coll' ammettere primieramente, che la so-

luzione del problema di determinare le pressioni sofferte da' quattro appoggi A, B, C, M dipenda dalle due rotazioni intorno agli assi BM, AC. È manifesto che pel principio meccanico de' momenti, la rotazione sull' asse BM fa riguardare AG*a* come un vette in cui nell' estremità *a* sta il centro del moto, e che perciò debba essere la pressione sull' appoggio $A = 12$; e che similmente l' istantanea rotazione sull' altro asse AC fa considerare BG*d* come un vette di cui il centro del moto è all' estremità *d*, e che perciò la pressione sull' appoggio B sia $7 \frac{17}{31}$. Concluso ciò non si presenta altro artifizio per rintracciare le pressioni su gli altri due appoggi M, C, che quello di ricorrere alla condizione inerente del problema, cioè che tutti e quattro insieme portano l' intero peso 36; e che però il richiesto scioglimento di esso debba conseguirsi dall' equazione

$$12 + 7 \frac{17}{31} + M + C = 36$$

cui è palesemente d' indole indeterminata. Ma potrebbe qui soggiungersi che il vette AG*a* dà anche la pressione di $M = 6$ nel triangolo ABM, e che il vette BG*d* dà la pressione di $C = 11 \frac{19}{31}$ nel triangolo ABC. Sommate però le quattro pressioni $A = 12$, $B = 7 \frac{17}{31}$, $C = 11 \frac{19}{31}$, ed $M = 6$; si ha il numero $37 \frac{5}{31}$ maggiore dell' intero peso 36; il che è resultato assurdo. L' artifizio in fine che sembra potersi adoperare nell' ipotesi di cui parliamo, si è di distribuire la pressione in *a* riguardo al vette AG*a* su i due appoggi B, M, e la pressione in *d* del vette BG*d* ne' due A, C, caratterizzando le diagonali BM, AC come due altri vetti ausiliarj; di maniera che raccogliendo in A le pressioni prodottevi da' due vetti AG*a*, BG*d*, e così in B le pressioni che vi producono i due vetti medesimi; sieno le quattro pressioni $A = 28 \frac{26}{31}$, $B = 25 \frac{17}{31}$,

$C = 11\frac{19}{31}$, ed $M = 6$: e siccome poi la somma di esse comparisce espressa dal numero 72, cioè doppia del fissato peso in G, come di fatti dee succedere, ponendosi agire esso, tanto se solamente esistesse nel triangolo ABM, quanto se pure esistesse nell'altro triangolo ABC unicamente; così si deliberasse che la metà delle dette pressioni fossero le vere sofferte dagli appoggi A, B, C, M, cioè che fosse $A = 14\frac{52}{124}$, $B = 12\frac{96}{124}$, $C = 5\frac{100}{124}$, ed $M = 3$. Questa è appunto la soluzione *Lorgna* spogliata dell'apparato geometrico e condotta al concreto.

§. XXI

Se io opinai che la predetta soluzione dipende dal dimostrare l'enunciato teorema, cioè che la distribuzione del peso del corpo sugli appoggi debba seguire la sopraindicata proporzione (§. VI), il che vale tanto, quanto il chiedere la soluzione del problema stesso; comparse essa così strana a' Geometri che in seguito la considerarono (§§. VI, VII), che la definirono, chi per *capricciosa*, e chi per *inammissibile*, e come io suppongo, per le ragioni stesse ch'io la chiamai *arbitraria*, sì per l'ipotesi su cui è fondata, che per l'artifizio con cui si è dall'Autore resa capace all'intrinseca e naturale condizione del problema, che la somma cioè delle pressioni equivaler debba al peso totale del corpo puramente. Eppure se tale soluzione non conviene al problema delle pressioni, essa è però una tra le infinite che appartengono al problema statico, in cui si ricercano le forze verticali disposte in un dato sistema, dato essendo il peso che debbono sostenere. Imperciocchè immaginato diviso il peso in G in due eguali parti, è evidente, che determinate le tre forze verticali d'applicarsi a'tre punti A, B, M per l'equilibrio della metà del peso G supposto giacente nel punto G

del triangolo ABM; e così ancora le tre forze d'applicarsi a' punti A, B, C per l'equilibrio dell'altra metà del peso G giacente nel triangolo ABC, è evidente dico, che raccolte insieme e ridotte a solo due le quattro forze, che ne' due separati equilibrj sonosi respettivamente determinate per i punti A, B; queste due forze operando d'accordo con le due trovate per i punti C, M, mentre vorrebbero rappresentarsi con esse le pressioni su gli appoggi A, B, C, M, rappresentano le forze verticali che agir dovrebbono a' punti stessi per l'equilibrio del dato sistema ABCMG. Per conoscere poi ciò praticamente, si divida il lato CM del trapezio ABCM, di modo che i segamenti Cm, Mm sieno in reciproca ragione delle supposte pressioni $5 \frac{100}{124}$, e 3, ne' punti C, ed M; e si avrà $Cm = \frac{31}{91}\sqrt{34}$, ed $Mm = \frac{60}{91}\sqrt{34}$; indi si congiunga mG, e prolungata seghi in b il lato opposto BA, e trovati i segamenti, co' dati già espressi (§§. XVIII, XIX), $Bb = \frac{298}{281}\sqrt{13}$, $Ab = \frac{264}{281}\sqrt{13}$, $mG = \frac{1}{91}\sqrt{357817}$, e $bG = \frac{1}{281}\sqrt{357817}$; si riscontrerà che i segamenti Bb, Ab hanno la ragione reciproca delle supposte pressioni $12 \frac{96}{124}$, $14 \frac{52}{124}$ ne' punti B, ed A; e che i segamenti mG, bG stanno in reciproca ragione della somma delle indicate pressioni in A e B, concentrate nel punto b, alla somma delle pressioni in C ed M concentrate in m; come conviene che sia, ricercandosi quattro tra le infinite forze verticali, che stieno in equilibrio nel dato sistema: problema già che mostrai (§. X) esser soggetto alla teorìa del centro di gravità.

§. XXII

L' altra soluzione del problema degli appoggi stabilita sulla teorìa medesima, è quella dataci dal chiarissimo Collega il Sig. *Ferroni* (§. VIII). Sospendendo per poco di proseguire nel già cominciato esame sull' uso del principio meccanico de' momenti in tale questione, reputo opportuno, per mantenere possibilmente il miglior ordine nelle cose che mi restano ad esporre, di ridurre ora al concreto anche l'enunciato metodo dal prelodato Autore proposto. Sia perciò ABCM (*Fig. XIV*) il solito trapezio, e divisi per mezzo i lati opposti BC, AM ne' punti O, *o*, si meni la retta O*o*, cui divisa per mezzo in Z, sarà il punto Z il centro di gravità dei quattro punti A, B, C, M, o com' egli lo chiama, il *centro delle medie distanze*, ed unito questo punto col centro di gravità G del corpo, concorra la ZG prodotta col lato AB in X. Per le note dimensioni poscia del trapezio ABCM (§. XVIII), si trova che $GX = \frac{40}{51.20}\sqrt{2410}$, $GZ = \frac{1}{20}\sqrt{2410}$, e perciò tutta la $XZ = \frac{91}{51.20}\sqrt{2410}$; ed inoltre si trova che è $AX = \frac{3180}{3.51.20}\sqrt{13}$, e $BX = \frac{2940}{3.51.20}\sqrt{13}$, essendo l' intera AB $= 2\sqrt{13}$. Supposto pertanto essere 36 il peso concentrato nel punto G, e riguardato ZGX come un vette da sostenersi alle estremità Z, X; si ha che il punto Z viene caricato del peso $15\frac{75}{91}$, ed il punto X del peso $20\frac{16}{91}$. È poi noto per la teorìa del centro di gravità che il peso Z si distribuisce egualmente su i quattro punti A, B, C, M, ed il peso in X ne' punti A, B in reciproca ragione delle distanze AX, BX: quindi le forze per l' equilibrio del peso in G, esser dovrebbero in $A = 13\frac{59}{91}$, in $B = 14\frac{40}{91}$, in $C = 3\frac{87}{91}$, ed in $M = 3\frac{87}{91}$, che

insieme prese esattamente lo pareggiano, e si vorrebbero rappresentare con esse le pressioni su gli appoggi A, B, C, D. Può bene corrispondere l'ingegnoso metodo al caso dei tre appoggi in triangolo, e ad altri casi particolari, nel dare risultati non repugnanti, come ha già dimostrato il Sig. *Ferroni*; che nullameno, e come egli stesso dichiarò, non lo assicura ciò dal non doversi annoverare fra gl'ipotetici o deficienti di dimostrazione; al che se giugner si potesse, si perverrebbe ad iscoprire il fenomeno veramente mirabile, che dei quattro appoggi A, B, C, M, i due C, ed M nell'assunto sistema, oppure anche i tre B, C, M, ovvero i tre A, M, C, incontrando la retta ZG, o il punto A, o il punto B, fossero ad eguale pressione sottoposti.

§. XXIII

Non dovendosi trascurare tutto ciò che può servire di lume, ove si tratti singolarmente d'un difficile argomento com'è il presente, investigheremo se a simiglianza della soluzione *Lorgna* (§. XXI) anche quella del Sig. *Ferroni* sia da riporsi tra le infinite che all'equilibrio d'un sistema di forze verticali convengono. E poichè sono eguali le forze equivalenti alle pressioni in C, ed M (*Fig. XV*), si divida il lato $CM = \sqrt{34}$ per mezzo in m, e sarà $Cm = mM = \frac{1}{2}\sqrt{34}$, e congiunta la retta mG si prolunghi e seghi l'opposto lato AB in a, e si determinino i valori di $Aa = \frac{73}{71}\sqrt{13}$, di $Ba = \frac{69}{71}\sqrt{13}$, essendo tutta la $AB = 2\sqrt{13}$, di $mG = \frac{1}{10}\sqrt{4770}$, di $Ga = \frac{2}{71}\sqrt{4770}$, e sarà tutta la $mGa = \frac{91}{10 \cdot 71}\sqrt{4770}$. Quindi si avrà, che le forze $13\frac{59}{91}$, $14\frac{40}{91}$, colle quali vogliono rappresentarsi le pressioni in A, e B, hanno la ragione reciproca de' segamenti Aa, Ba, e che la somma $7\frac{83}{91}$ delle supposte eguali pressioni in C,

ed M concentrata in m, alla somma delle supposte préssioni in A, e B, che è $28\frac{8}{91}$, concentrata in a, ha la ragione reciproca del segamento mG al segamento Ga. Dunque mGa è uno degli infiniti assi che possono condursi pel punto G, onde determinare quattro forze che agendo verticalmente ai quattro punti A, B, C, M si equilibrino colla data forza resultante in G. Confrontando le quattro forze verticali da questo metodo dedotte (§. XXII) con quelle che al sopra ricordato metodo *Lorgna* (§. XX) appartengono, si osserva che l'asse a'Gm', da cui nasce la proporzione di dette forze in questo, pel suddetto equilibrio, cade in a' sotto l'estremità a, ed in m' sopra l'altra estremità m dell'asse aGm che dà la proporzione delle forze per l'equilibrio medesimo, secondo il metodo del Sig. *Ferroni*.

§. XXIV

Ma ritornando all'esame della validità del principio meccanico de' momenti per la soluzione del problema, facciamone l'applicazione dipendentemente alle quattro rotazioni (§. XIX) intorno ai lati del trapezio ABCM (*Fig. XVI*). Si prolunghino da una o da ambedue le parti i lati del detto trapezio secondo occorre nella già cognita sua configurazione (§. XVIII), e si calino dagli appoggi A ed M, e dal centro di gravità G del corpo le perpendicolari AR, GT, MS al lato opposto BC; le AF, GH, BL al lato MC; le BD, GD, CN al lato AM; e le CP, GQ, MO al lato AB. I valori delle nominate perpendicolari poscia saranno come segue, a' quali si è nello stesso tempo affisso il simbolo letterale per semplificare il calcolo, cioè $AR = \frac{3.31\sqrt{2}}{5\sqrt{17}} = h$, $GT = \frac{3.29}{5\sqrt{34}} = s$, $MS = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = l$, $AF = \frac{27.12}{5\sqrt{34}} = a$, $GH = \frac{61.3}{5\sqrt{34}} = p$, $BL = \frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = 6$, $BD = b = c$,

GD

$=3=q$, $CN=\frac{27}{5}=d$, $CP=\frac{3.31}{5\sqrt{13}}=g$, $GQ=\frac{6}{\sqrt{13}}=r$, ed $MO=\frac{12.51}{17\sqrt{13}}=f$. Denominato G il peso del corpo, o la forza premente nel suo centro di gravità G; è manifesto che il principio de' momenti applicato alle rotazioni su i lati del trapezio, darà le quattro equazioni

$$(1) \ldots\ldots Ah+Ml=Gs$$
$$(2) \ldots\ldots Aa+Bb=Gp$$
$$(3) \ldots\ldots Bc+Cd=Gq$$
$$(4) \ldots\ldots Mf+Cg=Gr$$

ricavato dalle (1) (2) il valore di A dato per M e B, e dalle (3) (4) quello di C dato per M e B, si trova in fine il valore di B, cioè

$$B=\frac{G\left((dr-gq)al+(ph-as)fd\right)}{bhfd-aclg}$$

cui in concreto diventa $B=G\left(\frac{1321920}{0}\right)$, cioè infinito, ed infiniti in conseguenza anche quelli di A, M, C: risultato impossibile o assurdo, che voglia dirsi. Ma potrebbe opporsi che una delle equazioni che introdurre devonsi sia quella della somma delle pressioni, e che perciò non debba farsi conto specialmente della rotazione dei due appoggi C ed M, come quelli a' quali mancando ad uno ad uno il piano soggetto (§. XVIII, sp. 2) rimane niente meno il corpo sostenuto in quiete dai tre restanti; sicchè sieno le debite equazioni per la soluzione del problema le seguenti

$$(1) \ldots\ldots Ah+Ml=Gs$$
$$(2) \ldots\ldots Aa+Bb=Gp$$
$$(3) \ldots\ldots Bc+Cd=Gq$$
$$(4) \ldots\ldots A+B+C+M=G$$

Veggiamo però quali valori somministrino esse per le ricercate pressioni. Si trovino dalle due (1) (2) i valori di A, dati, uno per M, e l'altro per B, e sostituendo nella (4) il valore di C dato per B, che dà la (3), si ricavi un terzo va-

lore di A dato per B ed M: in seguito si paragonino i primi due valori di A per avere quello di M dato per B, ed il secondo pure di A, con il detto terzo valore di essa, onde avere un altro valore di M dato per B, col quale paragonando l'antecedente si perverrà a conoscere che è

$$B = \frac{G\left((ds + ql - dl)a + (l - h)dp\right)}{al(c - d) + bd(h + l)}$$

Surrogando i valori numerici corrispondenti ai letterali si scopre, che $B = \frac{G.0}{150660}$, cioè che nulla è la pressione sull'appoggio B, e che inoltre la somma delle sole due pressioni A, e C resulta maggiore del totale peso G; il che termina di mostrare la falsità della tentata soluzione.

§. XXV

L'ultima applicazione del principio meccanico de'momenti che ci rimane di porre a cimento è quella di considerare (§. XIX) le quattro rotazioni in direzione de' rami GA, GB, GC, GM (*Fig. I*), ovvero intorno ai quattro assi RAI, DBE, FCP, QMS ad essi perpendicolari. Il trapezio su cui faremo la presente ricerca sia quello che adoperai nella mia Memoria (Tom. VIII, P. I), ed in cui supposi il ramo $AG = 20 = a$, $BG = 27 = b$, $CG = 31 = c$, ed il ramo $GM = 23 = d$, ed inoltre l'angolo $AGB = 110°$, l'angolo $BGC = 78°$, l'angolo $CGM = 46°$, sicchè era l'angolo $AGM = 126°$. Ho eletto questo trapezio in cui eziandio a simiglianza dell'altro impiegato nelle superiori disamine, il punto G in cui si contempla raccolto il peso del corpo, o sia la forza premente su i quattro appoggi A, B, C, M, sta dentro i triangoli ABM, ABC, sì per avere in pronto parecchi elementi occorrenti nelle pratiche applicazioni, che per essere essi derivati dalle date lunghezze de' rami, e dagli angoli dati delle scambievoli loro inclinazioni, che conducono a risultati più prossimi a' veri. E poichè viene dalla sperienza comprovato che hanno luogo

in natura le quattro rotazioni su rammemorate (§. XVIII, sp. 5) sembrerebbe certamente che anche le quattro equazioni (§. I) instituite e proprie dell'enunciato principio de' momenti coll' eguagliare, facendo l'appoggio all'estremità d'ogni ramo la funzione di centro del moto, i momenti delle incognite pressioni su i tre restanti appoggi, al momento del peso G respettivamente all'asse competente al ramo stesso, dovessero essere atte a dare la compiuta soluzione del problema. Ella è verità però di fatto che dallo sviluppo di esse non ottengonsi che valori per le ricercate pressioni di aspetto indeterminato ed inconcludenti (§. IV), se si eccettui la circostanza che G sia e centro di gravità del corpo, e di quattro corpi eguali collocati ne' punti A, B, C, M, in cui le predette equazioni danno valori determinati, e fanno rilevare che eguali sono le pressioni su i quattro appoggi, e ciascuna uguale alla quarta parte del peso del corpo (§. V): nullameno io sono d'avviso, come superiormente dissi (§. XVII), e tanto più dopochè l'esperienza mi accertò accadere siffatte rotazioni, da me prima soltanto coll'immaginazione concepite, che tale strano risultamento provenga dall'indole del problema per cui debba trattarsi concretamente, cioè per ispiegarmi in qualche maniera, col maneggio immediato de' dati che fissano la vicendevole posizione degli appoggi e del centro di gravità del corpo.

§. XXVI

Dopo varj tentativi che in seguito esporrò, m'è riuscito, se non erro, scoprire finalmente il difetto nelle mentovate equazioni, per cui vane rendonsi alla soluzione del problema. Primieramente, e poichè tirandosi solo fuori del piano soggetto l'appoggio M non viene tolto l'equilibrio nel corpo, è chiaro, che nella rotazione sull'asse PCF esso non contribuisce se non in quanto posto in libertà dà luogo agli altri due B ed A non più di rotarsi sul lato opposto CM, ma

secondo la direzione del ramo GC, o sia sull'asse anzidetto, perciò escluder devesi il suo momento in tale rotazione: per la stessa ragione escluder devesi il momento dell'appoggio C nella rotazione di esso con gli A, B in direzione del ramo GM, ovvero sull'asse QMS. Osservandosi in secondo luogo, che qualora l'appoggio B è tirato fuori del piano soggetto, viene per contrario tolto l'equilibrio al corpo rotandosi sulla diagonale AC; così non può non arguirsi, che esso pure concorra con gli altri due C ed M, i quali essendo soli fuori del piano soggetto si rotano sul lato opposto AB, onde far succedere la rotazione secondo il ramo GA, cioè sull'asse RAI; e che per lo stesso motivo l'appoggio A concorra nella rotazione dei tre A, M, C nella direzione del ramo GB, cioè sull'asse DBE. Quindi è da conchiudersi la regola " che nel-
,, le rotazioni sugli assi PCF, QMS condotti per gli appoggi
,, M, C, i quali sortendo ad uno ad uno fuori del piano sog-
,, getto, non perciò rimane immobile il corpo, debbansi com-
,, putare i momenti soltanto dei due appoggi A, e B; e che
,, nelle rotazioni sugli assi RAI, DBE che passano pegli ap-
,, poggi A, B, che trasportati ad uno ad uno fuori del pia-
,, no soggetto ponesi il corpo in movimento, rotando sulle
,, diagonali BM, AC, valutare debbansi tutti e tre i momenti
,, degli appoggi M, C, B riguardo alla prima, e tutti e tre
,, quelli degli A, M, C rispetto alla seconda.

§. XXVII

Per difendere l'enunciata regola, benchè appoggiata a osservazioni sperimentali, da ogni maniera di controversie, imprenderemo l'esame de' risultati pratici che ella presenta nella sua applicazione al problema, singolare nella scienza meccanica, di cui si tratta. I materiali occorrenti per arrivare a questo scopo sono i valori delle distanze, cioè delle perpendicolari calate dagli appoggi ai quattro assi, i quali, conservando le denominazioni di esse (§. I), nelle date lun-

ghezze ed inclinazioni de' rami (§. XXV), sono, usando del calcolo trigonometrico, prossimamente

$AD = f = 33{,}8404$	$CE = m = 20{,}5547$
$AH = g = 50{,}8054$	$CL = n = 50{,}6983$
$AQ = \delta = 34{,}7557$	$CS = \gamma = 1{,}4656$
$BI = h = 29{,}2345$	$MR = p = 33{,}5191$
$BF = l = 25{,}3864$	$MN = q = 39{,}8614$
$BZ = \lambda = 38{,}0982$	$MP = \omega = 15{,}0229$

Giova inoltre per i confronti, che faremo, avere preparati anche i valori delle pressioni su gli appoggi A, B, M del triangolo ABM nella supposizione che il corpo sopra di essi solamente giacesse; e così quelli delle pressioni su gli appoggi A, B, C nel triangolo ABC. Eseguiti gli opportuni calcoli, notando col numero 36 il peso del corpo, si trova che le pressioni nel triangolo ABM, sono $A = 13{,}28$, $B = 9{,}63$, ed $M = 13{,}9$; e nel triangolo ABC, $A = 20{,}86$, $B = 2{,}20$, e $C = 12{,}94$. Poste queste cose avremo pel principio meccanico de' momenti applicato al problema colla predetta regola le quattro equazioni

$$(1) \ldots\ldots Ag + Bl = Gc$$
$$(2) \ldots\ldots A\delta + B\lambda = Gd$$
$$(3) \ldots\ldots Af + Mq + Cm = Gb$$
$$(4) \ldots\ldots Bh + Cn + Mp = Ga$$

Le due (1) (2) danno i valori delle pressioni sugli appoggi A, e B, cioè

$$A = \left(\frac{c\lambda - dl}{g\lambda - l\delta}\right) G, \quad B = \left(\frac{dg - c\delta}{g\lambda - l\delta}\right) G$$

che in concreto nel sistema ABCMG che abbiamo scelto, sono $A = \frac{597{,}1570}{1053{,}2722} \cdot G$, $B = \frac{91{,}0975}{1053{,}2722} \cdot G$. Dalle due equazioni poi (3) (4), cognite essendo le pressioni A, B, si ricavano i valori delle pressioni sopra gli altri due appoggi C ed M, che sono

$$C = \left(\frac{a'q - b'p}{nq - pm}\right) G, \quad M = \left(\frac{b'n - a'm}{nq - pm}\right) G$$

in cui chiamati φ e π i prodotti delle frazioni che determinano i valori delle pressioni A, B per f ed h, si sono fatte le sostituzioni di $b' = b - \varphi$, e di $a' = a - \pi$. Posti in tali formole i valori numerici, si trova la pressione $C = \frac{343,6191}{1053,2722} \cdot G$, e la pressione $M = \frac{28,5380}{1053,2722} \cdot G$; ed essendo il peso $G = 36$, i prossimi valori delle quattro pressioni sono $A = 20,41$, $B = 3,11$, $C = 11,74$, ed $M = 0,97$, le quali sommate eccedono il peso 36 di 23 centesime circa, eccesso, che come ognun vede, deriva dall'imperfezione dei valori delle distanze degli appoggi agli assi adoperati nel calcolo.

§. XXVIII

Trovo a proposito di manifestare qui i tentativi che mi diressero alle considerazioni esposte nel superiore §. XXVI valendo essi a convalidare l'instituzione delle equazioni, che si è fatta nell'antecedente, per la soluzione del problema. Il primo tentativo pertanto fu quello di riguardare operosi nelle rotazioni su gli assi DBE, RAI i momenti delle pressioni su gli appoggi A, M, e B, C, ed inutili i momenti delle pressioni sugli eccentrici C ed M, come quelli che tirati fuori ad uno ad uno del piano soggetto, resta tuttavia immobile il corpo su i tre restanti; per il che, date essendo le pressioni sugli appoggi A, B dalle due equazioni (1) (2), ricavar si dovessero quelle dei M, C dalle due (5) (6)

$$(5) \ldots\ldots Af + Mq = Gb$$

$$(6) \ldots\ldots Bh + Cn = Ga$$

Il secondo tentativo poscia è stato di valutare nelle predette rotazioni i momenti soli delle pressioni su gli appoggi A, C, e B, M, per la ragione che anche in questa ipotesi il corpo rimane immobile cadendo fuori del piano soggetto ad uno ad uno i due rimanenti M, e C; e che perciò le pressioni sugli appoggi C ed M dedurre si dovessero dalle due equazioni (7) (8)

$$(7) \ldots\ldots Af + Cm = Gb$$
$$(8) \ldots\ldots Bh + Mp = Ga$$

E per ultimo di computare nelle stesse rotazioni i soli momenti delle pressioni M, C tanto riguardo all' asse DBE che allo RAI, considerando inoperosi i momenti delle pressioni A, B, come sonosi considerati gli stessi delle M, C nelle rotazioni sugli assi PCF, QMS, quantunque col cadere fuori del piano soggetto ad uno ad uno gli appoggi A, B non rimanga immobile il corpo, come succede per gli altri due M, C; e quindi che fossero a desumersi le pressioni M, C dalle due equazioni (9) (10)

$$(9) \ldots\ldots Mq + Cm = Gb$$
$$(10) \ldots\ldots Mp + Cn = Ga$$

Chiaramente però riconosconsi assurde le tre immaginate supposizioni: imperocchè nella prima la somma delle quattro pressioni su gli appoggi A, B, C, ed M risulta prossimamente un quinto maggiore del peso del corpo, nella seconda, la metà, e nella terza più assurda di tutte, oltre al riuscire la somma delle pressioni maggiore della terza parte circa del peso del corpo, si presenta negativa la pressione sull' appoggio C.

§. XXIX

Secondo il metodo *Lorgna* (§. VI) dalle pressioni superiormente calcolate (§. XXVII) convenienti ai due triangoli ABM, ABC (*Fig. XVII*), supposti isolatamente aggravati del peso del corpo, si deduce che esser dovrebbero con approssimazione le pressioni sugli appoggi nel proposto sistema ABCMG, seguendo l' ordine A, B, C, M

17,7 , 5,92 , 6,47 , 6,54

essendo esse per la nostra soluzione

20,41 , 3,11 , 11,74 , 0,97.

Come differiscano in quantità queste respettivamente a quelle non v' ha duopo che dell' oculare ispezione. Quanto poscia

lontani sieno i risultati nostri da quelli che otterrebonsi dall' altro ideato metodo del Sig. *Ferroni* (§. VIII), basta considerare, che essendo il punto O centro delle medie distanze, il quale nel dato sistema cade tra la retta BGΔ e la diagonale BM, e che congiunta le retta OG; se questa prolungata passa per l'appoggio A devono essere ugualmente caricati i tre B, C, ed M, se sega il lato AB lo devono essere solamente i due C, ed M, e così se sega il lato AM i soli due B, C; mentre le pressioni da noi scoperte, per esempio, sugli appoggi B, C, M, sono 3,11, 11,74, 0,97. E poichè inoltre, parlando della nostra soluzione, nelle date lunghezze ed inclinazioni de' rami (§. XXV), sono i prossimi valori di AM = 38,34, e di BC = 36,63; divisa la AM in reciproca ragione delle pressioni 20,41, 0,97 su gli appoggi A ed M, sarà A*a* = 1,55, ed M*a* = 36,79. Congiunta quindi la retta G*a*, si prolunghi e seghi l'opposta BC in *c*; e si troverà nel triangolo GM*a*, G*a* = 18,67, e nel triangolo BG*c*, G*c* = 26,82, e B*c* = 29,47, e perciò sarà C*c* = 7,16. Ciò fatto si rileva con quella approssimazione che è permessa dall'usato calcolo, che le pressioni 3,11, 11,74 su gli appoggi B, C hanno la ragione reciproca de' segamenti B*c*, C*c*; e che la somma 21,38 delle pressioni in A ed M, alla somma 14,85 delle pressioni in B e C sta in ragione reciproca delle G*a*, G*c*; in guisa che praticamente si conosce, che il centro di gravità G del corpo, è centro anche di gravità delle pressioni che porta sugli appoggi A, B, C, M che lo sostengono, come s'è dimostrato dover essere (§. X). Atte poi sono a dare l'esatta dimostrazione di questo non meno specioso che interessante teorema, le equazioni (1) (2) (3) (4) (§. XXVII), trovandosi per avventura il detto centro di gravità O (*Fig. XVII*) situato dentro i triangoli ABM, ABC; avvegnachè sostituendosi per *a*, *b*, *c*, *d* i valori che competono alla fatta supposizione (§. V), risultano le pressioni A, B, C, D eguali ogn'una alla quarta parte del peso del corpo.

§. XXX

§. XXX

Osservando semplicemente che le due nominate soluzioni e la nostra adempiono ugualmente le due condizioni principali del problema, cioè, che la somma delle pressioni sugli appoggi pareggia il peso totale del corpo, e che il centro di gravità di esso è centro eziandio di gravità delle pressioni medesime, potrebbe taluno conchiudere, che siccome tutte e tre vere esser non possono, dando ciascuna resultati diversi, così, che nessuna di esse, o che indeciso restasse quale fosse da dichiararsi per l'esatta e legittima ricercata soluzione del problema. Ma per poco che attentamente si ponderino i metodi con cui si procede nelle due prime soluzioni in confronto del metodo da me proposto, si comprende ad evidenza, che la prima condizione necessariamente dee verificarsi in esse, dacchè si è introdotta come un dato nell' indagare le ricercate pressioni; e che la seconda doveva pure necessariamente comparire come propria della teorìa del centro di gravità per cui si pervenne alle soluzioni medesime (§§. XXI, XXII), le quali in conseguenza sono puramente da classificarsi tra le infinite che si possono assegnare dell'inverso indeterminato problema sull'equilibrio in un dato sistema di forze verticali. Ciò nulla ostante non sarà disutile il far vedere che dall'applicazione del nostro metodo al caso che il centro di gravità G del corpo (*Fig. XVIII*) diretto fosse nel punto x in cui il ramo BG prodotto incontra la diagonale AC, risultano nuove pruove, oltre alle già esposte, in confermazione delle fondamentali equazioni ch'esso somministra per la soluzione del problema negli altri casi. Nella detta supposizione si trovino i nuovi rami Ax, Bx, Cx, Mx, e gli angoli della mutua loro inclinazione, sulle già date lunghezze ed inclinazioni de' primi rami; e quindi si trovino ancora le lunghezze delle distanze degli appoggi agli assi perpendicolari a' detti nuovi rami. Ora siccome mancando nel caso supposto il piano soggetto ad ambedue gli appoggi B, M

nello stesso tempo, rimane tuttavia il corpo immobile, così, pel nostro metodo, non debbono computarsi nelle due rotazioni che succedono secondo la direzione AC intorno agli assi condotti per gli altri due appoggi C ed A, trascinati ad uno ad uno fuori del piano soggetto, insieme già con i detti due B ed M, se non che il momento di A nella prima, e di C nella seconda, e perciò il corpo verrà sostenuto dai soli due appoggi A, C in reciproca ragione de' segamenti Ax, Cx. Che se il centro di gravità del corpo cadesse nel punto x' in cui scambievolmente s' intersecano le diagonali AC, BM, valendo lo stesso ragionamento fatto per gli appoggi A, C anche per gli B, ed M, bisognerebbe dividere il peso del corpo in quattro parti proporzionali a' segamenti Ax', Cx', Bx', Mx', e la parte del peso rappresentata da Cx' sarà la pressione sull' appoggio A, e da Ax' la pressione in C, e così la parte del peso rappresentata da Mx' la pressione in B, e da Bx' la pressione in M. Seguendo i metodi *Lorgna* e *Ferroni*, non solo sono sottoposti a pressione tutti e quattro gli appoggi A, B, C, M essendo in x' il centro di gravità del corpo, ma lo sono pure se sia in x. Ritornando però al nostro assunto, determinate le parti del peso portate dagli appoggi A, C nel vette retto AxC, si scoprirà, fatte le debite sostituzioni, che le due equazioni (1) (2) del caso generale trattato nel superiore paragrafo XXVII, modificate alla particolare circostanza che cada il punto G in x, cioè che sia la pressione in B $=$ 0, dà non solamente la prima, come non può non essere, ma eziandio la seconda, egualmente che la pressione in A è quella che appartiene al detto vette retto AxC. Sostituendo inoltre nell' equazione (3) i valori delle pressioni competenti agli appoggi A, C nel vette retto AxC, si trova, come esser deve, che nulla è la pressione sull' appoggio M; e dall' equazione (4) risulta col supporre nulla la pressione in M, e che la pressione in C sia quella che conviene al vette retto AxC, che nulla è la pressione in B: oppure che poste nulle le pressioni in B, ed M, che la pressione in C è appunto quella che spetta al caso del vette retto AxC.

F
E
N
C
S
Z
H
P
M
2
C
B
G
A
M
3
A
E
B
O
I
M
D
C
C
M
5
A
G
C
b'
B
a'
c'
a
c
b
6
c
a
b
A
G
C
B
B
b
S
8
m'
m
M
B
A
C
D
G
P
b
a
c
d
S
9
K
B
A
C
D
O
G
P
b
a
c
d
S
B
b
S

Fig. 1.
2
3
4
5
6
7
8
9
10

13
B
C
a
b
G
E
m
d
A
D
M
14
B
O
C
X
G
Z
A
D
o
M
15
B
C
m'
a
a
G
m
A
D
M
17
B
C
C
O
G
A
a
M

Fig. 11

12

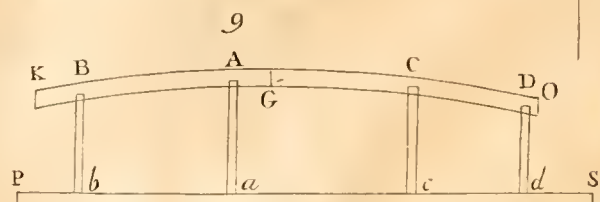
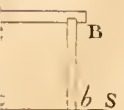
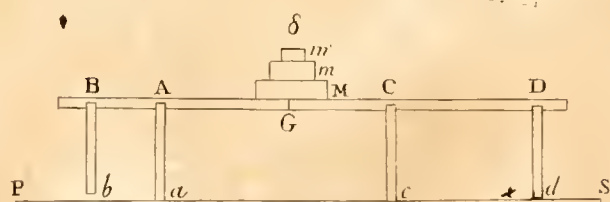
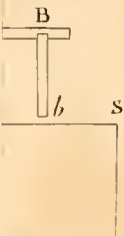
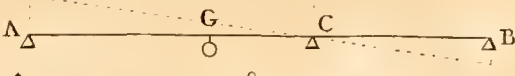
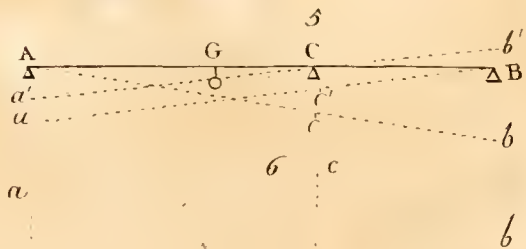
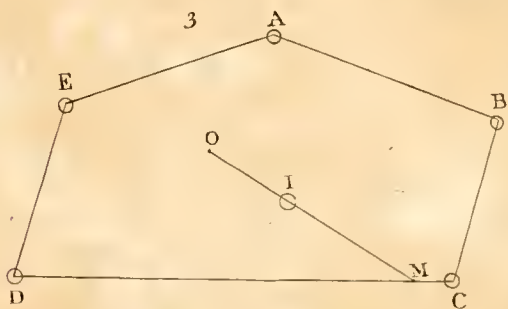
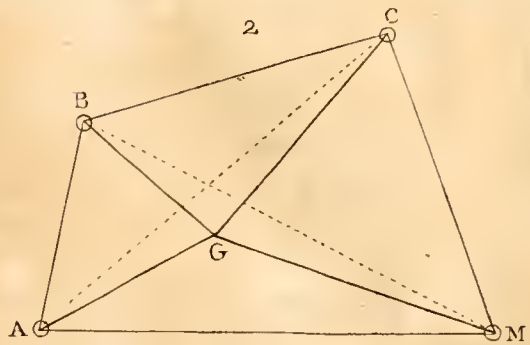
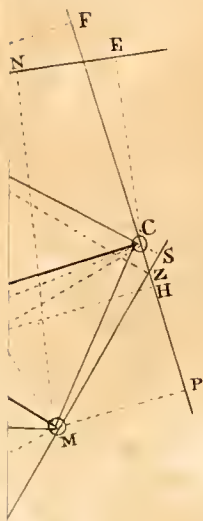
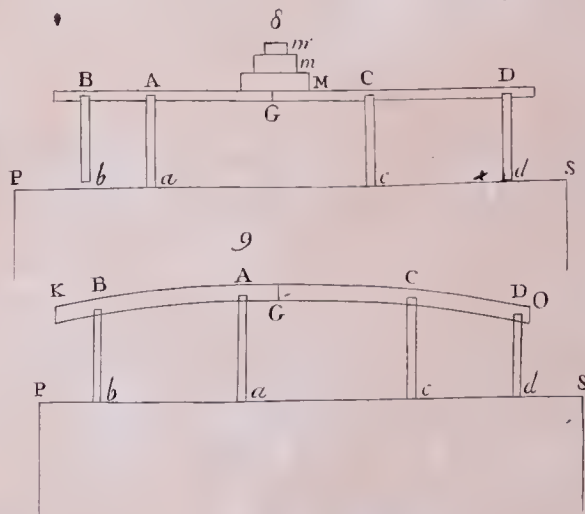
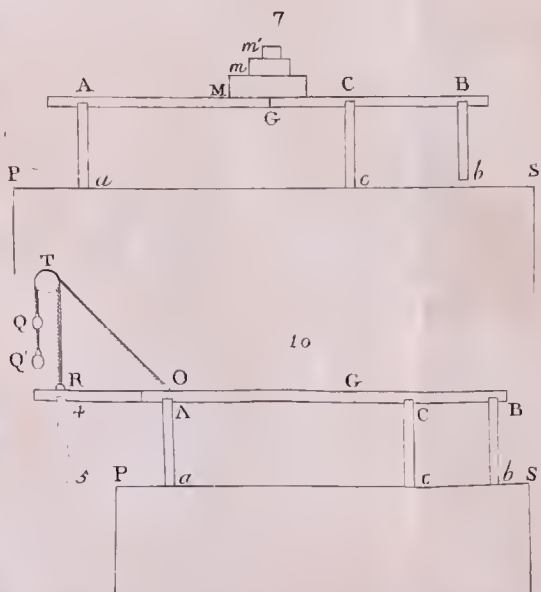
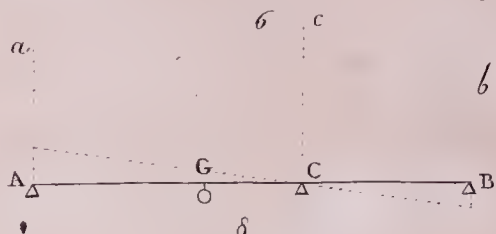
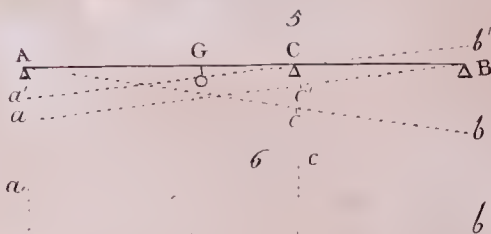
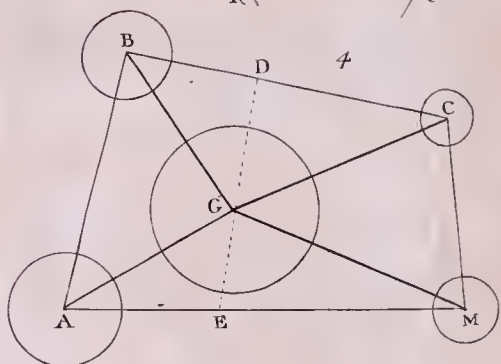
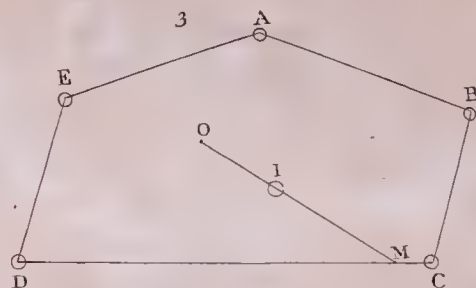
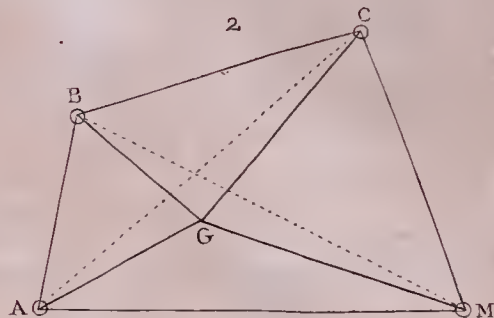
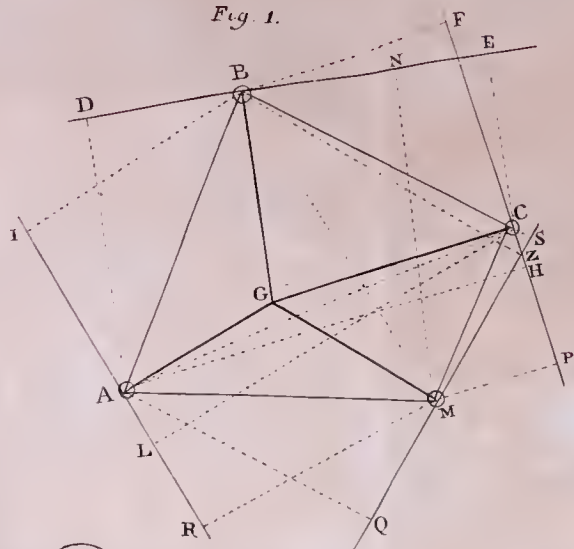
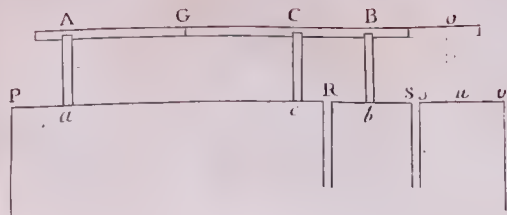
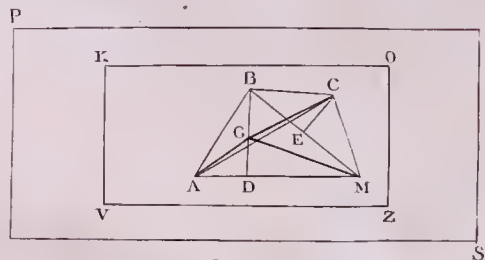
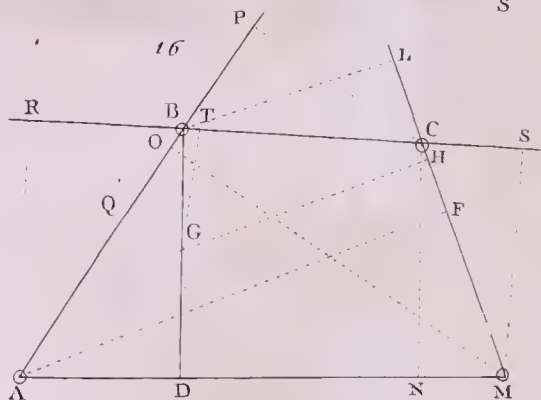
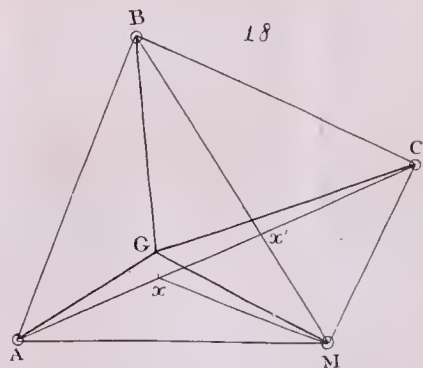
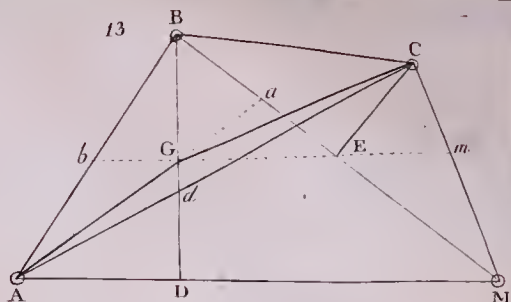
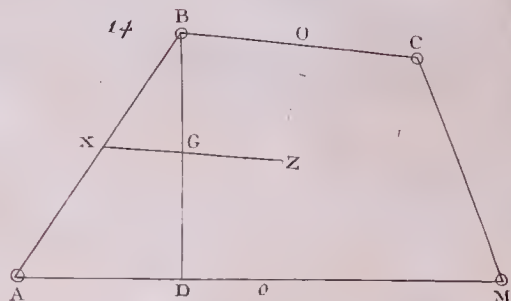
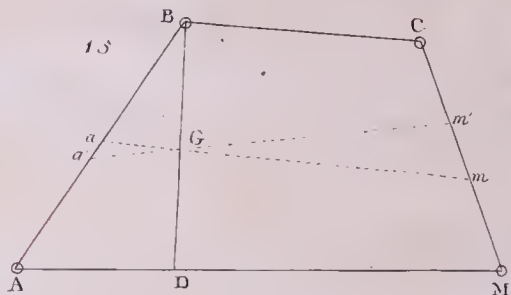
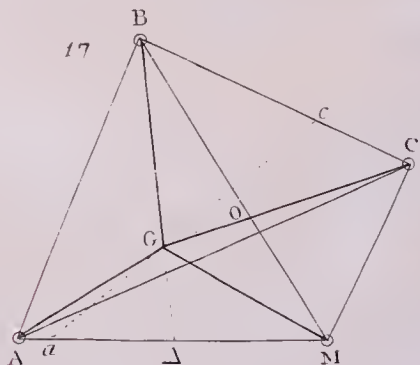
13

14

15

16

17

18

DESCRIZIONE, ED USO DI UNO STRATIMETRO, CIOÈ DI UN NUOVO STROMENTO DIRETTO A FACILITARE LA DETERMINAZIONE SI' DELLA COMUNE SEZIONE DI DUE STRATI, O FILONI, O PIANI QUALUNQUE, COME DI ALTRI OGGETTI DI GEOMETRIA SOTTERRANEA.

MEMORIA

Del Sig. Cav. Ermenegildo Pini.

Ricevuta li 16 *Marzo* 1810.

La Geometrìa Sotterranea ha per oggetto la soluzione di diversi problemi, i quali massimamente dipendono dalla determinazione dell'inclinazione, e direzione di certe linee, e di certi piani risultanti dalla posizione dei filoni, o strati minerali. Per conoscere facilmente, ed esattamente l'inclinazione, e direzione di un piano qualunque io già pubblicai uno Stromento col nome di Gonimetro. Ma nella Geometrìa Sotterranea spesso interviene di dover determinare l'inclinazione, e la direzione della comune Sezione di due piani: la qual determinazione richiede l'uso della Trigonometrìa Sferica, e la soluzione di equazioni, le quali contengono quantità da prendersi ora positive, ed ora negative secondo i diversi casi; epperò lasciano facilmente luogo ad ambiguità, ed a considerabili sviste (*).

Affine di poter prescindere dall'uso della Trigonometrìa sferica nell'accennato caso, ed in altri analoghi al medesimo, come anche per prevedere i casi ambigui, quando si voglia far uso del calcolo da essa dipendenti, ho immagina-

(*) Veggasi l'eccellente trattato di Geometrìa Sotterranea del *Lempe* intitolato *Gründliche anleitung zur Markscheidekunst*.

to uno Stromento, che chiamo *Stratimetro* come misuratore della relativa posizione di diversi Strati, prendendo il nome di Strati in senso più largo dell'usato, cioè comprendendo anche i filoni minerali, o un piano qualunque.

SEZIONE I

Descrizione dello Stratimetro.

1. Consiste lo Stratimetro in due telaj di legno bene stagionato *abdc, feyg* (*Fig.* 1) connessi da quattro eguali colonne *h* alte circa due decimetri. Su uno di essi si applicano perpendicolarmente due aste EF, E'F' di ottone, alla sommità delle quali sono connesse a cerniera due piatine di ottone quadrate ABCD, A'B'D'C'. Una di tali aste è situata in un lato fisso *y*E del telajo, nel quale è una fessura *r*, lungo la quale si può fare scorrere l'asta; l'altra è su di una traversa RR' mobile, che è fornita parimenti di una simile fessura, e che può scorrere sulla lunghezza del telajo, e colla staffa G a vite può fermarsi in qualunque punto del medesimo. L'asta FX può parimenti collocarsi sulla traversa mobile *ut*, in cui è una simile fessura *r*.

2. Ciascun'asta si può girare orizzontalmente, e fermare con vite in qualunque situazione; parimenti ciascuna piatina per mezzo della cerniera può avere un movimento verticale per l'ampiezza di un semicircolo, e si può fermare in qualunque posizione colla vite annessa K (*Fig.* 1, 2).

3. Su ciascuna piatina sono apposti due regoli d'ottone PA, P'B, SM, ZM', terminati in punta, i quali si possono girare, e con vite fermare in ogni direzione rimanendo sempre nel rispettivo loro piano; e quando la macchina è montata nel modo, che verrò esponendo, l'incontro delle punte dei regoli nei punti O, N presenta le estremità di una retta ON, la quale è la comune sezione dei due piani delle piatine corrispondente alla posizione ad essi data.

4. Questa è in sostanza la struttura dello Stratimetro; ma gioverà spiegarne alquanto più le sue parti. La *Fig.* 2 rappresenta quasi in metà della grandezza reale una delle piatine ABCD connessa coll' asta EF, la quale è perpendicolarmente unita ad una base circolare *mnu* di ottone, pel centro della quale passa il verme di una vite P, che s' insinua in un lato del telajo, e che può essere fermata in modo, che la piatina si muova intorno l' asse KI in un piano, che sia perpendicolare al piano dell' asta EF: e col galetto della vite K si può fissare a qualunque grado d' inclinazione.

5. Nella piatina sono varj fori a vite *a*, *a* per fermarvi colle viti corrispondenti i regoli in quella situazione, che si vuole. La forma di uno dei regoli è rappresentata dalla *Fig.* 3, *N.*° 1, in cui è disegnata in grandezza, che è la metà della reale. Consiste essa in una lastra di ottone, in cui sono due fessure longitudinali RS, TV. La prima fessura RS è fatta per ricevere il verme di una vite, la quale può entrare in ciascuno dei fori sopraccennati, e fermare il regolo in qualunque situazione; e questo può raggirarsi intorno alla vite come asse, e correre per tutta la lunghezza della fessura RS.

6. L' altra fessura TV è coperta alle due estremità da una lastrina di ottone, nel mezzo della quale al di sotto è un incavatura atta a lasciarvi scorrere un filo di ferro ben diritto, il quale può essere fermato dalla piccola vite *a* (*Fig.* 2). Il motivo di questa struttura è, perchè l' incontro dei regoli, dal quale dipende la determinazione della comune sezione dei due piani rappresentati dalle due piatine, è molto vario secondo la diversa inclinazione, e direzione dei piani stessi: onde quelli devono potersi allungare, ed accorciare, e dirigere in qualunque verso.

7. Oltre ai quattro regoli simili al descritto deve esservene uno fatto a squadra, come è indicato dalla *Fig.* 3, *N.*° 2, e ciò pel fine, che a suo luogo sarà indicato.

8. Sieno parimenti apprestati alcuni fili di ferro ben di-

ritti, ed alcuni abbiano una piccola porzione, che formi un angolo retto coll'altra maggiore.

9. Deve parimenti essere in pronto una tavoletta ben piana, la quale sostenuta dalla traversa *ut* (*Fig.* 1) si disporrà sul telajo nello spazio, che rimane tra le due aste EF, E'F', e sarà mantenuta in quella situazione, che sarà opportuna da due staffe a vite, che a tal fine si appresteranno. Su questa tavoletta, che potrà anche applicarsi sul bordo del telajo, e fermarvela con una staffa a vite, quando bisogni, si avranno a determinare le quantità, che si cercano coll'uso dello Stratimetro.

10. Siccome la determinazione delle indicate quantità richiede alcune misure di linee verticali dipendenti dalla posizione dei piani rappresentati dalle due piatine, perciò si appresterà una specie di compasso a verga, che io chiamerò *Cateto Istromentale*. Questo è rappresentato in grandezza reale dalla *Fig.* 4, ed è diviso in centimetri, e millimetri. La sua base è un pezzo di ottone quadrato bene spianato AOPC, ed alto un centimetro, dalla cui superficie inferiore sporge una punta d'acciajo CD, la quale al di sotto è spianata sì che sia nello stesso piano col piano inferiore della base stessa. Perpendicolarmente a questa base sorge dal suo mezzo un'asta rettangolare EF, sulla quale è investita una staffa di ottone LGHM scorrevole, e che colla vite X può fermarsi a qualunque punto dell'asta: da tale staffa sporge una punta d'acciajo MN spianata al di sotto sì che sia sullo stesso piano col piano inferiore della staffa, e situata in modo, che la retta intercetta tra le due punte N, D sia perpendicolare alla base ACD; epperò sia una verticale, quando la base ACD sia orizzontale.

11. Per fissare sulla tavoletta i punti occorrenti si avranno pure in pronto alcuni aghi muniti di una larga testa.

12. Per fare uso dello Stratimetro conviene primamente orizzontare il telajo, in cui sono situate le piatine: il che si può fare in due modi. Il primo è di situarlo su di una ta-

vola, e di metterlo quindi a livello col mezzo delle viti *k* (*Fig.* 1), al qual fine può servire il Gonimetro per risparmiare un livello a bolla d'aria. Ma in tal modo difficilmente si ottiene l'intento. Per ottenerlo facilmente, e compiutamente conviene collocare lo stratimetro su di un trepiede, la cui testa sia fornita del movimento teodolitico. A tal fine si appresti una tavoletta solida, e bene spianata, nel cui mezzo sporga al di sotto un tubo di ottone, il quale si possa investire nel cono, che sorge dall'indicata testa, e fissarvelo con vite. Su di questa tavoletta si fermerà colle viti lo Stratimetro, e quindi si orizzonterà, come si fa nel Teodolite. Siccome chi esercita la Geometrìa sotterranea suole essere fornito di un Teodolite, così il trepiede di questo potrà servire anche per lo Stratimetro.

13. Allorchè si vuol trovare la comune sezione di due piani, dei quali sia data l'inclinazione, e la direzione, si comincia ad orizzontare lo Stratimetro. Quindi a ciascuna piatina si dà la proposta inclinazione, e direzione: il che si ottiene col Gonimetro, istromento già da me proposto fino dall' anno 1780, e più distintamente descritto, e disegnato nelle Memorie dell'Istituto Nazionale dell'anno 1806. Per dare con questo stromento ad una piatina l'inclinazione proposta, si comincia a darvi una piccola inclinazione, quindi vi si applica la tavoletta annessa al Gonimetro in modo, che la meridiana istromentale sia paralella ad uno dei bordi laterali della piatina, epperò sia in un piano verticale: inoltre il nord istromentale deve essere rivolto verso la parte ascendente della piatina: per potere applicare alla piatina la tavoletta del Gonimetro, nel mezzo della parte superiore di questa è un foro, al quale ne corrisponde un altro a vite nel mezzo della parte superiore della piatina: onde con una vite si possa fissare quella su questa.

14. Essendo lo Stratimetro orizzontato, il movimento della piatina intorno alla sua cerniera si fa in un piano verticale, ossia in un piano, che passa per la meridiana istromen-

tale del Gonimetro: onde il filo del piombino del Gonimetro trovasi in un piano ad essa paralello, cioè rade il quadrante, dal cui centro pende: quindi per dare alla piatina l'inclinazione di un dato numero di gradi per esempio di 15, basta inclinarla, finchè il filo venga a segnare sul quadrante un tal numero. Allora colla vite si ferma la piatina.

15. Data così alla piatina la proposta inclinazione, si passa a darvi una determinata direzione, la quale supporremo che sia l'ascendente, e di gradi 30 orientali. A tal fine si gira l'asta, che porta la piatina col Gonimetro soprappostovi, finchè il Nord magnetico venga a segnare il proposto grado 30. Allora si fissa colla corrispondente vite l'asta; e così il piano rappresentato dalla superficie della piatina ha la proposta inclinazione, e direzione.

16. Si trasporta quindi il Gonimetro sull'altra piatina, alla quale si dà nello stesso modo una data inclinazione, e direzione.

17. Ciò fatto si ritira il Gonimetro, ed a ciascuna piatina si comincia ad applicare uno dei regoli sopradescritti, e girandoli si vedrà verso qual parte vadino ad incontrarsi; ed allora avanzandoli, o ritirandoli si ridurranno a contatto le due loro punte; e questo punto sarà nella comune sezione. Ciò fatto si fermano colla vite corrispondente i due regoli nel trovato incontro delle loro punte.

18. Uno dei punti, che deve essere nella comune sezione dei due piani potrà anche essere determinato dalla punta di uno dei regoli, la quale vada ad incontrare la superficie della piatina opposta, oppure il lato della superficie inferiore del regolo applicato a questa stessa piatina.

19. Determinato così uno dei punti della comune sezione, si applica un altro regolo a ciascuna delle due piatine, e nello stesso modo descritto si determina un altro punto della comune sezione; e nella situazione trovata si fermano colla vite i regoli.

20. Che i due punti determinati nel modo indicato debbano

bano essere nella comune sezione dei due piani rappresentati dalla superficie della piatina è chiaro; perciocchè un piano è prolungabile per ogni verso; e poichè una parte della superficie inferiore di ciascun regolo coincide col piano della piatina, ed essi sono esattamente spianati, perciò anche la loro parte, che si stende fuori del piano delle piatine, è come una prolungazione del piano delle medesime. Quindi i due punti, come sono O, N (*Fig.* 1) segnati dall'incontro delle punte dei regoli saranno nell'intersezione del prolungamento dei piani delle piatine, cioè saranno nella comune sezione, la quale parimenti deve intendersi prolungabile indefinitamente.

SEZIONE II

Uso dello Stratimetro.

21. L'esposizione degli usi dello Stratimetro richiede, che si premettano diverse cognizioni relative alla Geometrìa sotterranea, alla pratica della quale questo Stromento è diretto. Suppongo però quelle, che sono analoghe all'uso del Gonimetro, che già esposi in altra Memoria, inserita nel Vol. 2 degli Atti dell'Istituto Nazionale: onde qui mi ridurrò soltanto ad esporre alcuni Lemmi, che hanno una più prossima connessione al Problema principale sopraccennato, alla soluzione del quale serve lo Stratimetro, il cui uso non richiede, che la cognizione della Trigonometrìa piana.

22. Per l'intelligenza di questa mia Memoria sono parimenti da premettere alcune definizioni di nomi usati nella Geometrìa sotterranea. Suppongansi (*Fig.* 6) in un monte due piani HNF, KLM tra loro paralelli, i quali traversino i banchi *abc* delle masse, o roccie costituenti il monte. Se lo spazio esistente tra i due piani è vuoto chiamasi *Fessura*; se è pieno di materia diversa dalla roccia, dicesi *Filone*.

23. Se i due piani hanno una stessa posizione coi ban-

chi della roccia, e lo spazio è pur pieno di materia diversa dalla roccia stessa, questo solido chiamasi *strato*, o *banco*.

24. I due indicati piani sono le pareti del filone o dello strato, le quali ne formano la così detta *Cassa*: quella parete, che con un piano orizzontale condotto per essa e per l'altra forma internamente un angolo acuto, dicesi *cadente*: tale è la parete KLM nella *Fig.* 6, in cui supponesi, che il piano QRVO sia verticale, e formi con un piano orizzontale la sezione KO; e col piano della parete la sezione KL, la quale con KO forma l'angolo acuto LKO. L'altra parete NH, che internamente forma con KO un angolo ottuso KHN, dicesi *Riposo*. Il cadente chiamasi anche *muro*, ed il riposo *pavimento*.

Il solido contenuto tra le pareti ha una certa grossezza, che è varia, e quella vuolsi estimare dalla perpendicolare condotta sulle pareti.

Essendosi supposti i piani delle pareti paralelli tra loro, è chiaro, che quando sia determinata la posizione, cioè l'inclinazione, e direzione di un piano, sarà determinata anche la posizione del filone, o dello strato tra que' piani contenuto: e nella inclinazione si avrà riguardo se per rapporto ad un dato livello, essa sia ascendente o discendente, cioè positiva, o negativa, come pure nella direzione se sia orientale, ovvero occidentale, cioè positiva, o negativa per rapporto alla parte settentrionale della meridiana o astronomica, o magnetica.

Nei Problemi, che prenderemo a sciogliere, supporremo sì i filoni, che gli strati rappresentati da piani geometrici; e col nome di filone intenderemo anche gli strati. Siccome però nelle montagne non esistono piani esatti, nè esattamente paralelli, perciò le nostre soluzioni dei problemi dovransi intendere applicabili soltanto a quei casi, che non si discostano sensibilmente dalle supposizioni che assumeremo. E poichè i filoni spesso mutano direzione, ed inclinazione, perciò devesi sopra luogo riconoscere il reale loro stato; e la solu-

zione dei problemi sarà da intendersi di que' filoni, o di quelle loro parti, che mantengono la posizione assunta.

Lemma I

25. *Data la direzione di due rette orizzontali concorrenti in un punto, trovare l'angolo, che esse formano tra loro.*

Per la soluzione conviene osservare se le direzioni delle due rette sieno della stessa, oppure di diversa denominazione, cioè se le rette abbiano ambedue la direzione orientale, o l'occidentale, oppure se una abbia la direzione orientale, e l'altra l'occidentale. Se sono della stessa denominazione, l'angolo formato dalle due rette si conoscerà, sottraendo la direzione minore dalla maggiore.

Se sono di diversa denominazione si aggiungano gradi 180 alla direzione minore, e dalla somma si sottragga la maggiore; ed il residuo sarà il numero di gradi dell'angolo formato dalle due rette.

Per dimostrare la regola nel primo caso, sia SN l'Ago magnetico (*Fig.* 5), la cui direzione supponesi costante; ed intendasi, che la sua posizione coincida colla meridiana istromentale. Suppongasi inoltre, che il circolo della Bussola, che rappresenta l'orizzonte istromentale, sia diviso dalla meridiana stessa in due semicircoli NES, SON, e che in quello che è a destra della parte settentrionale della meridiana, sieno segnati 180° cominciando dal Nord N, e passando pel punto E; nell'altro sieno pure segnati 180° cominciando dal punto S, e proseguendo pel punto O sino in N. Poste tali supposizioni, i diversi raggi CA, CB, ec. del circolo esprimeranno le direzioni di diverse linee, le quali direzioni si cominciano a computare dal Nord N, e diconsi orientali, finchè sono nel semicircolo che è alla destra della parte settentrionale della meridiana; quindi ricominciano al punto S, e diconsi occidentali quelle che sono nell'altro semicircolo. Se dunque sono date le direzioni orientali di due linee CA,

CE, la direzione di CA sarà misurata dall'arco NA, e quella di CE dall'arco NE; ed essendo supposta la direzione di CA, l'angolo formato dalle due rette CA, CE sarà misurato dalla differenza AE dei due archi NA, NE, cioè dalla differenza del numero dei gradi esprimente le due direzioni date.

Se le due direzioni date sono occidentali, come sono quelle delle due linee CD, CG, la direzione di CG sarà misurata dall'arco SDG, e quella di CD dall'arco SD: ed essendo supposto SDG maggiore di SD, la loro differenza DG sarà la misura dell'angolo DCG formato dalle due date direzioni.

Allorchè una direzione CA è orientale, e l'altra CG occidentale, e questa è maggiore, così che l'angolo SCG sia maggiore di NCA, si osservi, che l'arco GN è eguale a tutta la semicirconferenza SON, ossia a 180°, meno l'arco SOG, cioè a dire è $GN = 180° - SOG$: onde sarà l'angolo $GCN = 180° - SCG$. Ma è $GCA = GCN + NCA$; epperò sarà $GCA = 180° - SCG + NCA = 180° + NCA - SCG$; cioè a dire l'angolo GCA formato dalle direzioni di CG, e CA di diversa denominazione, delle quali la prima è occidentale, e maggiore della seconda supposta orientale, si ha aggiugnendo 180° alla minore, e sottraendo dalla somma la maggiore.

Una simile dimostrazione vale nel caso che la direzione orientale sia maggiore della occidentale.

26. Quando le due direzioni di diversa denominazione siino eguali, la loro differenza sarà zero, ossia l'angolo formato su tali direzioni, o linee sarà misurato dalla semicirconferenza, ossia da 180°, epperò esse saranno in una stessa linea retta.

27. Poichè l'angolo, che formano due piani verticali concorrenti tra loro è misurato da due rette orizzontali, l'una delle quali è in uno di que' piani, e l'altra nell'altro; e le direzioni di due piani verticali si riducono alle direzioni di queste due linee, perciò dalle direzioni di tali piani si potrà conoscere l'angolo, che essi formano tra loro.

Quello che si è detto computando le direzioni dalla me-

ridiana magnetica vale anche quando si computano dalla meridiana astronomica: poichè la dimostrazione dipende dalla supposta costanza della meridiana magnetica; e l'astronomica è pur essa costante in una data situazione.

Lemma II

28. Sia MNN'm (*Fig.* 7) un piano obbliquo, di cui sia data l'inclinazione, e direzione. Per un punto posto nel piano stesso passi un piano orizzontale VIE, che supporremo essere quello della carta, e nel quale sarà la retta AN come sezione comune del piano obbliquo coll'orizzontale, epperò rappresenterà la direzione laterale dello stesso piano obbliquo. Dal punto A si alzi la verticale AB, e per essa si conducano due piani, l'uno ABDE, che passi per una retta AE perpendicolare ad AN, il quale perciò determinerà la direzione ascendente AD del piano obbliquo; l'altro ABCF, che passi per un' altra direzione AF, il quale perciò formerà col piano obbliquo un' altra sezione AC. Per un punto B della verticale AB si conduca un piano orizzontale BCD, il quale taglierà il piano obbliquo nella direzione BD paralella ad AN, il piano ABDE nella direzione BD paralella ad AE, ed il piano ABCD nella direzione BC paralella ad AF. Finalmente dai punti C, D determinati dall' intersecazione del piano BCD colle rette AC, AD esistenti nel piano obbliquo NMmN', si conducano le verticali FC, ED.

29. Da tale costruzione sono manifeste le seguenti cose: Primo. Le rette CF, DE, AB saranno eguali, siccome quelle che sono verticali, e tra due piani paralelli tra loro BCD, AFE.

30. Secondo. AE sarà la projezione di AD; AF la projezione di AC; FE la projezione di CD, ed eguale alla stessa CD.

31. Terzo. Supposta la costruzione precedente (*Fig.* 8, *N.°* 1), se per un altro punto P dell'altezza AB si conduce un altro piano POL paralello all'orizzonte, che formi colle

rette AO, AL le sezioni analoghe a quelle formate dal piano BCD, e si conducano le verticali OH, LK, e si congiungano le rette KH, AH, saranno tra loro simili 1.° i triangoli ADE, ALK; 2.° ACD, AOL; 3.° ABC, APO; 4.° ABD, APL; 5.° ACF, AOH; 6.° AFE, AHK.

32. Essendo AE perpendicolare ad AN, ossia ad EF, che è paralella ad AN; perciò per esprimere tale projezione nell'icnografia ortografica si conduca (*Fig.* 8, *N.*° 2) una retta AE', ed a questa la perpendicolare F'E'. Che se sarà data la lunghezza AF (*Fig.* 8, *N.*° 1), e l'angolo FAE, o l'altro AFE, si conoscerà nel triangolo rettangolo AF'E' (*Fig.* 8, *N.* 2) la lunghezza della retta AE'.

33. Allorchè una Galleria espressa da BO (*Fig.* 8, *N.*° 1), che parte da un punto B posto ad una certa elevazione AB, perviene con una data inclinazione ad un filone espresso dal piano obbliquo MNN'*m*, ed è nello stesso piano colla verticale AB, essa si può esprimere con una linea orizzontale eguale alla sua projezione, applicandola a quella altezza, che corrisponde al livello del punto finale O, cioè aggiungendo, o sottraendo alla elevazione AB il cateto dell'inclinazione della Galleria: così essendo il punto O più elevato del punto B, e supponendo che BP sia il cateto dell'inclinazione di BO, si applicherà al punto P una retta PO orizzontale eguale alla projezione AH' di BO.

34. Se il punto finale O sarà inferiore di livello al punto B, si sottrarrà il cateto B*p* da AB.

35. In tal modo il livello del punto finale O è riportato ad un piano orizzontale POL, ossia AHK simile al piano orizzontale BCD, che è al livello del punto iniziale B: onde il rapporto geometrico delle rette AH, HK, KA è lo stesso col rapporto delle rette AF, FE, AE.

Lemma III

36. *Data la lunghezza di due pozzi, e la loro posizione, trovare la distanza sotterranea del termine di uno dal termine dell' altro, e la inclinazione, e direzione della distanza medesima.*

Sieno primamente due pozzi verticali (*Fig.* 9) MZ, OT, uno de' quali abbia la sua bocca O più elevata dell' altra M.

Livellando si misuri l' elevazione verticale ON, e la distanza orizzontale MN dei due punti M, O; e si conducano le orizzontali MN, ZS, che saranno eguali. Si sottraggano da OT le quantità ON, e NS, la quale è cognita per essere eguale a ZM, e si avrà ST. Congiungendo ZT si avrà un triangolo rettangolo, in cui sono noti i lati ST, ZS; onde si conoscerà ZT, che è la distanza richiesta. L' inclinazione sarà misurata dall' angolo SZT, che si conoscerà dal triangolo stesso rettangolo ZST; e la direzione sarà quella, che ha il piano verticale ZMNS, la quale si conoscerà per osservazione.

37. Se le bocche dei pozzi fossero allo stesso livello, come M, N, si avrebbe a sottrarre da NT soltanto SN per avere ST.

38. Suppongasi ora, che uno dei pozzi sia obbliquo, com'è VK, ma posto nello stesso piano coll' altro verticale condotto per la retta MZ, e di cui sia misurata la inclinazione.

Per avere la distanza VZ si cominci a trovare colla livellazione l' elevazione KL del punto K sul punto M, e la sua distanza orizzontale ML dal punto stesso M. Essendo noto l' angolo d' inclinazione NIS, ossia LIK, e conoscendosi nel triangolo rettangolo IKL l' altezza KL si conoscerà IK. Parimenti nel triangolo rettangolo NIS essendo nota NS come eguale a MZ, si conoscerà IS; quindi sarà $SV = VK - KI - IS$: onde nel triangolo ZSV saranno noti i lati SV, SZ, ed inoltre l' angolo ZSV, che è eguale all' inclinazione della retta SV. Perlocchè si conoscerà la distanza richiesta VZ.

Essendo VK nello stesso piano col piano verticale ZMNS,

l'inclinazione della retta ZV sarà misurata dall'angolo VZS, e la sua direzione sarà quella del piano medesimo.

39. Se anche l'altro pozzo fosse obbliquo com'è RZ, ma nello stesso piano MNSZ, si ridurrà questo caso al primo nel seguente modo; cioè a dire essendo nota la direzione, ed inclinazione di RZ, e la sua lunghezza, si conoscerà l'orizzontale RM. Conducendo pertanto nella direzione del piano RMZ una retta RM eguale alla trovata, e dal punto Z una verticale, che s'incontri con RM, si conoscerà dal triangolo ZRM il valore di ZM, onde al pozzo obbliquo RZ si potrà sostituire il verticale ZM; ed al punto M si faranno le operazioni prescritte per trovare ZV.

40. Potrebbe accadere, che a cagione dell'ineguaglianza del terreno nel misurare orizzontalmente RM, il punto finale M non riescisse a livello del punto iniziale R, ma in un punto più basso come m, ovvero più elevato come m'. In tal caso il cateto Mm, ovvero Mm' si aggiungerà a ZM, ovvero si sottrarrà, e si avrà l'altezza Zm, ovvero Zm', colla quale si avrà ad operare invece di ZM.

41. Poniamo ora (*Fig.* 10, *N.*° 1), che stante un pozzo MZ verticale, l'altro sia obbliquo, come KV, ma in modo che il piano verticale MKL, da cui si misura la differenza della elevazione della bocca dei due pozzi, sia in una direzione diversa da quella, che ha il piano verticale VKh', che misura l'inclinazione del pozzo obbliquo VK. In tale supposizione si troverà ZV nel seguente modo. Dal punto K del pozzo obbliquo si conduca una verticale Kh', e dal punto V un'orizzontale Vh' concorrente con Kh' nel punto h'. Essendo tal piano verticale, l'angolo KVh' sarà l'inclinazione del pozzo, e la retta Vh' sarà la direzione del piano medesimo.

Dal punto Z si conduca un piano orizzontale ZSO, il quale taglierà la retta KV in un punto S, e nel piano verticale VKh' formerà una sezione orizzontale SO.

Dal punto S si alzi una verticale SN, e dal punto M un piano orizzontale, il quale taglierà la verticale SN nel

punto

punto N; e nel piano NSOL formerà la sezione NL paralella a SO, tagliando la retta VK nel punto I, dal quale si condurrà la verticale Ih.

Da tale costruzione appare, che sarà SN = MZ = IH = LO, come pure SZ = MN, ed OS = LN; e l'angolo ZSO = MNL. Quindi conducendo le rette ZO, ML, i due triangoli ZSO, MNL saranno in tutto eguali, epperò sarà ZO = ML.

42. Ora per giugnere alla soluzione del Problema conviene primamente livellare dal punto M al punto K per avere l'elevazione KL, e la lunghezza, e direzione dell'orizzontale ML. Essendo Kh' una verticale condotta dallo stesso punto K, dal quale è condotta la verticale KL, quella sarà nella stessa retta con KO: dippiù il punto L sarà nello stesso piano orizzontale MNL, in cui è il punto M; onde per misura sarà cognito il lato ML del triangolo orizzontale MNL.

Essendo KL perpendicolare al piano MLN sarà perpendicolare anche alla retta LI: onde nel triangolo rettangolo KLI, in cui è noto l'angolo KIL, che è l'inclinazione del pozzo, ed inoltre il lato KL, si conoscerà anche KI.

Nel triangolo NIS essendo retto l'angolo SNI, ed essendo noto l'angolo NIS dell'inclinazione del pozzo, e di più essendo noto NS, come eguale a MZ, si conoscerà SI.

Quindi sottraendo da VK le rette KI, IS si avrà SV.

Inoltre nel triangolo rettangolo SKO conoscendosi l'angolo d'inclinazione OSK, ed il lato KS come eguale a KI + IS, si conoscerà anche SO.

43. Si prolunghi ora l'orizzontale OS verso R, e si alzi dal punto V una verticale VR, la quale incontrerà OS prolungata in un punto R, atteso che le rette VS, SO, VR sono nello stesso piano verticale. Si avrà quindi il triangolo rettangolo VRS, nel quale è noto il lato VS, e l'angolo RSV come eguale all'inclinazione del pozzo, onde si conosceranno i lati RS, RV.

Nel triangolo ZOS è nota la direzione sì della retta SO, che della retta OZ, che è paralella a ML, la cui direzione,

e lunghezza supponesi misurata nella livellazione dal puntò M al punto K; quindi si dedurrà l'angolo ZOS; onde nel triangolo ZOS, essendo noto anche OS, oltre ZO, si conoscerà ZS, e l'angolo ZSO.

44. Quindi nel triangolo ZSR sarà noto l'angolo ZSR, come supplemento dell'angolo ZSO, e di più saranno noti i lati ZS, SR: onde si conoscerà il lato ZR.

45. Parimenti nel triangolo ZRV, che ha l'angolo ZRV retto, ed in cui sono noti i lati ZR, RV, si conoscerà la richiesta distanza VZ.

Di più si conoscerà l'angolo VZR, che è l'inclinazione della retta VZ, essendo ZR orizzontale.

Finalmente si conoscerà la direzione di RZ dall'angolo noto ZRO, in cui è nota la direzione di RO, ossia RS; ed essendo RVZ un piano verticale, la direzione di ZV sarà la stessa colla direzione di ZR.

46. Si osservi, che pei termini di due pozzi si possono in questi intendere due punti qualunque, la cui distanza dalla bocca del rispettivo pozzo sia nota.

47. Se anche l'altro pozzo avesse una obbliquità qualunque, com'è QZ, si ridurrà al caso di un pozzo verticale nel seguente modo. Suppongasi dal punto Z elevata una verticale ZM', e che per essa e per il pozzo QZ passi un piano verticale, in cui sarà la misura dell'elevazione del pozzo, che si sarà osservata conducendo dal punto Q un'orizzontale QM (*Fig.* 10, *N.*° 1): si avrà un triangolo rettangolo, in cui sarà cognito il lato QZ, e l'angolo d'inclinazione MQZ; onde si conoscerà MZ, e QM. Livellando quindi sopraluogo dal punto Q nella direzione nota di QM; e misurando orizzontalmente una lunghezza QM eguale alla calcolata, si avrà il punto M, che sarà nella verticale ZM'.

48. Se il terreno, su cui si fece la misura di QM sarà orizzontale, si assumerà la verticale ZM invece del pozzo obbliquo ZQ: che se misurando orizzontalmente la retta calcolata QM, questa termina in un punto *m*, che sia meno ele-

vato di M, e la differenza di livello sarà mM, si sottrarrà da ZM la quantità Mm, e sarà Zm la retta da assumersi invece di ZQ, e quando il punto M' sia più elevato di M, si aggiungerà alla retta ZM la maggior elevazione trovata M'M, e si assumerà M'Z invece di QZ; e quindi si faranno le operazioni prescritte per trovare ZV, assumendo come pozzo verticale la retta MZ, ovvero mZ, o M'Z, secondo i varj casi indicati.

49. Essendo ZRV un piano verticale, e ZR perpendicolare alla verticale RV, sarà la stessa ZR eguale alla projezione della retta ZV: la qual projezione nella pianta sarà $m'n$ (*Fig.* 10, *N.*° 2).

Lemma IV

50. *Data l'inclinazione, e direzione di un filone, e la sua posizione per rapporto ad una Galleria osservata ad un dato livello, ridurre l'osservazione come se fosse fatta ad un altro livello dato.*

Rappresenti HZ un pozzo (*Fig.* 11, *N.*° 1, 2), che ora supporremo verticale, in cui alla distanza misurata HM dal punto H sia una Galleria MX, che supporremo orizzontale, la cui projezione perciò sarà la stessa MX.

All'estremità X della Galleria suppongasi, che siasi osservato un filone XQ con una certa inclinazione, e direzione.

Essendo nota la direzione, e grandezza di MX per osservazione, come pure la direzione laterale del filone rappresentata dalla retta XQ (*Fig.* 11, *N.*° 2), si conoscerà dalle direzioni stesse l'angolo MXQ formato dalle medesime: conducendo pertanto dal punto X la retta XQ che formi l'angolo trovato, ed al punto M una retta MQ perpendicolare a XQ, si avrà un triangolo rettangolo MQX, in cui essendo noto il lato MX, e l'angolo MXQ, si conosceranno i lati MQ, QX, e l'angolo XMQ: e poichè alla direzione laterale è sempre perpendicolare la direzione ascendente, perciò il

piano verticale, che passerà per la retta MQ, passerà per la direzione ascendente del filone dato, il quale passa per la retta QX, che è la sua direzione laterale.

Facendo pertanto l'elevazione ortografica della cava sulla retta MQ si avrà un profilo, che passerà per la direzione ascendente FL del filone (*Fig.* 11, *N.*° 1). Conducendo quindi dal punto M la retta MN perpendicolare ad HM, ed eguale ad MQ, e pel punto N una retta LF, che formi l'angolo MNF eguale alla trovata inclinazione del filone, si avrà un triangolo rettangolo FMN, in cui essendo noti gli angoli ed un lato MN, si troverà il valore di FM.

Ora se cercasi di ridurre al livello del punto K, ossia all'elevazione FK l'osservazione fatta al livello del punto M, ciò si troverà a norma del Lemma II. Si cominci pertanto (*Fig.* 11, *N.*° 1) a trovare il valore di FK, che sarà $HM + MF - HK$; si faccia quindi $FM : MN = FK$ al quarto, che sarà $\frac{MN \times FK}{FM}$; e questo sarà il valore della retta KL paralella ad MN condotta dal punto K, al livello del quale intendesi di fare la riduzione dell'osservazione.

Facendo quindi nella Icnografia ossia Pianta (*Fig.* 11, *N.*° 2) la retta $MP = KL$, e conducendo dal punto P la retta PR perpendicolare a MP, e concorrente con MX in R sarà MR la projezione della Galleria corrispondente all'altezza HK (*Fig.* 11, *N.*° 1).

Così dunque (*Fig.* 11, *N.*° 1, 2) le quantità MX, MQ, QX risultanti dall'osservazione fatta al Livello MN divengono MR, MP, PR per la riduzione dell'osservazione ad un altro livello KL.

51. Nella proposta costruzione abbiamo supposto, che la direzione ascendente del filone prolungata vada a concorrere col pozzo al di sotto del livello M. Ma potrebbe essere che andasse a concorrere col pozzo al disopra di M, come sarebbe *nl*. Allora si opererà bensì come nel primo caso; ma interverrà qualche diversità di determinazione delle quantità

analoghe . Si trovi pertanto primamente il valore di Mq come si fece per determinare MQ : quindi si faccia $Mn = Mq$, e perpendicolare ad HF . Pel punto n si conduca una retta nf, che formi l'angolo Mnf eguale alla trovata inclinazione del filone ; si avrà un triangolo rettangolo fMn, in cui essendo noti gli angoli, ed il lato Mn, si troverà fM .

Ora per determinare il valore di fK, al cui punto K intendesi di ridurre l'osservazione, si noti che è $fH = HM - fM$, e che è $fK = HK - fH$: onde sarà $fK = HK - HM + fM = HK + fM - HM$, ed essendo HM minore di $HK + fM$, sarà fK positiva .

Si faccia quindi $fM : Mn = fK$ al quarto, che sarà $Kl = \frac{Mn \times fK}{fM}$; e questo sarà il valore della retta Kl paralella ad MN condotta dal punto K .

Facendo quindi nell' Icnografia la retta $Mp = Kl$, e conducendo dal punto p la retta pr perpendicolare ad Mp, e concorrente con Mx nel punto r sarà Mr la projezione della Galleria corrispondente all' altezza HK .

52. Se la Galleria sarà obbliqua, si assumerà la sua projezione, applicandola al livello del punto finale della Galleria stessa, e si opererà in questa projezione così situata, come si operò sulla galleria orizzontale .

Sia per esempio HZ il pozzo verticale (*Fig.* 13, *N.°* 1 *e* 2), dal cui punto M parta una galleria ascendente MX', il cui termine X' perviene alla sezione AX', che sul filone è formata dal piano verticale, che passa per le rette HM, MX'. Questa figura rappresenterà l'elevazione ortografica del piano stesso, a cui corrisponde nella pianta la projezione MX .

Essendo nota la lunghezza, ed inclinazione della galleria MX', si calcoli il suo cateto, e sia XX', ossia MM' come pure la sua projezione MX . Conducendo dal punto X' la retta X'M' perpendicolare a ZH, sarà X'M' la projezione di MX' applicata al livello del punto finale X' della galleria .

Si calcoli quindi secondo il Lemma II nella pianta (*Fig.*

13, *N.*° 2) la retta MQ corrispondente alla projezione MX; poi si conduca (*Fig.* 13, *N.*° 3) una verticale Hm' eguale ad HM'. Si applichi al punto m' una retta m'N' = MQ, e perpendicolare ad HM. Si faccia finalmente la riduzione al livello del punto fissato K, e si troverà KL.

Facendo nella pianta MP = KL, e conducendo RP perpendicolare a MP, si avrà dal prolungamento di MX la retta MR per il valore della projezione della galleria obbliqua riportata al punto K.

Conducendo pertanto KL' = MR sarà KL' la projezione della galleria ridotta. Se quindi dal punto L' si conduce L'm' paralella a MX' si avrà la pendenza della galleria ridotta.

53. Allorchè la galleria è discendente, cioè al disotto della orizzontale che passa per il suo punto iniziale, la sua projezione applicata al suo punto finale sarà al disotto dell' orizzontale stessa, e su tale projezione si avrà ad operare per fare la richiesta riduzione.

54. Se il pozzo fosse obbliquo, com'è hZ' (*Fig.* 11, *N.*° 1) e la galleria MX orizzontale, e nello stesso piano verticale, che misura l'inclinazione del pozzo, allora per fare la proposta riduzione si alzi dal punto M la verticale ZH, e si calcoli il valore di MH, che si troverà, conoscendosi per osservazione nel triangolo rettangolo la lunghezza hM, e l'angolo d'inclinazione MhH del pozzo. Ciò fatto si opererà come se la verticale AZ fosse il pozzo dato, determinando le rette MN, KL, come sopra si è fatto.

55. Allorchè il pozzo è obbliquo, e la galleria è obbliqua, si aggiugnerà, o si sottrarrà dal valore di MH il cateto dell'inclinazione, secondo che il punto finale della galleria sarà inferiore o superiore di livello al punto M: onde si avrà l'altezza Hm, ovvero HM', a cui dee applicarsi la retta MN per fare la richiesta riduzione.

56. Quindi nel triangolo KMS, in cui è noto il lato KM come eguale a HM — HK, e l'angolo KSM, si potrà conoscere KS, e SM: onde si conoscerà SL = KL — KS, e Sh = Mh — MS,

57. Suppongasi ora (*Fig.* 10, *N.°* 1, 2) che il pozzo, come VI, sia obbliquo, e che la galleria, che parte dal punto V abbia una direzione VF′ diversa da quella, che ha l'inclinazione del pozzo. In questo caso, se non altro si cerca, che la riduzione della galleria ad un altro livello, si opererà come si è fatto al N.° 55: giacchè la diversità di direzione nella galleria non influisce sulla proposta riduzione, dovendosi essa anche in questo caso fare in un piano verticale che passa pel punto V.

58. Ma se inoltre si vuol sapere la distanza orizzontale, che il termine della galleria ridotta avrà dal punto della retta IV posto allo stesso livello della galleria medesima, converrà fare altre operazioni, che nella soluzione del seguente Problema saranno esposte.

Data l'osservazione (*Fig.* 10, *N.°* 1, 2) fatta di un filone G*r* posto al termine di una galleria che da un punto V di un pozzo obbliquo VI parte con una direzione VF′ diversa da quella, che ha l'inclinazione del pozzo; trovare la distanza, che i due punti estremi della stessa galleria ridotta ad un altro livello dato avranno da quel punto del pozzo, che sarà al livello medesimo.

Per la soluzione si cominci a fare la pianta delle osservazioni fatte dal punto V, cioè a dire si calcoli la projezione V*h* del pozzo VI, e prendendo $nl = \mathrm{V}h$ intendasi, che *nl* sia nella direzione nota dell'inclinazione del pozzo.

Si calcoli parimenti la projezione della galleria, se è obbliqua; e sia *n*F, e questa si applichi al punto *n* colla direzione nota della galleria.

Finalmente al punto F, si applichi una retta G*r* nella direzione laterale del filone.

Passando all'elevazione, intendasi che al punto V (*Fig.* 10, *N.°* 3) sia applicata una retta orizzontale V*h* eguale alla projezione *nl* del pozzo (*Fig.* 10, *N.°* 2), ed un'altra VF′ nella direzione della galleria.

Dal punto *h* (*Fig.* 10, *N.°* 3) si alzi una verticale *h*I

eguale al cateto del pozzo, e dai punti V, F′ le verticali F′T, Vn eguali ad hI. Per le rette nV, Vh si conduca un piano verticale VnIh, nel quale è la retta VI rappresentante il pozzo; e per le rette nV, VF′ un altro piano verticale nVF′T. Pei punti n, V si conducano i piani nTI, VF′h, che sieno orizzontali.

Supponendo, che il livello dato, a cui si vuol trasportare l'osservazione, sia al punto R, si conduca per tal punto un altro piano orizzontale RtO, il quale taglierà la retta VI in un punto S.

59. Ciò fatto suppongasi primamente, che la galleria VF′ sia orizzontale. In tale ipotesi essa si trasporterà al punto R colla regola esposta al N. 50, e sia Rf' la lunghezza, che si troverà per la galleria ridotta al punto R.

60. Conducendo dal punto f' al punto S la retta f'S, questa sarà la distanza orizzontale del punto S dal punto finale della galleria ridotta al livello RS, e sarà RS la distanza del punto iniziale della medesima dallo stesso punto S.

Ora nel triangolo VSR l'angolo VRS è retto, e l'angolo RSV è l'inclinazione cognita del pozzo, e il lato RV è noto dalle altezze date nV, nR: onde si conoscerà RS.

Nel triangolo Rf'S è noto oltre il lato RS anche Rf'; e l'angolo intercetto SRf' si conoscerà dalle direzioni note della galleria, e dell'inclinazione del pozzo, onde si conoscerà Sf', che è la richiesta distanza.

61. Abbiamo supposto, che il punto R fosse superiore al livello del punto V; se fosse inferiore, com'è R′, si conduca per R′ il piano orizzontale R′mh', che prolungato taglierà in S′ la retta SV prolungata. Conducendo quindi mS′ si conoscerà S′R′, e mS′ nel modo poc'anzi accennato.

62. Suppongasi ora, che la galleria osservata dal punto V sia obbliqua com'è VQ, la cui projezione applicata al suo punto finale Q sarà VF′ = Rt, ed il cui cateto VR sarà noto dalla sua inclinazione. In tal caso sarà l'altezza nR = NV — VR, e la riduzione di Rt sarà da farsi dal punto R al punto dato X. Il che si farà come al N.° 55.

63. Supponendo che la projezione Rt ridotta sia l'orizzontale XY, se conducesi per essa un piano orizzontale XYK esso taglierà la retta VI nel punto P, e conducendo YP si conoscerà XP, e YP nel modo sopra esposto (N.° 60).

64. Da ciò, che ora abbiamo esposto nel caso che la galleria obbliqua sia ascendente facilmente comprendesi quello, che dee farsi per ridurre ad un dato livello una galleria discendente come VQ'.

65. Le operazioni esposte per trovare le quantità divisate nel Problema si possono esprimere in disegni misurabili con una data scala. A tal fine si calcoli primamente nella pianta (*Fig.* 10, *N.*° 2) la retta nr perpendicolare alla direzione laterale Fr del filone; quindi (*Fig.* 10, *N.*° 3, 4) si alzi una verticale nZ, e prendendo nu eguale al cateto nV del pozzo obbliquo si conduca dal punto u una orizzontale $ur' = nr$ perpendicolare alla retta nu, e supponendo, che la galleria uF sia orizzontale (*Fig.* 10, *N.*° 3), e perciò nello stesso piano con nr, ossia ur' si alzi un'altra verticale nZ'$=n$Z (*Fig.* 10, *N.*° 5). Quindi prendendo nV eguale al cateto del pozzo, si conduca VF'$=n$F (*Fig.* 10, *N.*° 2).

66. Per ridurre la galleria VF' (*Fig.* 10, *N.*° 5) al livello del punto R' si trasporti a questo livello la retta ur' (*Fig.* 10, *N.*° 4) colla regola esposta al N.° 50, e sia Rg la retta trasportata.

Si trasporti questa retta Rg sulla pianta (*Fig.* 10, *N.*° 2) nella direzione di nr, e sia $ng=$Rg. Quindi conducendo gf' paralella a Gr, risulterà nf' per la lunghezza della galleria trasportata al punto R' della *Fig.* 10, *N.*° 5. Prendasi ora R$f' = nf'$ e si applichi al livello stesso di R perpendicolarmente alla retta nZ, e così si avrà la galleria VF' ridotta al livello di R', ed in misura della scala assunta.

67. Questa retta Rf' corrisponde alla retta Rf', disegnata in prospettiva nella *Fig.* 10, *N.*° 3, ed è ora da esprimere nella pianta la distanza (*Fig.* 10, *N.*° 3) del punto f' dal punto S, nel quale il piano orizzontale condotto per la gal-

leria Rf' taglia il pozzo IV. A tal fine si calcoli RS nel triangolo rettangolo VRS, e poichè si è presa V$h = nl$ (*Fig.* 10, *N.*° 2) ed è RO = Vh, perciò sulla retta nl si prenda una porzione nS = RS, e conducendo dal punto f' la retta f'S sulla retta nl, si avrà la distanza che dal punto S avrà sì il punto iniziale n, che il finale f' della galleria ridotta al punto R.

68. Dalle precedenti cose appare che, quando siasi osservata l'inclinazione, e direzione di due filoni posti a diverso livello cognito, si potranno ridurre le osservazioni come fatte allo stesso livello: cioè a dire le osservazioni fatte al livello più basso potranno ridursi al livello più elevato, e viceversa.

69. Due pozzi obbliqui si possono riguardare come due gallerie molto pendenti: onde il Problema proposto, supponendo due pozzi, si può applicare a due gallerie di qualunque pendenza. Avvi però questa diversità tra i pozzi, e le gallerie, che quelli hanno alla superficie del terreno la loro bocca, che sono come i punti iniziali delle linee, che li rappresentano: onde si può immediatamente osservare la loro differenza di livello, la loro distanza orizzontale, e la direzione della distanza stessa. Laddove nelle gallerie essendo generalmente sotterranei i loro punti iniziali, conviene dedurre da altre misure la differenza di livello dei punti medesimi, la distanza loro orizzontale, e la direzione della medesima. Date però tali quantità in due gallerie, e data la lunghezza, l'inclinazione, e direzione delle medesime, si troverà la lunghezza, l'inclinazione, e direzione della retta, che congiunge i loro due punti finali, operando nel modo esposto per due pozzi.

La soluzione di tali Problemi serve a determinare l'escavazione da farsi per giugnere da un punto sotterraneo ad un altro o per dare scolo alle acque, o per introdurre una comunicazione d'aria, e per altri oggetti occorrenti nel lavoro delle miniere.

Lemma V

70. *Dal termine* V, Z *di due pozzi obbliqui* KV, (*Fig.* 10, *N.* 1, 2) QZ, *dei quali si conosce per misura la lunghezza, l'inclinazione, e la direzione, partano due gallerie, di cui si conosca la direzione* VF', ZC, *la lunghezza, e l'inclinazione; ed al termine loro* F', C *siasi osservata l'inclinazione, e direzione laterale* GF, HC *di due filoni: cercasi, che l'osservazione fatta al livello più basso* V *si riduca ad essere come fatta al livello più elevato* Z.

Per chiarezza delle operazioni si cominci a disegnare la pianta delle osservazioni fatte, e primamente della posizione dei pozzi: al qual fine gioverà l'elevazione fatta nella *Fig.* 10, *N.°* 1. Si calcoli pertanto l'orizzontale corrispondente all'inclinazione del pozzo QZ, la cui bocca Q è meno elevata dell' altra K, e sia questa l'orizzontale qm', che si disegnerà con una certa scala, la quale serva per tutta la pianta, ed anche per l'elevazione ortografica.

Essendo nota per misura la lunghezza, e direzione dell' orizzontale ML corrispondente all'elevazione della bocca K sulla bocca Q dei due pozzi, si prenda una retta $m'l$ eguale alla trovata lunghezza, e si applichi al punto m' colla direzione trovata, cosicchè l'angolo $qm'l$ sia eguale all'angolo QML.

Essendo parimenti nota la lunghezza, l'inclinazione, e direzione del pozzo KV si calcoli la sua projezione orizzontale Vh', e prendendo $nl = Vh'$ si apponga nl al punto l colla direzione del pozzo stesso, così che sia l'angolo $nlm' =$ MLN.

In tal modo sarà disegnata la posizione dei pozzi. Quanto alle gallerie essendo nota in ciascuna la lunghezza, l'inclinazione, e direzione si calcoli il loro cateto: si calcoli parimenti la projezione di ciascuna, e supponendo che sia nF la projezione della prima si applichi al punto n colla rispettiva direzione trovata; come pure supponendo, che m'C sia

la projezione dell' altra galleria, essa si applichi al punto m' colla direzione osservata.

Finalmente supponendo che le rette FG, CH sieno le direzioni laterali dei filoni osservati, si appongano ai rispettivi punti C, F delle gallerie colla direzione in essi trovata.

Volendo ora ridurre al livello del punto Z l'osservazione fatta sul filone GF al punto V, si conduca dal punto n la retta nr perpendicolare a GF, e intendasi apposto al punto V il triangolo V Fr colla posizione dovuta alle osservate direzioni.

Ciò fatto, suppongasi primamente, che le due gallerie sieno orizzontali. Richiamando la costruzione fatta superiormente al N.° 42, vedesi, che per ridurre al livello del punto Z l'osservazione fatta al punto V conviene conoscere l'altezza VR, e l'altezza Rn, ovvero IH. Ora queste quantità dai dati si conoscono (N.° 36, 43). Perlocchè si conoscerà (N.° 50) la lunghezza nf' della galleria VF' ridotta allo stesso livello della galleria m'C ossia ZC.

Quindi si avrà la distanza perpendicolare del punto R dalla direzione laterale del filone ridotta all' altezza VR, la qual distanza sarà eguale ad ng (N.° 50).

71. Se la galleria ZC fosse obbliqua (*Fig.* 14, *N.°* 1), si calcoli il suo cateto Z'Z, e se essa sarà ascendente, il punto iniziale Z' della sua projezione CZ' sarà superiore al punto Z. Quindi il punto, al quale sarà da ridurre l'altra galleria VF, sarà il punto R'; per trovare il quale sarà da determinare la verticale VR', che sarà eguale a VR + RR', cioè all' altezza VR trovata nel caso che la galleria sia orizzontale più il cateto dell' obbliquità della medesima. Che se la galleria fosse ascendente il cateto sarebbe da sottrarsi da VR, ed allora sarebbe R'' il punto, a livello del quale sarebbe da ridurre l'altra galleria.

72. Se anche l'altra galleria nF (*Fig.* 10, *N.°* 2) è obbliqua, si calcoli il suo cateto, e supponendo che sia ascendente, sia VV' il cateto (*Fig.* 14, *N.°* 2). Allora l'altezza

dalla quale si avrà a fare la riduzione, sarà nV', e fatta che sia la riduzione al livello dell'altra si segnerà nella pianta il valore ng' della galleria ridotta.

Quindi vedesi ciò che deve farsi per la riduzione, quando ambedue le gallerie sono discendenti, ovvero quando una è ascendente, e l'altra discendente.

Lemma VI

73. *Data l'osservazione fatta su due filoni da due date gallerie orizzontali, che partono da due punti sotterranei di due pozzi, ridurla come fosse fatta da due gallerie diramate orizzontalmente da uno stesso punto di un altro pozzo* (*Fig.* 10, *N.* 1, 2).

Se i pozzi sono obbliqui come KV, QZ, ed i punti da cui partono le gallerie sono a diverso livello, come sono V, Z, si cominci a ridurre questo caso a quello di due pozzi verticali MZ, nV (N.° 47).

Quindi si riducano le due gallerie allo stesso livello, e se ne faccia la pianta a norma della fatta riduzione. In quella le gallerie ridotte allo stesso livello saranno nf', $m'C$.

Tali gallerie, essendo orizzontali, ed allo stesso livello, potranno concorrere in un punto. Si prolunghino pertanto finchè concorrano in un punto B. In tal modo si avrà un triangolo, nel quale sarà cognito il lato $m'n$ (N.° 49), inoltre dalle direzioni note delle due gallerie Cm', $f'n$ si conoscerà l'angolo nBm', e dalle direzioni note nf', nl della galleria stessa, e dell'inclinazione del pozzo si conoscerà l'angolo lnf', dal quale si conoscerà l'angolo Bnm' come supplemento dell'angolo lnf'. Perlocchè si conosceranno i lati Bm', Bn. Se dunque si supporrà, che l'osservazione sui due filoni sia stata fatta da due gallerie BC, Bf', essa equivalerà all'osservazione fatta dai due punti m', n andando per le due gallerie $m'C$, nf'.

Da questa riduzione segue, che nella pianta debbansi

segnare le rette Bc, Bb condotte dal punto B perpendicolarmente alle direzioni laterali Hc, $f'b$, le quali invece delle perpendicolari m'E, ng servir devono per fare altre operazioni.

74. Da queste perpendicolari appare la ragione per cui si possa fare la proposta riduzione; perciocchè per esse i triangoli B$f'b$, $nf'g$ sono simili tra loro, epperò i lati sono tra loro proporzionali: e lo stesso è nei triangoli m'EC, BcC: da che ne segue che alla perpendicolare ng risponde la galleria nf' come alla perpendicolare Bb corrisponde in lunghezza Bf' della galleria stessa ridotta, e nello stesso modo alla perpendicolare m'E corrisponde la galleria m'C, come alla perpendicolare Bc corrisponde la lunghezza BC della galleria ridotta.

75. Allorchè le gallerie non sono orizzontali, si assumeranno le loro projezioni per fare la proposta riduzione, cioè a dire si applicheranno le projezioni all'altezza dovuta; quindi si ridurranno allo stesso livello, e finalmente si farà l'operazione per ridurre l'osservazione come fatta da uno stesso punto situato nel piano orizzontale, che passa pel livello comune alle due projezioni: il che si farà a norma dei Lemmi antecedenti.

PROBLEMA 1.°

76. *Data l'inclinazione, e direzione di due filoni espressi da due piani, determinare collo Stratimetro l'inclinazione, e direzione della loro comune sezione* (*Fig.* 15).

Sieno rappresentate dai due piani EKQK', MNnm le due piatine dello Stratimetro espresse nella *Fig.* 15, e sia E'R, hH il piano orizzontato del telajo, su cui sono montate le piatine, ed è situata la tavoletta: il qual piano supporremo essere quello della carta, su cui è disegnata la figura. Si dia a ciascuna piatina l'inclinazione, e direzione, che si è osservata nel corrispondente filone; e per fissare una posizione, suppongasi che da tale disposizione il cadente di una

piatina, o di un filone riesca rivolto verso il cadente dell' altra. Inoltre suppongasi, che le punte di due dei regoli rappresentati da dI, bI concorrano nel punto I, e le due altre dei regoli fX, aX concorrano nel punto X. Se si congiungono i due punti I, X colla retta IX, questa sarà la comune sezione dei due piani.

77. Per determinare la sua inclinazione, e direzione si conduca dal punto I sulla tavoletta rappresentata dal piano orizzontale RE'Hh una verticale II', e si segni sulla tavoletta il punto I'. Questo punto si determinerà per mezzo del cateto istromentale, facendo venire in contatto col punto I la punta superiore del cateto medesimo; poichè allora l'altra punta inferiore sarà nella verticale II'. Il punto I si segni, ovvero ad esso si punti un ago. In simile modo si fissi il punto Y, che sarà nella verticale condotta dal punto X.

78. Ora se dal punto I si conduce una retta IY' paralella all' orizzontale YI', sarà I'Y = Y'I, e l'angolo XIY' sarà l'inclinazione della retta XI. Quest' angolo si determinerà facilmente nel seguente modo. Allorchè col cateto istromentale si determina la verticale II' si osservi su di esso quanti centimetri vengano indicati: lo stesso si faccia, allorchè si determina la verticale XY. Si noti quindi la differenza di queste due altezze che sarà XY'. Si misuri dippoi colla stessa scala del cateto la lunghezza YI' che sarà eguale ad Y'I, e così si avrà un triangolo rettangolo nel quale saranno noti i lati XY', ed IY', ed inoltre l'angolo retto XY'I; onde si conoscerà l'angolo XIY', che è l'inclinazione della retta XI.

Determinata così l'inclinazione della comune sezione, si conoscerà da qual parte sia ascendente, che è quella, in cui l'altezza XY è maggiore di II'. Quindi col gonimetro si determinerà la sua direzione: il che si farà collocandone la meridiana istromentale, o una sua paralella sulla linea YI' in modo che il Nord istromentale sia verso la parte ascendente; ed allora il Nord magnetico indicherà quale sia la direzione ascendente della comune sezione.

79. Il motivo, per cui cercasi di determinare l'inclinazione, e direzione di due filoni si è per potere sopra luogo giugnere coll'escavazione alla stessa comune sezione: giacchè dove essi s'intersecano sogliono essere più ricchi. Il conseguimento di questo fine richiede altre operazioni, le quali per complemento della soluzione del Problema verrò esponendo.

80. L'inclinazione, e direzione della comune sezione di due filoni, dipendendo unicamente dalla inclinazione, e direzione dei medesimi, rimane la stessa, qualunque sia la loro distanza relativa, nella quale si fece l'osservazione della loro inclinazione, e direzione. Ma secondo la diversità di tale distanza la comune sezione riesce in diverso luogo. Ora per potere col sussidio dello Stratimetro determinare il luogo preciso della comune sezione dei due filoni corrispondente alla loro locale posizione, conviene primamente formare una scala, colla quale venga rappresentata in proporzione la reale posizione dei filoni, e quindi servirsi di essa per trovare sopraluogo i diversi punti della comune sezione: a che soddisfaranno le soluzioni dei due seguenti Problemi.

PROBLEMA 2.°

81. *Formare una scala, colla quale lo Stratimetro venga disposto in modo, che con essa si possano rilevare le misure reali relative alla determinazione locale della comune sezione di due dati filoni* (*Fig.* 16, *N.°* 1, 2).

Sia B la projezione di un pozzo verticale, di cui sia data l'altezza; e da tal punto partano due gallerie note BF, BC, le quali sieno allo stesso livello. A questo caso si riducano i dati, quando sieno diversi: il che si farà come fu esposto nei precedenti Lemmi. All'estremità di una galleria siasi osservata la direzione laterale AC, e l'inclinazione di un filone TS, ed all'estremità dell'altra siasi osservata la direzione laterale RF, e l'inclinazione di un altro filone VF.

Sia

Sia pure misurata la lunghezza delle gallerie BF, BC, e la loro direzione.

82. Le osservazioni fatte si esprimano in disegno. A tal fine si fissi una scala di metri, se per le misure reali si usò il metro. Quindi si conduca una retta BC, a cui si diano tanti metri della scala, quanti se ne osservarono. Essendo cognita la direzione delle gallerie, si conoscerà l'angolo CBF, il quale altronde può essersi misurato sopraluogo. Dal punto B pertanto si conduca un'altra retta BF, la quale colla retta BC formi un angolo eguale al trovato; ed alla stessa retta BF si dia colla scala la lunghezza osservata dalla galleria.

83. Parimenti essendo note le direzioni BC, CA si conoscerà l'angolo BCA, il quale pure può essere stato misurato sopraluogo. Per lo che conducendo dal punto C una retta CA, che formi con BC l'angolo trovato, sarà AC la direzione laterale di un filone. Nello stesso modo dalle direzioni BF, FR si conoscerà l'angolo BFR: onde conducendo la retta VR, ossia VF la quale con FB formi l'angolo trovato, sarà VF la direzione laterale dell'altro filone, e così saranno disegnate le gallerie, e le direzioni laterali dei filoni in proporzione delle misure reali.

Si conducano ora dal punto B la retta BA perpendicolare a TC, e la retta BR perpendicolare a VF, e si calcoli la loro lunghezza: il che si potrà fare agevolmente; perciocchè nel triangolo rettangolo ABC, essendo noti il lato AC, e l'angolo BCA, si conoscerà BA, come pure nel triangolo rettangolo RBF, essendo noti il lato BF, e l'angolo BFR, si conoscerà BR.

84. Si calcoli parimenti l'angolo RBF, e l'angolo ABC, come pure l'angolo ABR, che sarà la somma dei tre angoli noti RBF, ABC, FBC.

Delle due rette BA, BR si assuma l'una, o l'altra per formare la scala per lo Stratimetro, ma primamente si dia (*Fig.* 16, *N.*° 2) alla piatina EKQK' l'inclinazione, e dire-

zione del filone TC, ed all'altra NH*m*M l'inclinazione, e direzione dell'altro filone VF, e suppongasi, che dalla loro posizione risulti quella disposizione, che è rappresentata nella *Fig.* 16, *N.*° 2.

85. Sulle due piatine si segnino due rette orizzontali, che sieno allo stesso livello; e per facilità si assuma per una di queste rette il bordo inferiore di quella piatina, che riesce più elevata dell'altro; come nel caso presente è il bordo EK. Per segnare sull'altra piatina NH*m*M la retta GO allo stesso livello con EK servirà il cateto istromentale: cioè a dire con questo si prenda l'altezza dei punti E, K, e si segnino sulla tavoletta le projezioni E', *h* dei punti medesimi E, K, fissando, se bisogna, un ago a ciascuno. Si porti col cateto l'altezza EE' ai punti G, O dei bordi laterali della piatina NH*m*M, e vi si segnino con matita, segnando parimenti sulla tavoletta le loro projezioni verticali G', O'. Congiugnendo i punti K, O, ed i punti E, G colle rette KO, EG, il piano orizzontale EKOG passerà per le direzioni laterali dei due filoni dati, e potrà rappresentare il piano della cava, su cui si è fatta l'osservazione, e poichè la tavoletta è orizzontale, perciò congiungendo i punti *h*, E', G', O' colle rette *h*E', G'E', G'O', O'*h*, il piano *h*E'G'O' sarà eguale al piano KEGO, e potrà parimenti rappresentare il piano della cava, su cui si è fatta l'osservazione.

86. Per formare la scala (che chiameremo dello Stratimetro) si assuma la retta BA (*Fig.* 16, *N.*° 1) che fu calcolata; e supponendo che siasi trovata eguale ad un certo numero di metri per esempio a 5 metri, si divida BA in altrettante parti eguali. Quindi da un punto A della retta *h*E' (*Fig.* 16, *N.*° 2) si conduca sulla tavoletta una retta BA perpendicolare alla stessa *h*E': questa retta si potrà assumere più, o meno grande, purchè si ritenga come divisa nell'indicato numero di parti; ma poichè lo spazio della tavoletta è limitato, e su di essa deve potersi disegnare colla stessa scala anche l'altra galleria BF (*Fig.* 16, *N.*° 1), perciò si

dovrà prendere BA di tale grandezza, che possa ottenersi questo fine: nel che si avrà riguardo a fare la scala più grande che sia possibile dentro l'indicato limite: poichè quanto più è grande la scala, tanto meno le misure si discostano dall'esattezza.

87. Formata la scala, e data alla perpendicolare BA (*Fig.* 16, *N.*° 1, 2) la lunghezza conveniente, si conduca dal punto B un'altra retta BR perpendicolare alla retta G'O', e si dia a BR quel numero di metri, che si sarà trovato, misurandoli sulla scala dello Stratimetro. Quindi siccome nella prima disposizione dello Stratimetro la retta G'O' poteva riuscire più, o meno lontana dall'altra *h*E', ovvero dal punto B; perciò determinata che sia la lunghezza BR si farà scorrere con moto paralello a sè stessa l'asta, che sostiene la piatina NH*m*M, finchè la projezione G'O' della retta G'O' venga a corrispondere al punto R: il che si riconoscerà per mezzo del cateto istromentale. La *Figura* 16, *N.*° 2 rappresenta tale corrispondenza come già ottenuta: onde sulla tavoletta la posizione delle direzioni dei due filoni per rapporto alle perpendicolari riesce disegnata in proporzione delle grandezze reali misurate.

88. Ciò fatto si appongano alla piatina i regoli per trovare la comune sezione dei due filoni, e suppongasi, che le punte s'incontrino nei punti I, X; sarà IX la comune sezione, di cui si determinerà l'inclinazione, e direzione nel modo sopraindicato (N.° 76).

89. Prolungando la comune sezione XI, ossia ZI, e supponendo, che per essa passi un piano verticale ZII'Z', esso formerà col piano orizzontale della tavoletta una comune sezione Z'I', e col piano verticale ZOO'Z' un'altra comune sezione ZZ', la quale sarà verticale. Inoltre la comune sezione ZI dei due filoni concorrerà colla retta orizzontale OG, che è la direzione laterale del filone NH*m*M.

90. La retta Z'I' sarà tagliata dall'orizzontale BR nel punto *p*, onde, risultando le rette orizzontali Z'R, R*p*, Z'*p* da

una disposizione dei filoni simile alla reale, esse potranno misurarsi colla scala dello Stratimetro, e da esse si conoscerà nel triangolo rettangolo RZ'p l'angolo RZ'p, il quale altronde potrà conoscersi dalle direzioni note delle rette Z'p, Z'R.

91. Se dal punto p per la retta BR intendesi passare un piano verticale, esso formerà coll'altro piano verticale ZIIZ' la sezione verticale Pp; e si potrà nel seguente modo conoscere la retta ZP, che concorre coll'orizzontale OG nel punto Z. Essendo ciascuno dei due punti X, I della comune sezione determinato dal concorso di due regoli (*Fig.* 16, *N.*° 1, 2), perciò vi si potrà soprapporre un filo di ferro sottile, e ben diritto, il quale rappresenterà la comune sezione XI. Quindi si ponga la punta inferiore del cateto istromentale al punto p, e si faccia venire l'altra ad incontrare la linea ZI, il qual incontro sarà nel punto P; e così si avrà misurabile colla scala la retta ZP, la di cui determinazione è necessaria per la soluzione del seguente Problema.

PROBLEMA 3.°

92. *Determinare coll'uso dello Stratimetro l'escavazione più vantaggiosa per giugnere dalla superficie di un Monte alla comune sezione in esso esistente di due filoni, di cui si conosce l'inclinazione, e direzione, e la relativa loro posizione.*

Posta l'antecedente costruzione si faccia sulla carta la pianta delle quantità segnate sulla tavoletta, servendosi della scala dello Stratimetro, o anche di altra più grande: cioè a dire (*Fig.* 17, *N.*° 1, 2) primamente si conduca una retta BR, la cui lunghezza sia eguale al numero di metri superiormente trovato, misurandoli sulla scala, che si sarà fissata. Dal punto R si conduca una retta Z'R perpendicolare a BR, a cui si darà la lunghezza trovata, misurandola sulla scala stessa, su cui si misurò BR. Si prenda Bp = BR — Rp, la quale Rp è nota (N.° 90); e si congiungano i punti p, Z' colla retta pZ'.

93. Per la retta pZ', che rappresenta l'Icnografia, o la projezione della comune sezione dei due filoni dati, intendasi (*Fig.* 17, *N.*° 2) passare un piano verticale, nel quale sarà la stessa comune sezione, che sarà la retta ZP; e supponendo, che questo piano sia condotto per la montagna passando per la reale comune sezione, esso prolungato presenterà il profilo della montagna stessa espresso dalla curva O'MNTYn.

94. Per il punto Z dell'Icnografia intendasi nel profilo alzata la verticale Z''Z; e supponendo che il punto Z sia nel piano orizzontale, in cui fu fatta l'osservazione, e che la sua reale elevazione sia determinata nel modo, che or ora si dirà, si conduca da tal punto Z un piano orizzontale ZR'p, il quale col piano ZpP'Z'' verticale, che passa per la comune sezione, formerà la sezione orizzontale Zp. Dallo stesso punto Z si conduca un altro piano verticale, il quale passi per la retta Z'R dell'Icnografia, ossia formi col piano orizzontale ZR'p l'angolo R'Zp eguale all'angolo formato dalla comune sezione dei due dati filoni colla projezione della direzione laterale ZR' del filone mM'M''Z, il quale nella *Fig.* 17, *N.*° 2 è espresso dal piano ZM''M'm. Questo piano orizzontale ZR'p è disegnato in iscorcio, e deve intendersi come situato dietro il piano della carta, che rappresenta quello del profilo della montagna. La retta però Zp, che è orizzontale, è nello stesso piano con quello, che passa per la comune sezione ZP dei due filoni dati: onde l'angolo PZp è la misura dell'inclinazione della stessa comune sezione.

95. Prendendo quindi ZR' = Z'R (*Fig.* 17, *N.*° 1, 2), e tirando dal punto R' la retta pR' perpendicolare a ZR', conducasi per la retta pR' un piano verticale pR'RP', il quale col piano ZpP'Z'', che passa per la comune sezione dei filoni dati, formerà una sezione pP intercetta tra l'orizzontale Zp e la stessa comune sezione ZP. Questa retta pP deve determinarsi siccome quella che è necessaria per la soluzione del Problema; e la determinazione è facile, poichè per costruzione è retto l'angolo PpZ, il lato ZP è noto (N.° 91), e

l'angolo PZp è parimenti noto, essendo eguale all'inclinazione della comune sezione, onde si conoscerà anche pP.

96. Se si prende un'altra distanza Zl, e si conduce Ll paralella a Pp, si potrà parimenti conoscere il valore di lL, poichè nel triangolo rettangolo ZlL, essendo noto l'angolo LZl, e la distanza assunta Zl, si conoscerà Ll, come anche Zl.

97. Prolungando le rette $R'Z$, pZ, PZ oltre il punto Z, il piano $Zp'r$ sarà orizzontale, e la comune sezione ZP'' sarà ascendente sopra lo stesso piano, che è quello, in cui fu fatta l'osservazione: laddove ZP è discendente al di sotto dello stesso piano. Conducendo le verticali $P''p'$, $l'L'$ dai punti p', l' esse si conosceranno, quando sieno date le distanze Zp', $l'L'$, come si è determinato lL nel triangolo ZlL, mentre l'angolo $L'Zl'$ essendo eguale all'angolo LZl, è noto.

98. Preparato così il disegno colla scala assunta, si vada sopraluogo, e cominciando (*Fig.* 17, *N.*° 1), dalla bocca del pozzo B, si alzi una palinata esprimente un piano verticale nella direzione trovata alla retta BR, e si livelli dal punto B al punto p.

99. Supponendo che la bocca del pozzo sia indicata in elevazione dal punto B (*Fig.* 17, *N.*° 2), questo deve intendersi sul monte in un piano diverso dal piano, in cui è il profilo $MNYn$, ed allora la palinata potrà essere espressa dalla retta BY, supponendo cioè che la verticale pY condotta dal punto p alla superficie del monte sia maggiore dell' altezza nota BB' del pozzo al disopra del piano orizzontale $ZR'pB'$. Se supponesi per esempio che il punto Y siasi trovato 2 metri più elevato della bocca B del pozzo, e che l'elevazione del pozzo sul piano orizzontale $ZR'pB'$ di osservazione sia di 10 metri, ed espressa da BB', ossia pC, sarà pY un'elevazione di 12 metri.

100. Questa elevazione essendo nel piano verticale, che passa per la comune sezione ZP dei filoni dati si assumerà come la fondamentale per determinare le elevazioni dei diversi punti del profilo del monte, in cui è la stessa comune

sezione . Quindi per riconoscere meglio l' andamento gioverà nel disegno condurre dal punto Y una retta YY' orizzontale, cioè paralella alla retta Zp, che è nel piano orizzontale $ZR'p$, e nel piano, per cui passa la comune sezione.

101. Dal punto p (*Fig.* 17, *N.*° 1) si alzi un'altra palinata pZ' nella direzione della comune sezione trovata; e livellando si misuri orizzontalmente una lunghezza $Z'p$ eguale alla trovata superiormente, e si fissi nel punto Z' un altro pichetto, il quale nel profilo sarà da porsi nel punto T.

102. Siccome la determinazione di questo punto influisce di molto sulle altre determinazioni, perciò gioverà verificarla: il che si farà nel seguente modo. Si prolunghi la palinata da B sino in R dando a BR la lunghezza trovata. Dal punto R si alzi un'altra palinata in una direzione perpendicolare a BR, e con un piombino si osservi se il suo filo ridotto nel piano verticale, che passa per la palinata va ad incontrare il punto Z', ossia Z; e quando ciò si osservi, sarà segno di esatta determinazione. Più esattamente, e speditamente ciò si otterrà col Teodolite.

103. Si continui nella stessa direzione $Z'p'$ la palinata, la livellazione, e la misura orizzontale facendo stazione nei siti più bassi, giacchè in alcuno di questi deve essere il punto, da cui colla più breve escavazione si giugnerà sulla comune sezione. In tali siti si fisserà un pichetto, e si noterà la distanza di ciascuno dalla verticale che passa pel punto Z', la quale in disegno è indicata dalla retta TZ; come pure si noterà il livello di ciascun di questi punti per rapporto all' orizzontale yY.

104. Le distanze, che si prenderanno sulla direzione $pZ'p'$ essendo orizzontali corrispondono a quelle, che nel disegno sono misurabili sulla retta $p'Zp$, che è orizzontale, e nel piano verticale che passa per la comune sezione dei filoni dati; onde come sono calcolate le verticali Pp, Ll, che sono nella parte discendente della stessa comune sezione, così sono calcolabili le verticali $p'P''$, $L'l'$ che sono nella parte ascen-

dente della stessa comune sezione, e che dipendono dalle distanze orizzontali Zl', Zp', che si misurano sopraluogo.

105. Quindi fatte che sieno le indicate operazioni sopraluogo si calcolerà quale ne sia l'altezza dei punti fissati sopra la comune sezione, onde appaja quale sia quello, che dia la minima distanza verticale dalla sezione stessa.

106. Supponendo che dalla livellazione risulti quel profilo che è indicato dalla *Fig.* 17, *N.*° 2, i punti M, N sarebbero quelli, la cui elevazione sarebbe da calcolare. Si chiami pertanto a l'elevazione del punto Y sul piano orizzontale. Sia c la distanza NY″ del punto N al di sotto dell'orizzontale yY. Sia finalmente d la verticale $L'l'$ intercetta tra $Z'l$, e Zl' la quale si calcolerà dipendentemente dalla distanza orizzontale Zl', che si sarà misurata, è chiaro che la distanza NL′ del punto N dal punto L′ sarà $a - c - d$.

107. Chiamando c' la distanza MY′ della verticale $P''p'$, sarà $MP'' = a - c' - d'$.

108. Dando alle lettere il valore numerico, che si sarà trovato, apparirà quale sia la minore tra le due rette NL′, e MP″, e la minore sarà quella, su cui si dovrà fare l'escavazione soddisfacente al Problema. Nel proposto profilo tal retta sarebbe MP″, abbenchè l'elevazione di M sul piano orizzontale di osservazione sia maggiore dell'osservazione del punto L′.

Così sarà sciolto il proposto Problema, che è uno dei più difficili della Geometrìa Sotterranea.

109. Il Problema relativo alla determinazione della comune sezione di due piani fu esposto in tutta la sua generalità; e da essa si potranno rilevare i varj casi, nei quali tale determinazione si potrà ottenere più facilmente. Questi casi si riducono ai seguenti Teoremi.

110. I.° Se un piano è verticale, e l'altro orizzontale, la comune loro sezione è orizzontale, e la sua direzione è quella del piano verticale.

111. II.° Quando un piano è verticale, e l'altro obbli-

quo,

quo, la comune sezione ha l'inclinazione del piano obbliquo, e la direzione del verticale.

112. III.° Due piani verticali, che hanno diversa direzione concorrono in una comune sezione verticale; e la distanza di essa da certi punti dati si può facilmente determinare dalla *Fig.* 16, *N.°* 1, nella quale sieno supposti verticali i due filoni VF, TC, e prolungati sino al concorso S.

113. IV.° Allorchè un piano è orizzontale, e l'altro obbliquo, la comune sezione è orizzontale, ed ha la direzione del piano obbliquo.

114. V.° Due piani paralelli non mai s'intersecano.

115. VI.° Due piani obbliqui formano una comune sezione, la cui determinazione teorica dipende dalla Trigonometrìa sferica, e meccanicamente si ottiene coll'uso dello Stratimetro.

OSSERVAZIONI

Ai precedenti Problemi.

116. Nei precedenti problemi noi ne abbiamo presentati i dati con una figura, in cui si potesse riconoscere la regola per la soluzione dei medesimi. Ma dalle diverse posizioni locali, che nelle escavazioni di miniere hanno le gallerie, i pozzi, ed i filoni minerali, spesso risulteranno figure molto diverse, nelle quali certe quantità dovranno prendersi ora positive ora negative. Per riconoscere queste varietà, e formarne quindi una corrispondente figura, su cui si possa facilmente, e chiaramente formare il calcolo per la soluzione dei Problemi, gioverà fare uso dello Stratimetro, avvertendo sempre di orizzontarlo esattamente.

117. Allorchè si tratta della disposizione di due piani, già abbiamo veduto, come serva l'indicato stromento. Questo però serve egualmente per dare una certa posizione anche a linee rappresentanti o pozzi, o gallerie. Siccome le

due piatine hanno i loro lati contigui tra loro perpendicolari, così uno de' lati, che sempre riesce in un piano verticale, ovvero una linea paralella al lato medesimo condotta sulla piatina, può rappresentare una linea, a cui si può dare una inclinazione, e direzione qualunque. A tal fine basta dare alla piatina stessa l'inclinazione, e direzione, che intendesi di dare alla linea, perciocchè il lato di ciascuna piatina, ovvero una linea formata da ciascun regolo, e paralella al lato medesimo, presenta per costruzione la direzione ascendente del piano della piatina medesima, e questa linea ha l'inclinazione stessa del piano, la quale, essendo in un piano verticale, ha la direzione ascendente del piano medesimo.

118. Quindi si possono facilmente sciogliere diversi Problemi: tra questi uno sia il seguente: *Formare collo Stratimetro un dato angolo con due linee, le quali abbiano una data inclinazione.*

Essendo dato l'angolo (*Fig.* 19) si prenda sui due lati AB, AC un'eguale misura, che potrà bastare di 5 centimetri.

Si conduca dalle estremità dei lati misurati una retta CB, che chiameremo seno dell'angolo dato, e si calcoli, o anche si misuri, avendo prima formata su uno dei lati la scala; ed ad una distanza eguale a questa misura si dispongano le punte del cateto istromentale, o anche di un compasso qualunque.

119. Si dispongano le piatine STK, GHM dello Stratimetro (*Fig.* 18) colla data inclinazione delle due linee: quindi ad un bordo laterale di ciascuna piatina si applichi un regolo AL AI munito di un filo di ferro ben diritto, in cui si segni una lunghezza AB, AC, di 5 metri; ed essi si dispongano in modo, che sporgano fuori del bordo inferiore TS, GH delle piatine e sieno perpendicolari al medesimo. Per tale disposizione i due fili essendo situati nella direzione ascendente delle due piatine, rappresenteranno due rette, che hanno la data inclinazione; e in tale posizione si fissino.

120. Ciò fatto si muovano le aste in modo, che le due

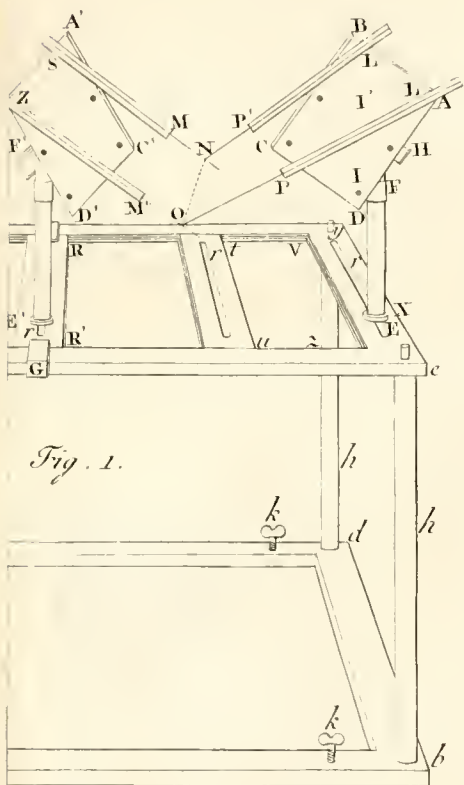



Fig. 1.

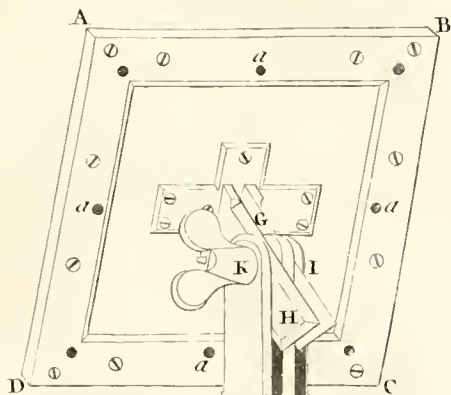



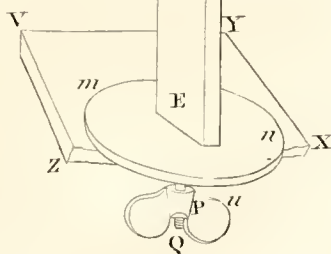
Fig. 2.

3. N.° 2.

Fig. 3. N.° 1.

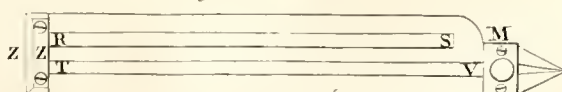
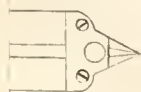



Fig. 5

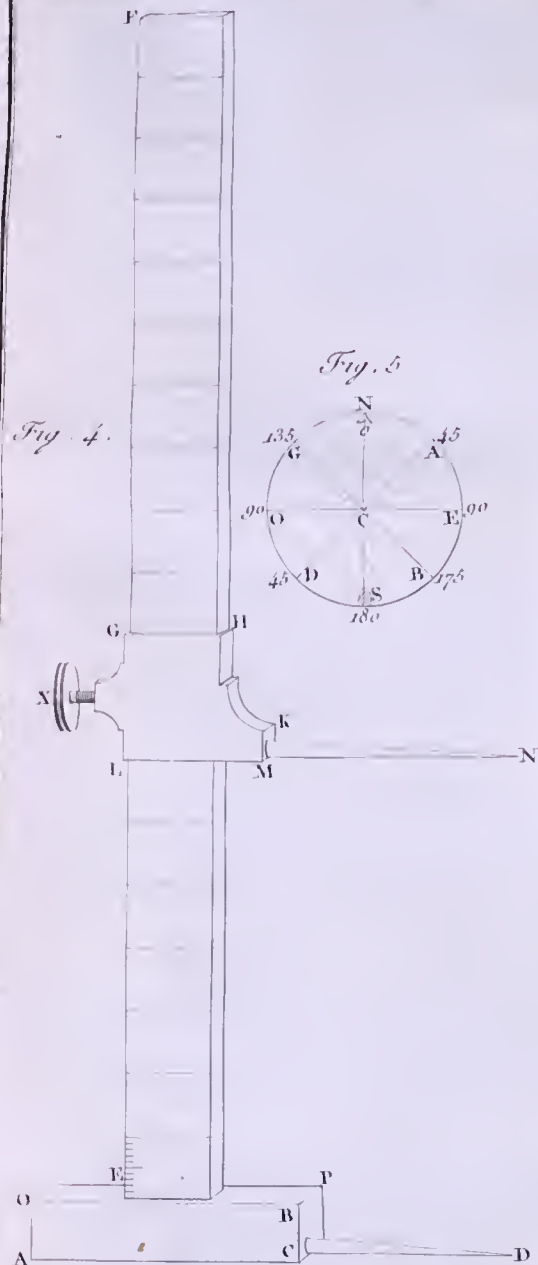
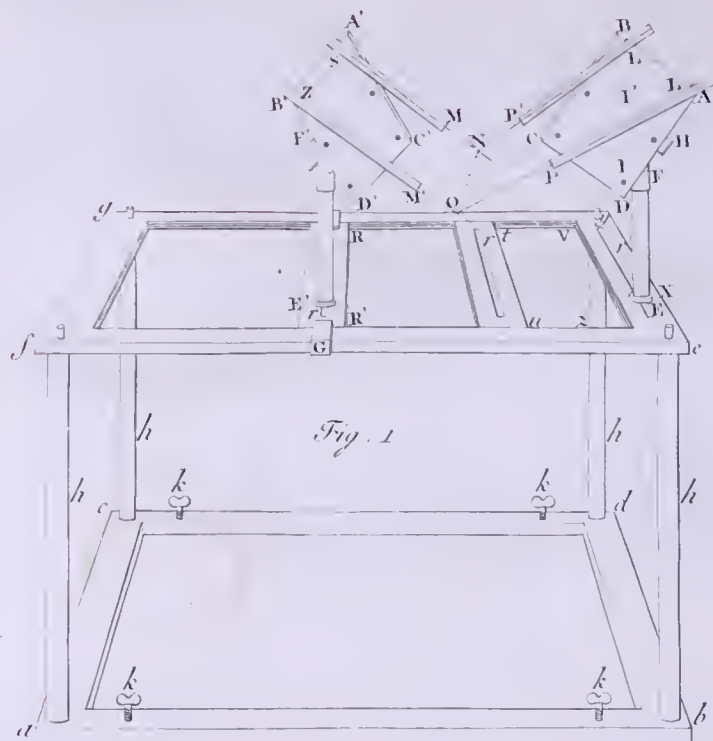
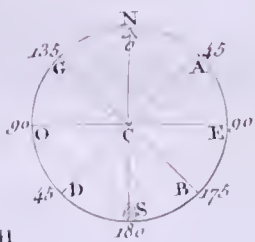
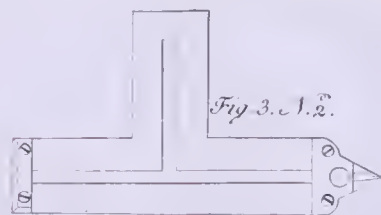
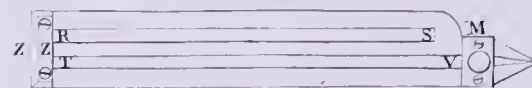
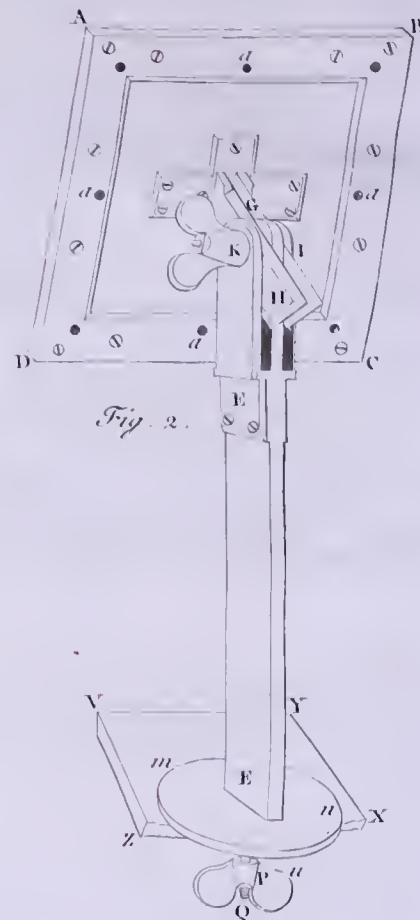
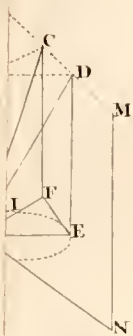
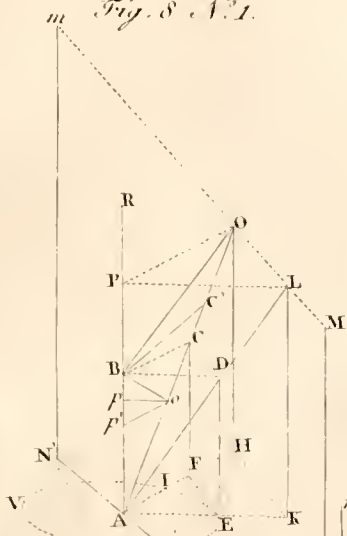
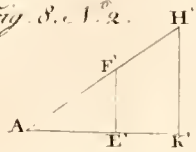
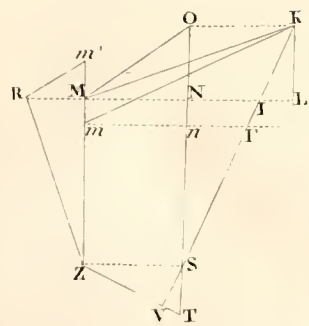



Fig. 4.

Fig. 1

Fig. 2.

Fig. 3. N.° 2.

Fig. 3. N.° 1.

Fig. 7.
Fig. 8. N.° 1.
Fig. 9.
Fig. 10. N.° 3.
Fig. 10. N.° 4.
Fig. 10. N.° 5.
Fig. 8. N.° 2.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8. N.° 1.

Fig. 9.

Fig. 10. N.° 1.

Fig. 10. N.° 3.

Fig. 8. N.° 2.

Fig. 10. N.° 4.

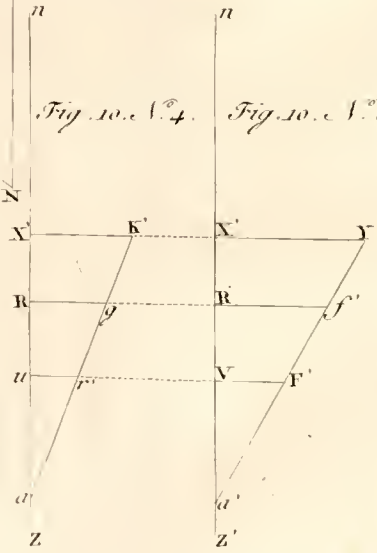
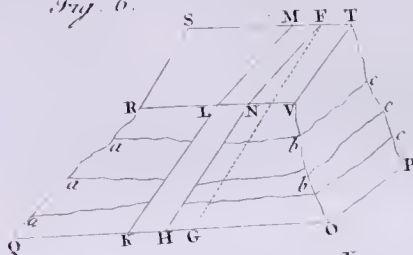
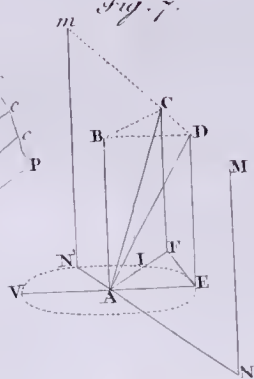
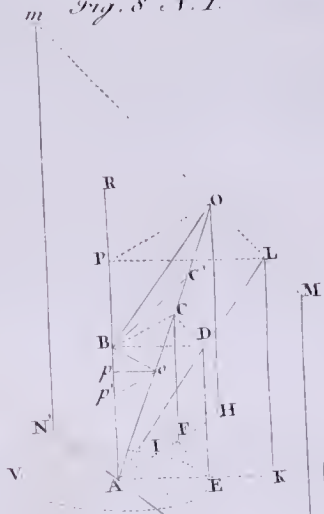
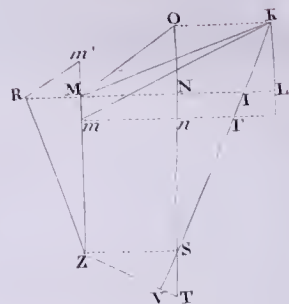
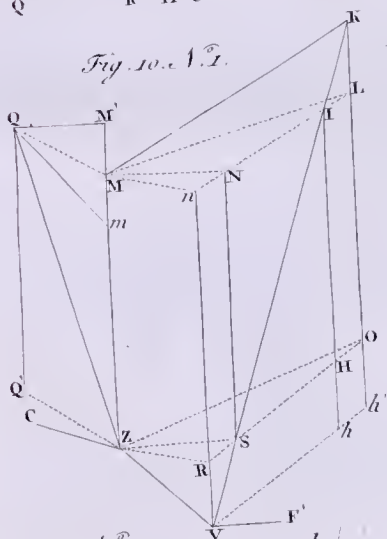
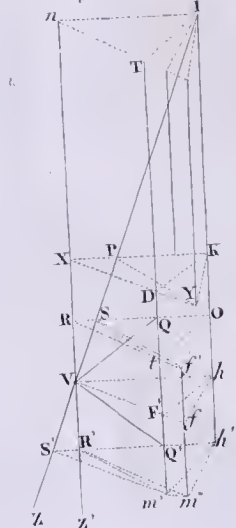
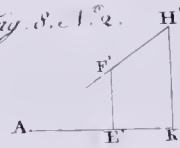
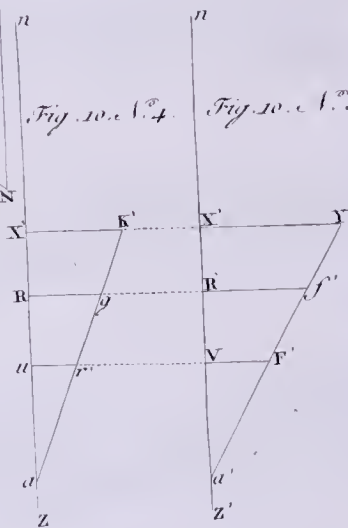
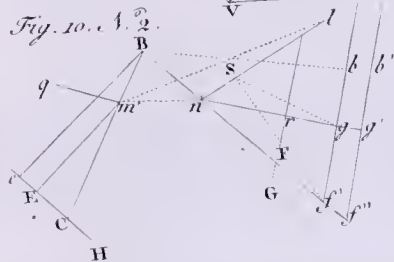
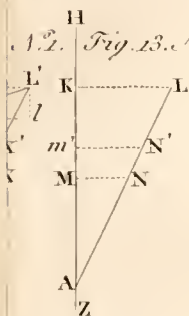
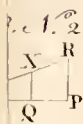
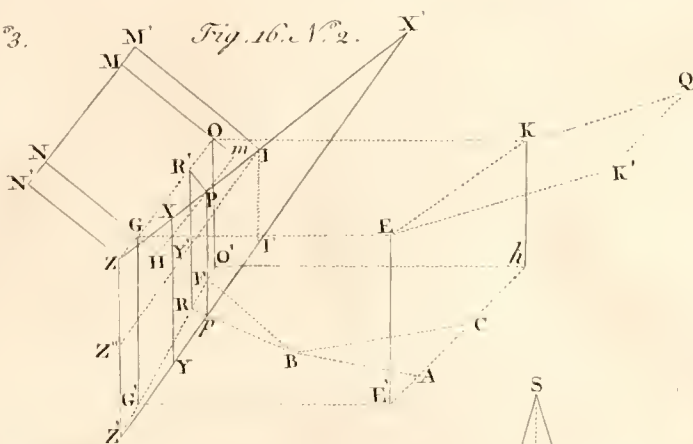
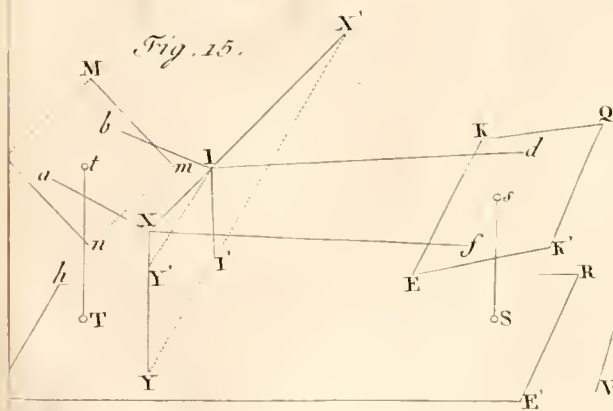
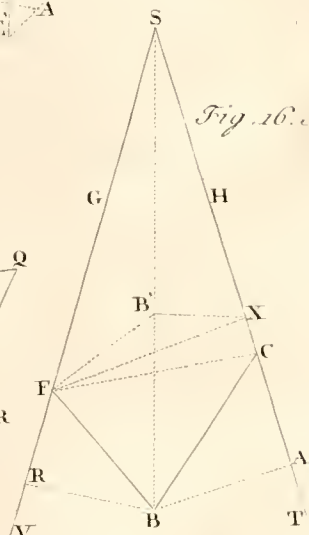
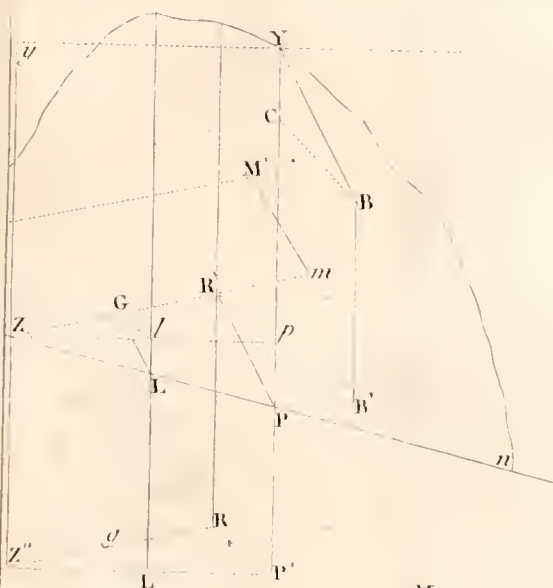
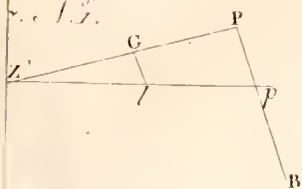
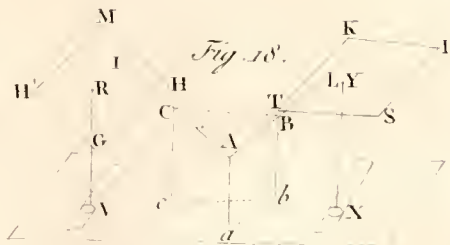
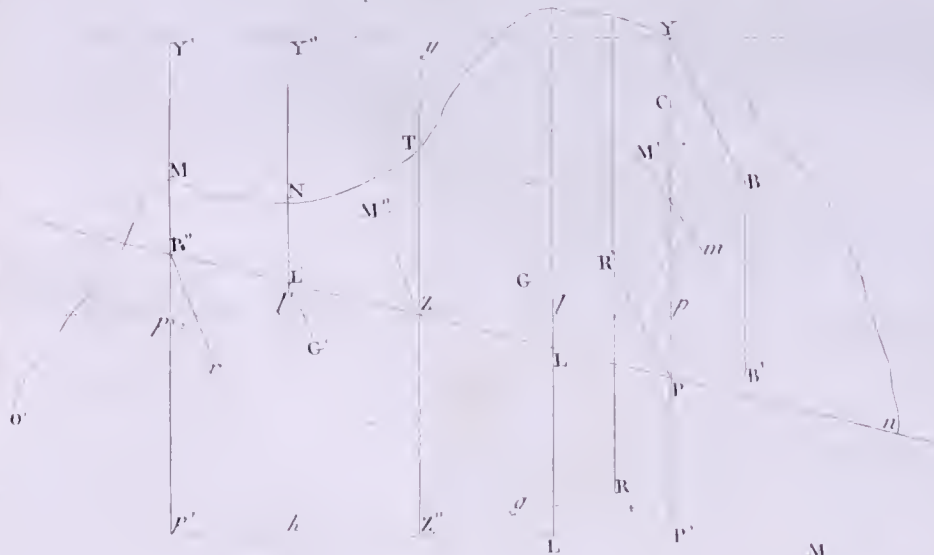
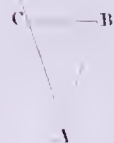
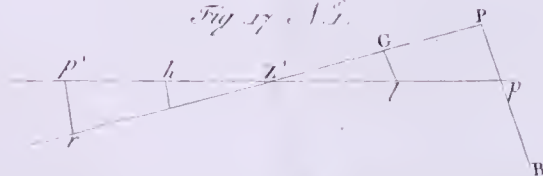
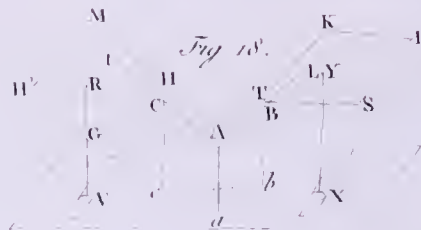
Fig. 10. N.° 5.

Fig. 10. N.° 2.

Fig. 13. N.° 3.
Fig. 16. N.° 2.
Fig. 15.
Fig. 16. N.° 1.

Fig. 11. N.° 1
Fig. 11. N.° 2
Fig. 12.
Fig. 13. N.° 1.
Fig. 13. N.° 3.
Fig. 13. N.° 2.
Fig. 14. N.° 1.
Fig. 14. N.° 2.
Fig. 15.
Fig. 16. N.° 2.
Fig. 16. N.° 1.

Fig. 19
Fig. 18.
Y
C
M'
B
m
R
G
Z
l
p
L
P
B'
n
A
R
g
Z''
L
P'
M
K
I
H'
R
H
L
Y
T
S
C
B
G
A
P
G
Z'
l
p
b
X
a
B

Fig 17. N.° 2.
Fig 19
Fig 18.
Fig 17. N.° 1.

piante dei fili vengano a toccarsi, e col cateto si misuri se la distanza delle altre due estremità dei fili sia eguale al seno dell'angolo dato; e quando lo sia, le due rette avranno le direzioni proposte, e l'angolo sarà formato, com'era richiesto. Che se non avvi tale eguaglianza, si muovano le aste XY, VR facendole scorrere per la fessura dei traversi, su cui sorgono, ed avvicinando tra loro, o discostando i traversi medesimi, finchè essendo le due punte dei fili in contatto, le altre due estremità C, B dei medesimi abbian la distanza eguale al seno dell'angolo.

121. Tale incontro delle punte si può ottenere da innumerevoli posizioni tra loro diverse delle aste, e conseguentemente delle piatine, e dei fili.

122. Un altro Problema analogo al precedente è quello in cui si cerca di *determinare l'angolo, che tra loro formano due linee, che hanno una data inclinazione*. Per scioglierlo conviene disporre le linee coll'inclinazione data, in modo che formino l'angolo dato, il che collo Stratimetro si ottiene nel modo indicato. Quindi si misurano parti eguali delle due linee, ed il seno condotto dalle estremità delle parti misurate. Quindi si misura il seno stesso sulla stessa scala, con cui furono misurate le parti eguali, e da questo triangolo isoscele si conoscerà l'angolo richiesto.

123. Se si cercasse l'angolo che è formato dalle projezioni di due linee, delle quali è data l'inclinazione, e la grandezza dell'angolo, che esse formano fra loro, si troverebbe, determinando primamente come al N.° 118 il seno CB dell'angolo CAB, e quindi conducendo sulla tavoletta dai punti A, B, C i cateti A*a*, B*b*, C*c*, i quali segneranno sulla tavoletta i punti *a*, *b*, *c*; onde le rette *ab*, *ac* saranno le projezioni delle linee oblique AB, AC, e l'angolo da esse formato sarà *cab*. Questo dippoi si determinerà dal triangolo *cab*, misurandone i lati, e calcolandone gli angoli.

124. La necessità di uno stromento meccanico diretto a presentare all'occhio la moltiplice varietà delle posizioni dei

filoni, delle gallerie, e dei pozzi, che nelle cave si rilevano con certe misure, ed atto a facilitare i calcoli richiesti per dirigere il travaglio delle miniere, fu già riconosciuta da diversi Scrittori di Geometrìa sotterranea. Il Sig. *Duhamel* (*a*) uno già ne immaginò per trovare il solido risultante dalla intersecazione di due filoni. Tale stromento però è molto complicato, ed altronde non sembra adattabile generalmente ai varj casi; ond'è che lo stesso Inventore riconobbe, che quello ben poteva essere perfezionato.

125. Recentemente il Sig. *Löscher* (*b*) pubblicò uno strumento montanistico, con cui intende di rappresentare esattamente la vera inclinazione e direzione delle traverse dei filoni per gallerie, e del profondamento dei medesimi in pozzi. Questa rappresentazione però è limitata a certe inclinazioni, e direzioni, nè è sufficiente al conseguimento dei fini sopraindicati, come non lo è il descritto dal Sig. *Duhamel*.

126. Non essendo a mia notizia verun altro stromento, che abbia qualche rapporto ai divisati oggetti, mi lusingo che quello da me immaginato, possa avere per la geometrìa sotterranea i richiesti vantaggi.

(*a*) *Duhamel*. Geometrie Souterraine. Paris.

(*b*) *Löscher*. Erfindung eines bergmännischen Instruments, wodurch, beim Ueberfahren der Gange auf Stölln, und Strechen, und beim durcksinken derselben in Schächten nicht allein ihr wahres Streichen, sondern auch ihr recht, und widersinniges Fallen genau bestimmt werden kann. Leipzig 1803.

NUOVO METODO PER LA TRIGONOMETRIA SFERICA

Del Sig. Gioacchino Pessuti.

Ricevuto li 7 Giugno 1810.

Sin dalla mia prima geometrica infanzia (che qualcuno forse dirà durare in me tuttavia, o almeno essersi rinnovata) mi venne in pensiero e coraggiosamente mi accinsi all' impresa di simplicizzare l' una, e l' altra Trigonometrìa, e massime la Sferica, e conservo ancora un mio scritto di que' remoti tempi su di quest' oggetto, che mostrai allora a qualche mio Amico, siccome qualcuno di essi tuttora vivente potrebbe renderne autorevole testimonianza. Se le circostanze della mia vita posteriore non mi permisero di pubblicare questi ed altri tali miei parti od aborti che voglian chiamarsi di quella mia prima età, ne dimisi poscia intieramente il pensiero, allorchè andai a mano a mano ritrovando alcune di queste mie idee nelle Opere, e ne' libri giuntimi alle mani, o venuti dopo di quell' epoca alla luce. Contuttociò non credo tuttavìa affatto indegne dell' attenzione de' Geometri, nè affatto prive di novità, alcune mie considerazioni sulla Trigonometrìa Sferica, che intendo esporre in questa Memoria, e che si connettono e derivano da quelle mie prime puerili meditazioni.

Non sapeva io approvare in quelle mie puerili meditazioni che la risoluzione de' triangoli obbliquangoli si dovesse dedurre, siccome comunemente si usa, da quella de' triangoli rettangoli, sembrandomi molto più naturale di doversi considerare quest' ultima come un caso particolare della prima; e molto meno potea poi soffrire che ogni caso particolare de' triangoli obbliquangoli esigesse un nuovo metodo e un nuo-

vo raziocinio per essere risoluto, e che tutti supponessero, oltre alla risoluzione de' triangoli rettangoli, la cognizione di tanti Teoremi relativi alle proprietà de' triangoli sferici, e di tanti Lemmi, che si doveano andare a mano a mano premettendo, e dimostrando. A liberar pertanto la Trigonometrìa Sferica da quest' incomodi, e da questa complicazione, mi venne in pensiero di risalire all' origine primitiva della Trigonometrìa Sferica, di rappresentare cioè i tre lati e i tre angoli di qualsisia triangolo sferico, quelli coi tre angoli piani, questi cogli angoli di reciproca inclinazione delle tre faccie di una piramide triangolare avente per base il proposto triangolo sferico, e per vertice il centro della sfera. E così rappresentando le sei parti di qualsiasi triangolo sferico, mi riuscì assai facile con una sola ed unica figura di risolvere qualunque caso, di vedere cioè e di esprimere con una conveniente formola la connessione che v' ha fra tre quali si vogliano parti date, ed una qualunque delle altre tre che per mezzo di quelle si cerchi. Da questa risoluzione generale poi de' triangoli obbliquangoli ne nascevano come facili Corollarj, e con ordine che a me sembrava più naturale, le risoluzioni di tutti i casi de' triangoli rettangoli, e l' istessa *Regola Neperiana*, che tutti li comprende in una generale enunciazione.

Un altro vantaggio di questa mia maniera di considerare la Trigonometrìa sferica si era che mi presentava in molti casi una costruzione ovvia e facile in piano della risoluzione del caso proposto, la quale poteva esser utile a quei che non hanno gran destrezza nel maneggio delle formole e del calcolo trigonometrico, e poteva anche riescir comoda ai Geometri stessi in qualche circostanza. Ma sapendo io che gli antichi Astrolabj aveano in varie guise e completamente esaurita questa costruzione in piano della Trigonometrìa Sferica, e non credendola d' altronde di grandissimo uso, mi contentava perciò in quel mio primo ed antico scritto di accennarla di volo, e quasi per una superflua digressione. Mi richia-

mò però molti anni dopo a considerarla di nuovo una Memoria dell' ingegnoso Geometra Sig. Ab. *Boscovik* inserita nel III Tomo delle sue voluminose Opere stampate a Bassano, e che ha appunto questa costruzione in piano della Trigonometrìa Sferica per unico suo argomento. Mi venne pertanto allora in pensiero di far servire questa costruzione in piano come di base, e fondamento a un Trattato elementare di Trigonometrìa Sferica, derivando dalla medesima la dimostrazione delle formole più generali, e da' Geometri più usitate. E così mi sembrava che questa costruzione in piano de' Problemi di Trigonometrìa Sferica, alla quale si era fermato il *Boscovik*, potesse divenire interessante ed utile, quando che da sè sola sarebbe stata da' Geometri trascurata e dimenticata.

Questo adunque sarà il soggetto di questa mia breve Memoria, in cui invertendo l' ordine delle mie antiche idee su di questo articolo, invece di dedurre la costruzione in piano dalla dimostrazione delle formole, come prima faceva, farò per lo contrario nascer queste da quella. Premetterò pertanto sulle mie antiche idee, molto analoghe a quelle del *Boscovik* una *costruzione generale* in piano della Trigonometrìa Sferica, e deducendone quindi in altrettanti Problemi le costruzioni particolari de' diversi casi, andrò passo passo derivando da queste le formole corrispondenti. Uno de' pregi di questo nuovo metodo che propongo, mi sembra esser quello di conciliare alle dimostrazioni delle anzidette formole una singolar facilità, e semplicità, e di renderle poi affatto indipendenti l' una dall' altra, benchè derivino tutte dal medesimo fonte.

COSTRUZIONE GENERALE IN PIANO DE' PROBLEMI DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA.

Sopra di un circolo qualunque prendansi successivamente gli archi AB, AC, CB' eguali ai tre lati *ab*, *ac*, *cb* del triangolo sferico *abc*. Per ottenere sul piano del circolo qua-

lunque degli angoli del triangolo per es. a, avendo condotte le corde BB″, B′M normali ai raggi AF, CF, figuriamoci, che gli archi AB, CB′ si stacchino dal piano del circolo, e rotino attorno i raggi AF, CF, finchè i punti B, e B′ s'incontrino in un sol punto, onde formare il triangolo sferico identico col proposto abc. Sarà allora l'angolo a eguale all' inclinazione del piano AB col piano AC, cioè all'angolo che faranno allora tra loro le BD, ED tutte due perpendicolari alla commune intersezione de' due piani AF. Per aver quest' angolo si rifletta che in questa rotazione degli archi AB, CB′ le perpendicolari calate dai punti B, B′ sopra il piano del circolo BACB′, debbono sempre cadere, la prima su qualche punto della BB″, e la seconda su qualche punto della B′M, onde quando i punti B, B′ si riuniscono in un solo, questa comune perpendicolare dovrà cadere sull' intersezione E delle corde BB″, B′M. Quando dunque i punti B, B′ si saranno riuniti, l'angolo che tra loro faranno le BD, ED, sarà l'angolo in D di un triangolo rettangolo avente ED per base, e BD per ipotenusa. Quindi descritto sopra di BB″ un semicircolo, ed alzata dal punto E la normale EH, sarà HDE l'angolo a che si cerca.

Egli è evidente che se si fossero presi invece gli archi AB, AC′, C′B′ respettivamente eguali ad ab, bc, ac, condotta la corda B′M′ normale a C′F, che taglia la BB″ in E′, ed alzata la normale E′H′ si avrebbe in piano allo stesso modo l'angolo H′DE′ eguale allo sferico b. Ma la costruzione di quest' angolo b può derivarsi anche più comodamente da quella del primo già trovato a: imperocchè essendo $AC = ac = B'C' = C'M'$, e $CM = B'C = bc = AC'$, sarà $AC - CM = C'M' - AC'$, cioè $AM = AM'$. Quindi condotta la corda B′M per la costruzione dell'angolo a, se si prenderà $AM' = AM$, e si condurrà la corda BM′, si avrà il punto E′, da cui dipende la costruzione dell' altro angolo b.

Si potrà anche avere il terz' angolo c per mezzo della stessa costruzione che ha servito a trovare il primo a. Imperocchè

perocchè rotandosi come prima gli archi AB, CB′ attorno di AF, CF, sinchè i punti B, B′ si riuniscono in un solo, l'angolo c, ossia l'angolo d'inclinazione del piano in cui trovasi CB′ con quello in cui trovasi AC, usando dello stesso raziocinio, che si è tenuto per l'angolo a, si farà vedere esser l'angolo in G di un triangolo rettangolo in E avente EG, EH per lati, e GB′ per ipotenusa. Quindi prendendo EL = EG, e conducendo HL, sarà l'angolo HLE eguale al terzo angolo cercato c.

Che se si considereranno invece gli archi AB, AC′, C′B′ rispettivamente eguali ad ab, bc, ac, l'angolo c sarà allora eguale all'inclinazione del piano C′B′ col piano AB, allorchè rotando attorno di C′F ed AF questi due piani i punti B′ e B si uniranno in un sol punto; e l'inclinazione di questi due piani sarà allora, come prima, eguale all'angolo in G′ del triangolo rettangolo avente per lati G′E′, H′E′, e B′G′ per ipotenusa. Quindi come prima si potrà anche mettere in piano l'angolo c, prendendo E′L′ = E′G′, e conducendo H′L′, poichè si avrà come prima H′L′E′ $= c$.

Si avrà quindi HLE = H′L′E′ $= c$, ed essendo perciò simili i triangoli HLE, H′L′E′ sarà

$$HL : H'L' = HE : H'E'$$

Ma HL, H′L′ ossia B′G, B′G′ sono come i seni degli archi B′C, B′C′, ossia bc, ac, ed HE, H′E′ sono come i seni degli angoli HDE, H′DE′, ossia degli angoli a, e b. Si avrà dunque

$$\text{sen.}\, bc : \text{sen.}\, ac = \text{sen.}\, a : \text{sen.}\, b$$

cioè i seni de' lati di qualunque triangolo sferico proporzionali ai seni degli angoli opposti, ch'è uno de' principali e fondamentali Teoremi della Sferica Trigonometrìa.

Ma non più di questa *Costruzione generale*, e de' Corollarj che se ne possono immediatamente dedurre, poichè sì quella che questi meglio e più ampiamente si svolgeranno nelle costruzioni particolari de' seguenti Problemi, e nella dimostrazione delle formole, che nasceranno da queste costruzioni.

PROBLEMA I

Dati i tre lati ab, ac, bc *di un qualunque triangolo sferico* bac, *trovare qualunque de' suoi angoli, per es.* a.

Costruzione.

Si prendano sopra di un circolo descritto con qualunque raggio gli archi AB, AC, CB′ rispettivamente eguali ai lati dati *ab*, *ac*, *bc* del triangolo *abc*. Fatto AB″ = AB, e CM = CB′, si conducano le corde BB″, B′M le quali si taglino in E. Sopra di BB″ si descriva un semicircolo, e dal punto E ora trovato s'innalzi sopra di BB″ la normale EH. Condotto il raggio HD, dalla *costruzione generale* immediatamente risulta che l'angolo HDE sarà eguale all'angolo richiesto *a*.

Una costruzione analoga farà egualmente trovare gli angoli *b*, e *c*; ed inoltre si è veduto nella medesima *costruzione generale* come questi due angoli possono anche più speditamente determinarsi per mezzo della medesima costruzione, che ha servito pel primo *a*.

Formola

$$\text{Cos.}\, a = \frac{\text{cos.}\, bc - \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, ac}{\text{sen.}\, ab \,.\, \text{sen.}\, ac}$$

Dimostrazione.

Sarà dunque in virtù della *costruzione* $\text{cos.}\, a = \frac{\text{DE}}{\text{DH}} = \frac{\text{DE}}{\text{DB}}$. Ora fatto il raggio AF = 1, si ha DB = sen. AB = sen. *ab*; e condotte le normali DI, DK, nel quadrilatero birettangolo EDFG si ha $\text{DE} = \frac{\text{DI}}{\text{sen. DEI}} = \frac{\text{DI}}{\text{sen. DFK}} = \frac{\text{DI}}{\text{sen. AC}} = \frac{\text{DI}}{\text{sen.}\, ac} = \frac{\text{FG} - \text{FK}}{\text{sen.}\, ac} = \frac{\text{cos. B'C} - \text{DF . cos. AC}}{\text{sen.}\, ac} = \frac{\text{cos.}\, bc - \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, ac}{\text{sen.}\, ac}$. Dunque $\text{cos.}\, a = \frac{\text{DE}}{\text{DB}} = \frac{\text{cos.}\, bc - \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, ac}{\text{sen.}\, ab \,.\, \text{sen.}\, ac}$. C. C. D. D.

Si avranno, com'è evidente, due formole analoghe e simili a questa per gli altri due angoli b, e c, e da dimostrarsi nel medesimo modo, cioè

$$\cos. b = \frac{\cos. ac - \cos. ab . \cos. cb}{\text{sen}. ab . \text{sen}. cb}$$

$$\cos. c = \frac{\cos. ab - \cos. ac . \cos. bc}{\text{sen}. ac . \text{sen}. bc}$$

PROBLEMA II

Dati due lati e l'angolo compreso, per es. ab, ac, *ed* a, *trovare il resto.*

Costruzione.

Si prendano sopra di un qualunque circolo gli archi AB, AC eguali ai lati dati ab, ac. Fatta quindi AB″ = AB, e condotta la corda BB″, si descriva sopra di questa il semicircolo BHB″, ed in esso si prenda l'arco B″H ovvero l'angolo B″DH eguale all'angolo dato a. Si conduca la normale HE, e da E l'altra normale EGB′ sopra di CF: in virtù della *costruzione generale* sarà CB′ il valore del terzo lato cb.

Sopra di BB″ prolungata, s'è necessario, si prenda EL = EG, e condotta la HL, l'angolo HLE, in virtù della *costruzione generale* sarà il valore dell'angolo c.

Che se si mutino i luoghi degli archi AB, AC, cosicchè l'uno cada dalla parte ove prima cadea l'altro, egli è evidente che colla medesima costruzione con cui si trovò c si troverebbe b, il quale d'altronde, avendosi ora i tre lati AB, AC, CB′, e l'arco AM, potrà anche più speditamente determinarsi, come s'insegnò nella *costruzione generale*.

FORMOLA PER IL LATO cb

$$\text{Cos}. cb = \cos. ab . \cos. ac + \cos. a . \text{sen}. ab . \text{sen}. ac.$$

Dimostrazione.

Questa formola nasce immediatamente dall'altra dimostrata nel *Problema precedente*.

$$\cos.\,a = \frac{\cos.\,cb - \cos.\,ab\,.\,\cos.\,ac}{\text{sen.}\,ab\,.\,\text{sen.}\,ac}$$

Volendo però per abbondanza tornare a dimostrarla, si osservi che facendosi, come prima, il raggio $AF = 1$, si avrà $\cos.\,cb = \cos.\,CB' = FG$. Ora $FG = FK + DI$, ed FK, come nel Problema precedente $= FD\,.\cos.\,AC = \cos.\,AB\,.\cos.\,AC = \cos.\,ab\,.\cos.\,ac$, $DI = DE\,.\,\text{sen.}\,DEI = DE\,.\,\text{sen.}\,AC = DE \times \text{sen.}\,ac$, ed essendo $\frac{DE}{HD} = \frac{DE}{DB} = \frac{DE}{\text{sen.}\,AB} = \frac{DE}{\text{sen.}\,ab} = \cos.\,HDE = \cos.\,a$, sarà $DE = \cos.\,a\,.\,\text{sen.}\,ab$. Quindi

$$\cos.\,cb = FK + DI = \cos.\,ab\,.\cos.\,ac + \cos.\,a\,.\text{sen.}\,ab\,.\text{sen.}\,ac.$$

FORMOLA PER L'ANGOLO c

$$\text{Tang.}\,c = \frac{\text{sen.}\,a}{\cot.\,ab\,.\,\text{sen.}\,ac - \cos.\,ac\,.\,\cos.\,a}.$$

Dimostrazione.

Dalla premessa costruzione risulta $\text{tang.}\,c = \text{tang.}\,HLE = \frac{HE}{EL} = \frac{HE}{EG}$. Ora essendo $\frac{HE}{HD} = \frac{HE}{DB} = \frac{HE}{\text{sen.}\,AB} = \frac{HE}{\text{sen.}\,ab} = \text{sen.}\,HDE = \text{sen.}\,a$, sarà $HE = \text{sen.}\,ab\,.\text{sen.}\,a$. Si ha poi $EG = DK - EI = FD\,.\,\text{sen.}\,DFK - DE\,.\,\cos.\,DEI = \cos.\,AB\,.\,\text{sen.}\,AC - DE \times \cos.\,AC = \cos.\,ab\,.\text{sen.}\,ac - DE\,.\,\cos.\,ac$, e si è trovato nella dimostrazione della formola antecedente $DE = \cos.\,a\,.\,\text{sen.}\,ab$. Dunque

$$\text{tang.}\,c = \frac{HE}{EG} = \frac{\text{sen.}\,ab\,.\,\text{sen.}\,a}{\cos.\,ab\,.\,\text{sen.}\,ac - \cos.\,a\,.\,\text{sen.}\,ab\,.\,\cos.\,ac}$$

ossia dividendo sopra e sotto per sen. ab

$$\text{tang.}\,c = \frac{\text{sen.}\,a}{\cot.\,ab\,.\,\text{sen.}\,ac - \cos.\,a\,.\cos.\,ac}$$ C. C. D. D.

Mutando i luoghi degli archi AB, AC, cosicchè l'uno si prenda dalla parte ove prima si prendea l'altro, si avrà per l'angolo b una formola simile a quella che si è trovata per c, cioè

$$\text{tang.}\, b = \frac{\text{sen.}\, a}{\text{cot.}\, ac \,.\, \text{sen.}\, ab - \text{cos.}\, a \,.\, \text{cos.}\, ab}\,.$$

Corollario.

Se l'angolo a sarà retto, le formole del Problema, facendo in esse $\text{sen.}\, a = 1$, $\text{cos.}\, a = 0$, serviranno per risolvere il caso in cui essendo dati in un triangolo rettangolo bac i due lati ab, ac attorno l'angolo retto, si cerchino le altre tre parti rimanenti. Si avrà pertanto per la prima formola

$$\text{cos. Ipot.}\, bc = \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, ac\,.$$

Dalla seconda si avrà

$$\text{tang.}\, c = \frac{1}{\text{cot.}\, ab \,.\, \text{sen.}\, ac}$$

ovvero

$$\text{sen.}\, ac = \frac{1}{\text{cot.}\, ab \,.\, \text{tang.}\, c} = \text{tang.}\, ab \,.\, \text{cot.}\, c\,.$$

E similmente dalla terza

$$\text{tang.}\, b = \frac{1}{\text{cot.}\, ac \,.\, \text{sen.}\, ab}$$

ossia

$$\text{sen.}\, ab = \frac{1}{\text{cot.}\, ac \,.\, \text{tang.}\, b} = \text{tang.}\, ac \,.\, \text{cot.}\, b\,.$$

PROBLEMA III

Dati i tre angoli a, b, c *trovare qualunque de' tre lati per es.* bc *opposto all' angolo* a.

Costruzione.

Invertendo l'ordine della *costruzione generale*, invece d'incominciare dal circolo BACB' in cui si prendono i lati,

per passare all'altro BHB'' in cui si prendono gli angoli, s'incominci al contrario da questo per passare a quello. Sopra un diametro qualunque BB'' si descriva pertanto un semicircolo, ed in esso primieramente si prendano gli archi B''H, B''H', ovvero gli angoli al centro B''DH, B''DH' eguali rispettivamente agli angoli dati a, e b; e conducendo quindi le normali HE, H'E', si conducano le parallele HL, H'L' che facciano con esse gli angoli LHE, L'H'E' eguali al complemento del terz'angolo dato c, cosicchè ne risulti HLE $=$ H'L'E' $= c$. Siegue dalla *costruzione generale* che EG, E'G' saranno rispettivamente eguali ad EL, E'L', e B'G, B'G' ad HL, H'L', cosicchè portando HL, H'L' da L ed L' in P, e P', si avranno le EB', E'B' rispettivamente eguali ad EP, E'P'.

Se dunque dai dati punti E ed E' come centri coi dati intervalli EP, E'P' si descriveranno due archi di circolo, questi intersecandosi daranno il punto B'. Si avranno dunque tre punti B, B'', B', per i quali dovrà passare e descriversi il circolo ABB'CB'', e ciò fatto, e condotte dal centro F le normali FA, FC sopra le BB'', EB', saranno in virtù della *costruzione generale* gli archi AB, AC, CB' i valori de' tre richiesti lati ab, ac, cb.

FORMOLA PER IL LATO cb

$$\cos.\, cb = \frac{\cos.\, a + \cos.\, b\,.\cos.\, c}{\text{sen.}\, b\,.\,\text{sen.}\, c}\,.$$

DIMOSTRAZIONE.

Facciasi il raggio DB del semicircolo $= 1$, onde sia HE $=$ sen. a, H'E' $=$ sen. b, DE $=$ cos. a, DE' $=$ cos. b, epperò EE' $=$ cos. $a -$ cos. b. Sarà quindi $\frac{\text{HE}}{\text{HL}} = \frac{\text{sen.}\, a}{\text{HL}} = \text{sen. HLE} = \text{sen.}\, c$, onde $\text{HL} = \text{B'G} = \frac{\text{sen.}\, a}{\text{sen.}\, c}$; e similmente $\frac{\text{H'E'}}{\text{H'L'}} = \frac{\text{sen.}\, b}{\text{H'L'}} = \text{sen. H'L'E'} = \text{sen.}\, c$, epperò $\text{H'L'} = \text{B'G'} = \frac{\text{sen.}\, b}{\text{sen.}\, c}$. Si avrà an-

cora $\frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{HL}} = \frac{\mathrm{EL}\,.\,\text{sen.}\,c}{\text{sen.}\,a} = \cos.\mathrm{HLE} = \cos.c$, epperò $\mathrm{EL} = \mathrm{EG} =$ $\frac{\text{sen.}\,a\,.\,\cos.\,c}{\text{sen.}\,c}$; e allo stesso modo $\frac{\mathrm{E'L'}}{\mathrm{H'L'}} = \frac{\mathrm{E'L'}\,.\,\text{sen.}\,c}{\text{sen.}\,b} = \cos.\mathrm{H'L'E'} =$ $\cos.c$, e quindi $\mathrm{E'L'} = \mathrm{E'G'} = \frac{\text{sen.}\,b\,.\,\cos.\,c}{\text{sen.}\,c}$. Dunque $\mathrm{EB'} = \mathrm{B'G} +$ $\mathrm{EG} = \frac{\text{sen.}\,a\,.(1 + \cos.c)}{\text{sen.}\,c}$, ed $\mathrm{E'B'} = \mathrm{B'G'} + \mathrm{E'G'} = \frac{\text{sen.}\,b\,(1 + \cos.c)}{\text{sen.}\,c}$.

Si conosceranno dunque tutti tre i lati del triangolo rettilineo EE'B', epperò per le note formole si potrà ottenere il coseno di qualunque de' suoi angoli, per es. dell'angolo EE'B', ossia (perchè essendo $\mathrm{AB} = \mathrm{AB''}$, ed $\mathrm{AM} = \mathrm{AM'}$ in virtù della *costruzione generale* le corde BB'', M'M sono tra loro parallele) dell'angolo MM'B', la di cui misura è la metà dell'arco MCB', ossia $\mathrm{CB'} = cb$. Sarà dunque per le anzidette note formole di Trigonometrìa piana

$$\cos.\mathrm{EE'B'} = \cos.cb = \frac{\mathrm{E'B'}^2 - \mathrm{EB'}^2 + \mathrm{EE'}^2}{2\mathrm{EE'}\,.\,\mathrm{E'B'}}$$

cioè sostituendo i poc'anzi trovati valori di EE', EB', E'B'

$$\cos.cb = \frac{\frac{(\text{sen.}\,b^2 - \text{sen.}\,a^2)\,.\,(1 + \cos.c)^2}{\text{sen.}\,c^2} + (\cos.a - \cos.b)^2}{2\,(\cos.a - \cos.b)\,.\,\frac{\text{sen.}\,b\,.\,(1 + \cos.c)}{\text{sen.}\,c}}$$

ossia ponendo nel primo termine del numeratore $\cos.a^2 - \cos.b^2$ invece di $\text{sen.}\,b^2 - \text{sen.}\,a^2$, moltiplicando quindi tanto il numeratore che il denominatore per $\text{sen.}\,c^2$ ovvero $1 - \cos.c^2$, e dividendo finalmente numeratore e denominatore per $(\cos.a - \cos.b)\,.\,(1 + \cos.c)$

$$\cos.cb = \frac{(\cos.a + \cos.b)\,.\,(1 + \cos.c) + (\cos.a - \cos.b)\,.\,(1 - \cos.c)}{2\,\text{sen.}\,b\,.\,\text{sen.}\,c}$$

cioè finalmente

$$\cos.cb = \frac{\cos.a + \cos.b\,.\,\cos.c}{\text{sen.}\,b\,.\,\text{sen.}\,c}\,.\ \mathrm{C.C.D.D.}$$

Egli è poi evidente che se gli angoli b e c prenderanno il luogo dell'angolo a, si avranno col medesimo discorso

due formole analoghe e simili alla ritrovata per determinare i lati opposti ac, ab, cioè

$$\cos.ac = \frac{\cos.b + \cos.a.\cos.c}{\text{sen}.a.\text{sen}.c}$$

$$\cos.ab = \frac{\cos.c + \cos.a.\cos.b}{\text{sen}.a.\text{sen}.b}.$$

COROLLARIO.

Se l'angolo a sarà retto, le tre formole del Problema, facendo in esse $\text{sen}.a = 1$, $\cos.a = 0$, serviranno a risolvere il caso di un triangolo rettangolo in cui essendo dati gli altri due angoli b, c si cerchi per mezzo di essi qualunque de' tre lati. Si avrà infatti dalla prima

$$\cos.\ \text{Ipot.}\ cb = \frac{\cos.b.\cos.c}{\text{sen}.b.\text{sen}.c} = \cot.b.\cot.c.$$

Dalla seconda

$$\cos.ac = \frac{\cos.b}{\text{sen}.c},\ \text{ossia}\ \cos.ac.\text{sen}.c = \cos.b$$

e dalla terza finalmente

$$\cos.ab = \frac{\cos.c}{\text{sen}.b},\ \text{ossia}\ \cos.ab.\text{sen}.b = \cos.c.$$

PROBLEMA IV

Essendo dati due angoli e il lato frapposto per es. a, b *ed* ab; *trovare il resto.*

COSTRUZIONE.

Sopra di un circolo descritto con qualunque raggio si prenda l'arco AB = AB″ eguale al lato dato ab. Condotta quindi la corda BB″ sopra di questa come diametro si descriva un semicircolo, nel quale si prendano gli archi B″H, B″H′ ovvero gli angoli B″DH, B″DH′ eguali rispettivamente ai dati angoli a e b, e si conducano le normali HE, H′E′.

Dalla

Dalla *costruzione generale* risulta che se AC, CB′ sieno gli altri due lati cercati *ac*, *cb*, condotte le B′EM, B′E′M′, si avrà $AM = AM'$, onde essendo anche $AB'' = AB$, sarà MM′ parallela a B″B, epperò $B'E : B'E' = EM : E'M'$, e quindi $B'E \times EM : B'E' . E'M'$, cioè per proprietà del circolo $B''E . EB : B''E' . E'B$ ossia $HE^2 : H'E'^2 = B'E^2 : B'E'^2$. Ma per l'angolo MB′M′ diviso in mezzo dalla retta B′A si ha ancora $B'E : B'E' = EQ : E'Q$, e quindi $B'E^2 : B'E'^2 = EQ^2 : E'Q^2$. Sarà dunque $HE^2 : H'E'^2 = EQ^2 : E'Q^2$, ed $HE : H'E' = EQ : E'Q$, cioè per determinare il punto Q, si dovrà dividere la data EE′ nella data ragione de' seni HE, H′E′ de' dati angoli *a* e *b*.

Trovato poi il punto Q facilmente si compirà la desiderata costruzione; poichè condotta per A e Q la AQB′ si avrà il punto B′, e da questo per il dato punto E condotta la BEM, e sopra questa dal centro F calata la perpendicolare FC, saranno, in virtù della *costruzione generale*, AC, CB′ i valori de' cercati lati *ac*, *cb*.

Finalmente portando EG da E in L, e condotta la HL, in virtù della medesima *costruzione generale* sarà l'angolo HLE il valore del terz'angolo cercato *c*.

Formola per il lato *ac*

$$\text{Cot.}\, ac = \frac{\text{sen.}\, a \,.\, \text{cot.}\, b}{\text{sen.}\, ab} + \cos.\, a \,.\, \text{cot.}\, ab\,.$$

Dimostrazione.

Si è già veduto nella *costruzione generale* che i seni de' lati *bc*, *ac* sono proporzionali ai seni degli angoli opposti *a* e *b*. Lo stesso può anche dedursi dalla costruzione dell'attuale Problema; poichè per le parallele MM′, EE′, e per l'angolo EB′E′ diviso in mezzo dalla B′A, le B′M, B′M′ sono proporzionali alle B′E, B′E′, cioè alle EQ, QE′, cioè alle HE, H′E′, ossia ai seni degli angoli *a* e *b*. Ora $\frac{1}{2}$B′M, $\frac{1}{2}$B′M′ sono proporzionali ai seni degli archi B′C, B′C′, ossia B′C,

AC, ossia bc, ac. Sarà dunque dato il rapporto de' seni de' lati cercati bc, ac, cioè si avrà $\text{sen.}bc : \text{sen.}ac = \text{sen.}a : \text{sen.}b$, e quindi $\text{sen.}bc = \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}b} . \text{sen.}ac$.

Conducasi ora la normale FR sopra di B'A, e sarà $\frac{AR}{FR} = \frac{AD}{DQ} = \text{tang.}\frac{1}{2}(AC + B'C) = \text{tang.}\frac{1}{2}(ac + bc)$; e sarà poi facile di ottenere per mezzo delle parti date i valori di AD, e DQ. Infatti facendosi il raggio $AF = 1$, sarà primieramente $AD = AF - DF = 1 - \cos.AB = 1 - \cos.ab$. Essendo poi ED, E'D i coseni di B''H, B''H', cioè di a, e b per il raggio $HD = DB = \text{sen.}ab$, sarà $ED = \cos.a . \text{sen.}ab$, $E'D = \cos.b . \text{sen.}ab$, e quindi $EE' = ED - E'D = (\cos.a - \cos.b).\text{sen.}ab$. Ma per ciò che si è dimostrato nella costruzione dee stare $EQ : E'Q = \text{sen.}a : \text{sen.}b$, epperò $EE' : EQ = \text{sen.}a + \text{sen.}b : \text{sen.}a$. Sostituendo pertanto il valore di E'E, si avrà $EQ = \frac{(\cos.a - \cos.b).\text{sen.}a.\text{sen.}ab}{\text{sen.}a + \text{sen.}b}$, e quindi $DQ = ED - EQ = \cos.a . \text{sen.}ab - \frac{(\cos.a - \cos.b).\text{sen.}a.\text{sen.}ab}{\text{sen.}a + \text{sen.}b} = \frac{\text{sen.}ab . \text{sen.}(a+b)}{\text{sen.}a + \text{sen.}b}$. Si avrà dunque finalmente $\frac{AD}{DQ} = \text{tang.}\frac{1}{2}(ac + bc) = \frac{(1 - \cos.ab).(\text{sen.}a + \text{sen.}b)}{\text{sen.}ab . \text{sen.}(a+b)}$.

Il Problema adunque è ridotto a questo di trovare due archi bc, ac, essendo nota la proporzione de' loro seni, e la tangente della loro semisomma. Chiamisi n questa tangente della semisomma, che abbiamo ora trovata, ed $1 : m$ sia il noto rapporto de' seni di bc, ac, cosicchè sia $\text{sen.}bc = m \times \text{sen.}ac$, cioè $m = \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}b}$. Essendo dunque per le note formole trigonometriche $\text{tang.}\frac{1}{2}(ac + bc) = \frac{\text{sen.}ac + \text{sen.}bc}{\cos.ac + \cos.bc}$, si avrà $n = \frac{(1+m).\text{sen.}ac}{\cos.ac + \sqrt{1 - m^2 \text{sen.}ac^2}}$, e quindi $(1 + m).\text{sen.}ac - n \times$

$\cos. ac = n\sqrt{1 - m^2 \text{ sen. } ac^2}$; d'onde quadrando e riducendo si dedurrà agevolmente $(1+m)^2 . \text{sen.} ac - 2n(1+m) . \cos. ac - n^2 . \text{sen.} ac = - n^2m^2 . \text{sen.} ac$, e quindi

$$\cot. ac = \frac{(1+m)^2 - n^2(1-m)^2}{2n(1+m)} = \frac{1+m+n^2(m-1)}{2n} = \frac{1+m}{2n} + \frac{n(m-1)}{2}.$$

Ristabiliti i valori di m ed n, si otterrà dopo le più ovvie riduzioni

$$\cot. ac = \frac{\text{sen.} ab . \text{sen.}(a+b)}{2 \text{sen.} b . (1 - \cos. ab)} + \frac{(1 - \cos. ab).(\text{sen.} a^2 - \text{sen} b^2)}{2 \text{sen.} b . \text{sen.} ab . \text{sen.}(a+b)}$$

cioè riducendo allo stesso denominatore, e dopo di ciò invece di sen. ab^2 che verrà nel primo termine del numeratore mettendo $1 - \cos. ab^2$, e dividendo quindi sopra e sotto per $1 - \cos. ab$

$$\cot. ac = \frac{(1 + \cos. ab) . \text{sen.}(a+b)^2 + (1 - \cos. ab) . (\text{sen.} a^2 - \text{sen.} b^2)}{2 \text{sen.} b . \text{sen.} ab . \text{sen.}(a+b)}.$$

Si metta ora in luogo di sen. $(a+b)$ il suo valore sen. $a \times \cos. b + \text{sen.} b . \cos. a$, e sviluppando e raccogliendo i prodotti, si otterrà

$$\cot. ac = \frac{(\text{sen.} a^2 . \cos. b^2 + \text{sen.} a . \text{sen.} b . \cos. a . \cos. b) + (\text{sen.} b^2 . \cos. a^2 + \text{sen.} a . \text{sen.} b . \cos. a . \cos. b) . \cos. ab}{\text{sen.} b . \text{sen.} ab . (\text{sen.} a . \cos. b + \text{sen.} b . \cos. a)}$$

ed infine dividendo attualmente i due termini del numeratore per il fattore sen. $a . \cos. b + \text{sen.} b . \cos. a$ del denominatore

$$\cot. ac = \frac{\text{sen.} a . \cos. b}{\text{sen.} b . \text{sen.} ab} + \frac{\cos. a . \cos. ab}{\text{sen.} ab} = \frac{\text{sen.} a . \cot. b}{\text{sen.} ab} + \cos. a . \cot. ab . \text{C.C.D.D.}$$

Egli è evidente che mettendo a ove sta b e viceversa, si troverebbe col medesimo discorso una formola analoga e simile per il lato bc, cioè

$$\cot. bc = \frac{\text{sen.} b . \cot. a}{\text{sen.} ab} + \cos. b . \cot. ab.$$

Formola per l'angolo c

$$\cos. c = \cos. ab . \text{sen.} a . \text{sen.} b - \cos. a . \cos. b.$$

DIMOSTRAZIONE.

Dopo di aver dimostrato come nel Problema antecedente che

$$\cos.ab = \frac{\cos.c + \cos.a.\cos.b}{\text{sen}.a.\text{sen}.b}$$

facilmente se ne dedurrà

$$\cos.c = \cos.ab.\text{sen}.a.\text{sen}.b - \cos.a.\cos.b.$$

COROLLARIO.

Volendo applicare queste formole ad un triangolo rettangolo in a, ed in cui essendo dati il lato ab, e l'angolo adjacente b, si cerchino le altre parti, bisognerà nelle anzidette formole fare sen. $a = 1$, cos. $a = 0$, e si avrà così dalla prima

$$\cot.ac = \frac{\cot.b}{\text{sen}.ab}, \text{ ovvero } \text{sen}.ab = \frac{\cot.b}{\cot.ac} = \cot.b.\text{tang}.ac.$$

Dalla seconda

$$\cot.bc = \cos.b.\cot.ab, \text{ ovvero } \cos.b = \frac{\cot.bc}{\cot.ab} = \cot.bc.\text{tang}.ab.$$

Dalla terza

$$\cos.c = \cos.ab.\text{sen}.b.$$

PROBLEMA V

Essendo dati due lati, ed un angolo opposto a uno di questi lati, per es. ab, bc, *ed* a, *trovare il resto.*

COSTRUZIONE.

Sopra di un circolo descritto con qualunque raggio AF si porti al solito il lato dato ab da A in B ed in B''; e condotta quindi la corda BB'' e sopra di essa descritto il solito

semicircolo, si faccia nel centro di esso l'angolo B''DH eguale all'angolo dato a, e si conduca la normale HE.

Risulta dalla *costruzione generale* ch'essendo AC, CB' gli altri due lati ac, cb del proposto triangolo, e l'angolo HLE egnale all'angolo c del medesimo, si avrà EL = EG, ed HL = LP = B'G = sen. B'C = sen. bc relativamente al raggio AF. Se dunque si condurrà un diametro qualunque AU, e preso poi l'arco UX eguale al dato lato bc si condurrà la normale XZ, portando questa dal punto dato H in L, e quindi da L in P, si avrà EP = EB', onde dal dato punto E preso per centro colla data apertura EP si potrà determinare il punto B' sul circolo ABUB''.

Trovati i punti L e B' si potranno aver subito in virtù della *Costruzione generale* tutte tre le parti incognite del triangolo abc, cioè gli angoli c, e b e il terzo lato ac. Imperocchè primieramente l'angolo HLE sarà l'angolo c. Condotta quindi la normale FGC, sarà AC il terzo lato ac; e finalmente prolungata la B'E in M, presa AM' = AM, condotta la B'M' che tagli la B''B in E', ed alzata la normale E'H', sarà B''H' ovvero l'angolo B''DH' il valore dell'angolo b.

Formola per il terzo lato ac

$$\text{Cos.}\, ac = \frac{\pm \text{cos.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, bc - \text{sen.}\, ab \,.\, \text{cos.}\, a \,.\, \sqrt{\text{sen.}\, bc^2 - \text{sen.}\, ab^2 \,.\, \text{sen.}\, a^2}}{1 - \text{sen.}\, ab^2 \,.\, \text{sen.}\, a^2}.$$

Dimostrazione.

Fatto al solito il raggio AF = 1, si avrà FD = cos. AB = cos. ab, DB = HD = sen. AB = sen. ab, FG = cos. B'C = cos. bc, e B'G = HL = sen. B'C = sen. bc. Inoltre essendo HE il seno, ed ED il coseno dell'angolo HDL, cioè dell'angolo a relativamente al raggio HD = sen. ab, si avrà HE = sen. ab . sen. a, ED = sen. ab . cos. a. Quindi EL = EG = $\sqrt{\text{HL}^2 - \text{HE}^2}$ = $\sqrt{\text{sen.}\, bc^2 - \text{sen.}\, ab^2 \,.\, \text{sen.}\, a^2}$, EI = DE . cos. DEI = DE . cos. AC = DE . cos. ac = sen. ab . cos. a . cos. ac; e GI = EG + EI =

$\sqrt{\text{sen}.bc^2 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2} + \text{sen}.ab.\cos.a.\cos.ac$. Ma GI $=$ DK $=$ FD . sen. AC $= \cos.ab.\text{sen}.ac$. Si avrà dunque l'equazione

$$\cos.ab.\text{sen}.ac = \sqrt{\text{sen}.bc^2 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2} + \text{sen}.ab.\cos.a.\cos.ac.$$

Per maneggiarla più comodamente, scriviamo quest' equazione in quest' altro modo equivalente

$$FD . \text{sen}. ac = EG + DE . \cos. ac$$

ed innalzandola al quadrato, mettendo poscia nel primo membro $1 - \cos.ac^2$ invece di $\text{sen}.ac^2$, ed ordinando secondo le potenze di $\cos.ac$, si avrà

$$\cos.ac^2 + \frac{2EG.DE}{DE^2 + FD^2}.\cos.ac = \frac{FD^2 - EG^2}{DE^2 + FD^2},$$ e quindi

$$\cos.ac = -\frac{EG.DE}{DE^2 + FD^2} \pm \sqrt{\frac{EG^2.DE^2}{(DE^2 + FD^2)^2} + \frac{FD^2 - EG^2}{DE^2 + FD^2}}$$

$$= -\frac{EG.DE \pm \sqrt{DE^2.FD^2 + FD^4 - EG^2.FD^2}}{DE^2 + FD^2}$$

$$= -\frac{EG.DE \pm FD\sqrt{DE^2 + FD^2 - EG^2}}{DE^2 + FD^2} =$$

(perchè nel quadrilatero birettangolo EDFG si ha $DE^2 + FD^2 = EG^2 + FG^2$, cioè $DE^2 + FD^2 - EG^2 = FG^2$) $-\frac{EG.DE \pm FD.FG}{DE^2 + FD^2}$, cioè ristabilendo i valori di sopra trovati di EG, DE, FD, FG

$$\cos.ac = \frac{-\text{sen}.ab.\cos.a\sqrt{\text{sen}.bc^2 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2} \pm \cos.ab.\cos.bc}{\text{sen}.ab^2.\cos.a^2 + \cos.ab^2}$$

ossia perchè $\text{sen}.ab^2.\cos.a^2 + \cos.ab^2 = 1 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2$

$$\cos.ac = \frac{\pm\cos.ab.\cos.bc - \text{sen}.ab.\cos.a\sqrt{\text{sen}.bc^2 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2}}{1 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2}$$ C.C.D.D.

FORMOLA PER L'ANGOLO COMPRESO b

$$\text{sen}.b = \frac{\cos.a.\cos.bc.\text{sen}.ab \pm \cos.ab\sqrt{\text{sen}\ bc^2 - \text{sen}.a^2.\text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.a.\text{sen}.bc.(\cot.a^2 + \cos.ab^2)}$$

DIMOSTRAZIONE.

Dalla formola dimostrata nel *Problema II*

$$\text{tang.}\,a = \frac{\text{sen.}\,b}{\text{cot.}\,cb\,.\,\text{sen.}\,ab - \text{cos.}\,ab\,.\,\text{cos.}\,b}$$

si deduce immediatamente

$$(\text{tang.}\,a\,.\,\text{cot.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab - \text{sen.}\,b)^2 = \text{tang.}\,a^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2\,.\,(1 - \text{sen.}\,b^2)$$

d' onde risolvendo un' equazione del secondo grado risulta

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{tang.}\,a\,.\,\text{cot.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab \pm \text{tang.}\,a\,.\,\text{cos.}\,ab\sqrt{1 + \text{tang.}\,a^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2 - \text{tang.}\,a^2\,.\,\text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{cot.}\,bc^2}}{1 + \text{tang.}\,a^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2}$$

ossia dividendo sopra e sotto per $\text{tang.}\,a^2$, e mettendo $\frac{\text{cos.}\,bc}{\text{sen.}\,bc}$ invece di $\text{cot.}\,bc$

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{cos.}\,a\,.\,\text{cos.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,bc\,.\,(\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2)} \pm \frac{\text{cos.}\,ab\sqrt{\text{sen.}\,bc^2\,.\,\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2\,.\,\text{sen.}\,bc^2 - \text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{cos.}\,bc^2}}{\text{sen.}\,bc\,.\,(\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2)}$$

cioè riducendo allo stesso denominatore

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{cos.}\,a\,.\,\text{cos.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab \pm \text{cos.}\,ab\sqrt{\text{sen.}\,bc^2\,.\,\text{cos.}\,a^2 + \text{sen.}\,a^2\,.\,\text{cos.}\,ab^2\,.\,\text{sen.}\,bc^2 - \text{sen.}\,a^2\,.\,\text{sen.}\,ab^2\,.\,\text{cos.}\,bc^2}}{\text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,bc\,.\,(\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2)}$$

ossia perchè la quantità sotto il segno radicale, ponendo $1 - \text{sen.}\,a^2$ in luogo di $\text{cos.}\,a^2$, si riduce a $\text{sen.}\,bc^2 - \text{sen.}\,a^2 \times \text{sen.}\,ab^2$

$$\text{sen.}\,b = \frac{\text{cos.}\,a\,.\,\text{cos.}\,bc\,.\,\text{sen.}\,ab \pm \text{cos.}\,ab\sqrt{\text{sen.}\,bc^2 - \text{sen.}\,a^2\,.\,\text{sen.}\,ab^2}}{\text{sen.}\,a\,.\,\text{sen.}\,bc\,.\,(\text{cot.}\,a^2 + \text{cos.}\,ab^2)}\ \text{C.C.D.D.}$$

Formola per l' altro angolo opposto c

$$\text{sen.}\,c = \frac{\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,bc}\,.\,\text{sen.}\,a$$

Dimostrazione.

Essendo, secondo che si è già più volte dimostrato, i seni de' lati proporzionali ai seni degli angoli opposti, si avrà $\text{sen.}\,bc : \text{sen.}\,ab = \text{sen.}\,a : \text{sen.}\,c$, epperò

$$\text{sen.}\,c = \frac{\text{sen.}\,ab}{\text{sen.}\,bc}\,.\,\text{sen.}\,a\ .\,\text{C.C.D.D.}$$

Corollario.

Se l'angolo dato a sarà retto, epperò $\text{sen.}\,a = 1$, $\text{cos.}\,a = 0$, $\text{cot.}\,a = 0$, le tre formole del Problema risolveranno il caso

di un triangolo rettangolo, in cui essendo dati un lato ab, e l'ipotenusa bc, si cerchi qualunque delle altre tre parti. Darà pertanto la prima formola

$$\cos.ac = \frac{\cos.ab.\cos.bc}{1-\mathrm{sen}.ab^2} = \frac{\cos.ab.\cos.bc}{\cos.ab^2} = \frac{\cos.bc}{\cos.ab}, \text{ ossia}$$

$$\cos.ac.\cos.ab = \cos.bc.$$

Si avrà dalla seconda

$$\mathrm{sen}.b = \frac{\cos.ab.\sqrt{\mathrm{sen}.bc^2 - \mathrm{sen}.ab^2}}{\mathrm{sen}.bc.\cos.ab^2} = \frac{\sqrt{\mathrm{sen}.bc^2 - \mathrm{sen}.ab^2}}{\mathrm{sen}.bc.\cos.ab}, \text{ onde}$$

$$\cos.b = \sqrt{1 - \mathrm{sen}.b^2} = \frac{\sqrt{\mathrm{sen}.bc^2.\cos.ab^2 - \mathrm{sen}.bc^2 + \mathrm{sen}.ab^2}}{\mathrm{sen}.bc.\cos.ab} =$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{sen}.ab^2 - \mathrm{sen}.bc^2.\mathrm{sen}.ab^2}}{\mathrm{sen}.bc.\cos.ab} = \frac{\sqrt{\cos.bc^2.\mathrm{sen}.ab^2}}{\mathrm{sen}.bc.\cos.ab} = \frac{\cos.bc.\mathrm{sen}.ab}{\mathrm{sen}.bc.\cos.ab} =$$

$\cot.bc.\mathrm{tang}.ab$.

E finalmente dalla terza si otterrà

$$\mathrm{sen}.c = \frac{\mathrm{sen}.ab}{\mathrm{sen}.bc}, \text{ ossia } \mathrm{sen}.c.\mathrm{sen}.bc = \mathrm{sen}.ab.$$

PROBLEMA VI

Essendo dati due angoli, ed un lato opposto ad uno di questi angoli, per es. a, c, *ed* ab, *trovare il resto.*

COSTRUZIONE.

Sopra di un circolo di un qualunque raggio AF si prenderà, come prima, l'arco AB = AB″ = ab, e sopra la corda BB″ descritto un semicircolo, si prenderà in questo l'angolo B″DH = a, e si calerà la normale HE.

Formato quindi in H l'angolo EHL eguale al complemento di c, cosicchè sia HLE = c, e portata la HL da L in P, l'intersezione fatta dal centro E coll'intervallo EP, darà il punto B′ sul circolo ABUB″, come nel *Problema precedente*. Condotta pertanto la B′EM, e sopra di questa la normale FGC, gli archi AC, B′C saranno i valori di ac, bc. Si troverà infine l'angolo b, come nella *Costruzione* del *Problema precedente*.

FOR-

Formola per il lato ac

$$\cos.ac = \frac{-\mathrm{sen}.2a\,.\cos.c\,.\,\mathrm{sen}.ab \pm 2\,.\cot.ab\,.\sqrt{\mathrm{sen}.c^2 - \mathrm{sen}.ab^2\,.\,\mathrm{sen}.a^2}}{2\,\mathrm{sen}.c\,.\,\mathrm{sen}.ab\,.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)} .$$

Dimostrazione.

Si dimostrerà primieramente, come nella prima formola del *Problema precedente* l'Equazione

$$\mathrm{FD}\,.\,\mathrm{sen}.ac = \mathrm{EG} + \mathrm{DE}\,.\cos.ac$$

e da questa se ne dedurrà allo stesso modo l'altra

$$\cos.ac = \frac{-\mathrm{EG}\,.\,\mathrm{DE} \pm \mathrm{FD}\sqrt{\mathrm{DE}^2 + \mathrm{FD}^2 - \mathrm{EG}^2}}{\mathrm{DE}^2 + \mathrm{FD}^2} .$$

Ora si avrà pure, come nella citata formola del *Problema precedente* $\mathrm{FD} = \cos.ab$, $\mathrm{DE} = \mathrm{sen}.ab\,.\cos.a$, $\mathrm{HE} = \mathrm{sen}.ab \times \mathrm{sen}.a$. Si avrà inoltre $\frac{\mathrm{HE}}{\mathrm{EL}} = \frac{\mathrm{sen}.ab\,.\,\mathrm{sen}.a}{\mathrm{EL}} = \frac{\mathrm{sen}.c}{\cos.c}$, epperò $\mathrm{EL} = \mathrm{EG} = \frac{\mathrm{sen}.ab\,.\,\mathrm{sen}.a\,.\cos.c}{\mathrm{sen}.c}$. Sostituendo pertanto questi valori ne risulterà

$$\cos.ac = \frac{-\mathrm{sen}.ab^2.\mathrm{sen}.a.\cos.a.\cos.c \pm \cos.ab\sqrt{\mathrm{sen}.ab^2.\cos.a^2.\mathrm{sen}.c^2 + \cos.ab^2.\mathrm{sen}.c^2 - \mathrm{sen}.ab^2.\mathrm{sen}.a^2.\mathrm{co}}}{\mathrm{sen}.c\,.(\mathrm{sen}.ab^2\,.\cos.a^2 + \cos.ab^2)}$$

cioè dividendo sopra e sotto per $\mathrm{sen}.ab$, e ponendo $\frac{1}{2}\mathrm{sen}.2a$ invece di $\mathrm{sen}.a\,.\cos.a$ nel primo termine del numeratore

$$\cos.ac = \frac{-\mathrm{sen}.2a.\cos.c.\mathrm{sen}.ab \pm 2\cot.ab\sqrt{\mathrm{sen}.ab^2.\cos.a^2.\mathrm{sen}.c^2 + \cos.ab^2.\mathrm{sen}.c^2 - \mathrm{sen}.ab^2.\mathrm{sen}.a^2.\cos.c}}{2\,\mathrm{sen}.c\,.\,\mathrm{sen}.ab\,.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)}$$

Ora la quantità sotto il segno radicale, ponendo $1 - \mathrm{sen}.a^2$ in luogo di $\cos.a^2$, facilmente si riduce a $\mathrm{sen}.c^2 - \mathrm{sen}.ab^2 \times \mathrm{sen}.a^2$. Dunque finalmente

$$\cos.ac = \frac{-\mathrm{sen}.2a\,.\cos.c\,\mathrm{sen}.ab \pm 2\cot.ab\sqrt{\mathrm{sen}.c^2 - \mathrm{sen}.ab^2\,.\,\mathrm{sen}.a^2}}{2\,\mathrm{sen}.c\,.\,\mathrm{sen}.ab\,.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)} . \text{C.C.D.D.}$$

Formola per il terzo angolo b

$$\mathrm{Sen}.\,b = \frac{\cos.ab\,.\cos.c \pm \cos.a\sqrt{\cot.a^2 + \cos.ab^2}}{\cot.a^2 + \cos.ab^2} .$$

DIMOSTRAZIONE.

Dalla formola dimostrata nel *Problema III*

$$\cos.ab = \frac{\cos.c + \cos.a.\cos.b}{\text{sen}.a.\text{sen}.b}$$

si deduce immediatamente

$(\cos.ab.\text{sen}.a.\text{sen}.b - \cos.c)^2 = \cos.a^2(1 - \text{sen}.b^2)$, e quindi

$\text{sen}.b^2 \dfrac{-2\cos.ab.\text{sen}.a.\cos.c}{\cos.a^2 + \cos.ab^2.\text{sen}.a^2}.\text{sen}.b = \dfrac{\cos.a^2 - \cos.c^2}{\cos.a^2 + \cos.ab^2.\text{sen}.a^2}$; d'onde

$$\text{sen}.b = \frac{\cos.ab.\text{sen}.a.\cos.c \pm \cos.a\sqrt{\cos.a^2 + \cos.ab^2.\text{sen}.a^2}}{\cos.a^2 + \cos.ab^2.\text{sen}.a^2}$$

ossia dividendo sopra e sotto per $\text{sen}.a$

$$\text{sen}.b = \frac{\cos.ab.\cos.c \pm \cot.a\sqrt{\cot.a^2 + \cos.ab^2}}{\text{sen}.a.(\cot.a^2 + \cos.ab^2)}.\ \text{C.C.D.D.}$$

FORMOLA PER L'ALTRO LATO OPPOSTO bc

$$\text{sen}.bc = \frac{\text{sen}.a}{\text{sen}.c}.\text{sen}.ab$$

DIMOSTRAZIONE.

La formola nasce dalla proporzione già più volte dimostrata tra i seni degli angoli, e i seni de' lati opposti, cioè $\text{sen}.c : \text{sen}.a = \text{sen}.ab : \text{sen}.bc$; d'onde

$$\text{sen}.bc = \frac{\text{sen}.a}{\text{sen}.c}.\text{sen}.ab.\ \text{C.C.D.D.}$$

COROLLARIO I

Se l'angolo a sarà retto, facendo nelle precedenti formole $\text{sen}.a = 1$, $\text{sen}.2a = 0$, $\cos.a = 0$, $\cot.a = 0$, si avranno le formole per risolvere il caso di un triangolo rettangolo, in cui essendo dato un angolo c, e il lato opposto ab, si cerchi qualunque delle tre altre parti rimanenti.

Si avrà pertanto dalla prima

$$\cos.ac = \frac{\cot.ab\sqrt{\text{sen}.c^2 - \text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.c.\text{sen}.ab.\cot.ab^2} = \frac{\sqrt{\text{sen}.c^2 - \text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.c.\cos.ab}, \text{ e quindi}$$

$$\text{sen}.ac = \sqrt{1 - \cos.ac^2} = \frac{\sqrt{\text{sen}.c^2.\cos.ab^2 - \text{sen}.c^2 + \text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.c.\cos.ab} =$$

$$\frac{\sqrt{\text{sen}.ab^2 - \text{sen}.c^2.\text{sen}.ab^2}}{\text{sen}.c.\cos.ab} = \frac{\sqrt{\text{sen}.ab^2.\cos.c^2}}{\text{sen}.c.\cos.ab} = \frac{\text{sen}.ab.\cos.c}{\cos.ab.\text{sen}.c} =$$

$\text{tang}.ab.\cot.c$.

La seconda formola poi darà

$$\text{sen}.b = \frac{\cos.ab.\cos.c}{\cos.ab^2} = \frac{\cos.c}{\cos.ab}, \text{ ossia } \text{sen}.b.\cos.ab = \cos.c.$$

E dalla terza finalmente si otterrà

$$\text{sen}.bc = \frac{\text{sen}.ab}{\text{sen}.c}, \text{ ossia } \text{sen}.ab = \text{sen}.c.\text{sen}.bc.$$

COROLLARIO II

Che se invece di a si supporrà retto l'angolo c, si avrà il caso di un triangolo rettangolo, in cui essendo data l'ipotenusa ab e un angolo adjacente a, si cerchi qualunque delle altre tre parti, e le formole per questo caso nasceranno da quelle del *Problema*, facendo in esse $\text{sen}.c = 1$, $\cos.c = 0$.

La prima pertanto darà

$$\cos.ac = \frac{\cot.ab\sqrt{1 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2}}{\text{sen}.ab.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)}, \text{ e quindi}$$

$$\text{sen}.ac = \sqrt{1 - \cos.ac^2} = \frac{\sqrt{\text{sen}.ab^2(\cos.a^2 + \cot.ab^2).(\cos.a^2 + \cot.ab^2) - \cot.ab^2.(1 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2)}}{\text{sen}.ab.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)}$$

$$\frac{\sqrt{(1 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2).(\cos.a^2 + \cot.ab^2) - \cot.ab^2.(1 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2)}}{\text{sen}.ab.(\cos.a^2 + \cot.ab^2)} =$$

$$\frac{\cos.a\sqrt{1 - \text{sen}.ab^2.\text{sen}.a^2}}{\text{sen}.ab.(\cos.a^2 + \cot.a^2)}; \text{ d'onde}$$

$$\frac{\text{sen}.ac}{\cos.ac} = \text{tang}.ac = \frac{\cos.a}{\cot.ab}, \text{ ossia } \cos.a = \text{tang}.ac.\cot.ab.$$

La seconda formola del *Problema* si convertirà poi in quest' altra

$\text{sen}.\,b = \frac{\cot.\,a}{\sqrt{\cot.\,a^2 + \cos.\,ab^2}}$; e quindi $\cos.\,b = \sqrt{1 - \text{sen}.\,b^2} =$
$\frac{\cos.\,ab}{\sqrt{\cot.\,a^2 + \cos.\,ab^2}}$; epperò

$\cot.\,b = \frac{\cos.\,b}{\text{sen}.\,b} = \frac{\cos.\,ab}{\cot.\,a}$, ossia $\cos.\,ab = \cot.\,a\,.\cot.\,b$.

Finalmente dalla terza formola del *Problema* nascerà immediatamente

$$\text{sen}.\,bc = \text{sen}.\,a\ .\ \text{sen}.\,ab\ .$$

Benchè le formole dimostrate per i casi esaminati ne' due ultimi *Problemi* sieno alquanto complicate e d' incomodo maneggio, sono però altrettanto semplici quelle che se ne sono dedotte per i triangoli rettangoli ne' casi analoghi e simiglianti. Se si vorrà far uso di queste piuttosto che di quelle, anche ne' triangoli obbliquangoli, bisognerà ricorrere al consueto artificio di risolvere questi triangoli in due rettangoli con un arco normale condotto da un' estremità di un dato lato sopra il lato opposto, ed adjacente ad un angolo dato. Così nel *Problema V* in cui eran dati i lati ab, bc, e un angolo opposto a, s' intenderà condotto l'arco normale bd, ed allora nel triangolo rettangolo adb avendosi l' ipotenusa ab, e l'angolo adjacente a colle formole del *Coroll. II del Problema VI*, si troveranno tutte le altre parti, cioè ad, bd ed abd. Passando quindi all' altro triangolo rettangolo bdc in cui ora si conosce l' ipotenusa bc e un lato bd, si potranno in esso, per mezzo delle formole del *Coroll. del Problema V* determinare dc che aggiunto ad ad già trovato farà conoscere il lato ac, dbc che insieme con abd già trovato farà conoscer l'angolo abc, e finalmente l' angolo c. Similmente per il caso del *Problema VI* in cui suppongonsi dati gli angoli a, c ed un lato opposto ab, si comincierà dal risolvere il triangolo rettangolo adb per mezzo delle formole del *Cor. II del Problema VI*, per quindi passare colle formole del *Cor. I* dello stesso *Problema* alla risoluzione dell' altro triangolo rettangolo bdc, in cui ora sarà dato l' angolo c e il lato opposto bd.

Riassumendo le formole per la risoluzione de' triangoli rettangoli tutte facilmente dedotte ne' Corollarj de' precedenti Problemi dalle formole generali de' triangoli obbliquangoli, si verrà a formare quella dimostrazione, che sembra sia la sola che possa aversi, della celebre *Regola Neperiana*, che per comodo della memoria e dell'uso tutte quelle formole pe' triangoli rettangoli comprende nella seguente generale enunciazione. Non considerando l'angolo retto, allorchè in un triangolo rettangolo per mezzo di due parti date si cerca una qualunque delle rimanènti, le tre parti in questione, cioè le due date, e l'incognita saran sempre talmente disposte, che due di esse rispetto alla terza, che potrà chiamarsi *parte media*, o saranno a questa immediatamente contigue, nel qual caso si diranno *congiunte*, o ne saranno separate da una intermedia, nel qual caso si chiameranno *disgiunte*, non facendo più verun conto, come si disse, dell'angolo retto. Ora invece de' lati che formano l'angolo retto, surrogando i loro complementi, tutte le formole per la risoluzione di tutti i capi de' triangoli rettangoli furono felicemente comprese da *Nepero* nella seguente semplicissima regola: *Il prodotto del raggio per il Coseno della parte* media *è eguale a quello delle Cotangenti delle* parti congiunte, *ovvero a quello de' Seni delle* parti disgiunte. Aspettando che si trovi la dimostrazione generale di questo Teorema, che non si è ancor trovata, desso si potrà verificare, e dimostrare in ogni caso particolare per mezzo delle formole dimostrate ne' Corollarj de' Problemi precedenti. Così se per es. nel triangolo bac rettangolo in a sieno dati i lati ab, ac e si cerchi b, sarà ab *parte media*, ac e b *parti congiunte*, epperò prendendo in luogo di ab, ac i loro complementi, e supposto il raggio $= 1$ si avrà a tenore della *Regola Neperiana*

$$\text{sen.}\,ab = \text{tang.}\,ac\,.\,\text{cot.}\,b\text{, e quindi cot.}\,b = \frac{\text{sen.}\,ab}{\text{tang.}\,ac},$$

come appunto si trovò nell'ultima formola del *Corollario del Problema II*. Lo stesso consenso tra le formole da Noi di-

mostrate, e la *Regola Neperiana* si proverà allo stesso modo in tutti gli altri casi.

Dipartendosi adunque dal metodo comunemente seguito, abbiam fatta discendere la risoluzione de' triangoli rettangoli da quella degli obbliquangoli, cioè abbiam dedotta la risoluzione de' Casi particolari da quella de' Casi generali. Per compire quest' inversione, o piuttosto ristabilimento di ordine naturale, manca solo che, siccome nel comun metodo alla risoluzione de' triangoli rettangoli ed obbliquangoli si premette la dimostrazione di alcune proprietà de' triangoli sferici, delle quali si fa uso nella risoluzione medesima, così Noi per lo contrario deduciamo le dimostrazioni di alcune di queste proprietà dalle premesse risoluzioni. Noi lo faremo brevemente ne' seguenti Teoremi.

TEOREMA I. *Se avendosi un qualunque Triangolo sferico* abc, *un altro se ne intenda formato* $\alpha\beta\gamma$ *con tre lati* $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ *eguali rispettivamente ai supplementi dei tre angoli del primo* a, b, c, *saranno reciprocamente i tre lati di questo* bc, ac, ab *rispettivamente eguali ai supplementi degli angoli del secondo* α, β, γ.

DIMOSTRAZIONE. Si avrà dalle formole del *Problema I*

$$\cos.\, \alpha = \frac{\cos.\, \beta\gamma - \cos.\, \alpha\gamma\, .\, \cos.\, \alpha\beta}{\text{sen.}\, \alpha\gamma\, .\, \text{sen.}\, \alpha\beta}.$$

Ma supponendosi $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ eguali ai supplementi a due retti di a, b, c, saranno i coseni di quelli eguali ai coseni negativi di questi, e i seni eguali ai seni. Si avrà dunque

$$\cos.\, \alpha = \frac{-\cos.\, a - \cos.\, b\, .\, \cos.\, c}{\text{sen.}\, b\, .\, \text{sen.}\, c} = -\left(\frac{\cos.\, a + \cos.\, b\, .\, \cos.\, c}{\text{sen.}\, b\, .\, \text{sen.}\, c}\right) =$$

(per le formole del *Problema III*) $-\cos.\, bc$.

Dunque bc è eguale al supplemento di α; e lo stesso si dimostrerà allo stesso modo di ac, ab, rispetto a β, e γ. C.C.D.D.

I triangoli abc, $\alpha\beta\gamma$ si chiamano per questa ragione *supplementarj* l' uno dell' altro; ed è evidente che si potrà sempre considerar l' uno invece dell' altro, poichè conoscendosi le parti dell' uno, quelle dell' altro saranno pur conosciute.

Quindi per mezzo di questo triangolo *supplementario*, i sei casi considerati ne' sei precedenti Problemi, possono ridursi a soli tre, ognun de' quali colle medesime formole potrà risolverne due. Così per es. se saran dati i tre angoli a, b, c, e si cerchino i lati bc, ac, ab, come nel *Problema III*, senza cercare nuove formole per questo caso, basterà risolvere colle formole del *Problema I* il triangolo *supplementario* $\alpha\beta\gamma$ in cui son dati i lati, e si cercan gli angoli, poichè queste formole daranno immediatamente quelle de' cercati lati bc, ac, ab, solo che in luogo de' lati $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ si surroghino gli angoli a, b, c, e viceversa in luogo degli angoli α, β, γ si mettano i lati bc, ac, ab, mutando il segno ai coseni, e lasciando tal quale quello de' seni. Allo stesso modo il caso esaminato nel *Problema IV* in cui essendo dati gli angoli a e b e il lato intercetto ab si cercano le altre parti, si potrà trasportarlo al triangolo *supplementario* $\alpha\beta\gamma$, in cui saran dati $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ e l'angolo compreso γ, e risolverlo perciò colle formole del *Problema II*; e finalmente il caso del *Problema VI* in cui essendo dati due angoli a, c e un lato opposto ab si cerca il resto, si potrà risolvere colle stesse formole del *Problema V* considerandolo nel triangolo supplementario, in cui, come nel *Problema V*, saran dati i lati $\beta\gamma$, $\alpha\beta$ e un angolo opposto γ.

Teorema II. *In qualunque Triangolo Sferico rettangolo si ha la proporzione:* Il raggio al seno dell'Ipotenusa, come il seno di uno de' due angoli al seno del lato opposto.

Dimostrazione. Discende immediatamente la dimostrazione di questo Teorema da quella proporzione che abbiam più volte dimostrata nel corso de' precedenti Problemi tra i seni degli angoli, e i seni degli opposti lati. La medesima dimostrazione ci viene anche esibita dalla terza formola del *Coroll. I*, e dalla terza formola del *Coroll. II del Problema VI*, nel primo de' quali si supponea retto l'angolo a, e nella seconda l'angolo c; poichè la prima dava

$$\text{sen.}\,ba = \text{sen.}\,c\,.\,\text{sen.}\,bc\text{, cioè } 1 : \text{sen.}\,bc = \text{sen.}\,c : \text{sen.}\,ab$$

e la seconda

$$\text{sen.}\,bc = \text{sen.}\,a\,.\text{sen.}\,ab\text{, cioè } 1 : \text{sen.}\,ab = \text{sen.}\,a : \text{sen.}\,bc$$

che rinchiudono appunto la proporzione enunciata nel Teorema. C. C. D. D.

TEOREMA III. *In ogni Triangolo Sferico rettangolo si ha la proporzione:* Il raggio al seno di uno de' due lati attorno l'angolo retto, come la tangente dell'angolo adjacente a questo lato alla tangente del lato opposto.

DIMOSTRAZIONE. Rinchiudono appunto l'enunciata proporzione le ultime due formole del *Coroll. del Problema II* in cui supponeasi retto l'angolo a, cioè

$$\text{sen.}\,ac = \text{tang.}\,ab\,.\,\text{cot.}\,c\text{, ovvero sen.}\,ac\,.\,\text{tang.}\,c = \text{tang.}\,ab$$

$$\text{sen.}\,ab = \text{tang.}\,ac.\text{cot.}\,b\text{, ossia sen.}\,ab.\text{tang.}\,b = \text{tang.}\,ac.\text{ C.C.D.D.}$$

I due precedenti Teoremi sono d'altronde, com'è manifesto, compresi nella generale enunciazione della *Regola Neperiana*.

TEOREMA IV. *In ogni Triangolo Sferico rettangolo gli altri due angoli sono della medesima specie dei lati opposti, e viceversa, cioè o entrambi insieme* maggiori, *o entrambi insieme* minori *di* 90°.

DIMOSTRAZIONE. Supponendosi retto l'angolo a, dalle due ultime formole del *Corollario del Problema III* si ha

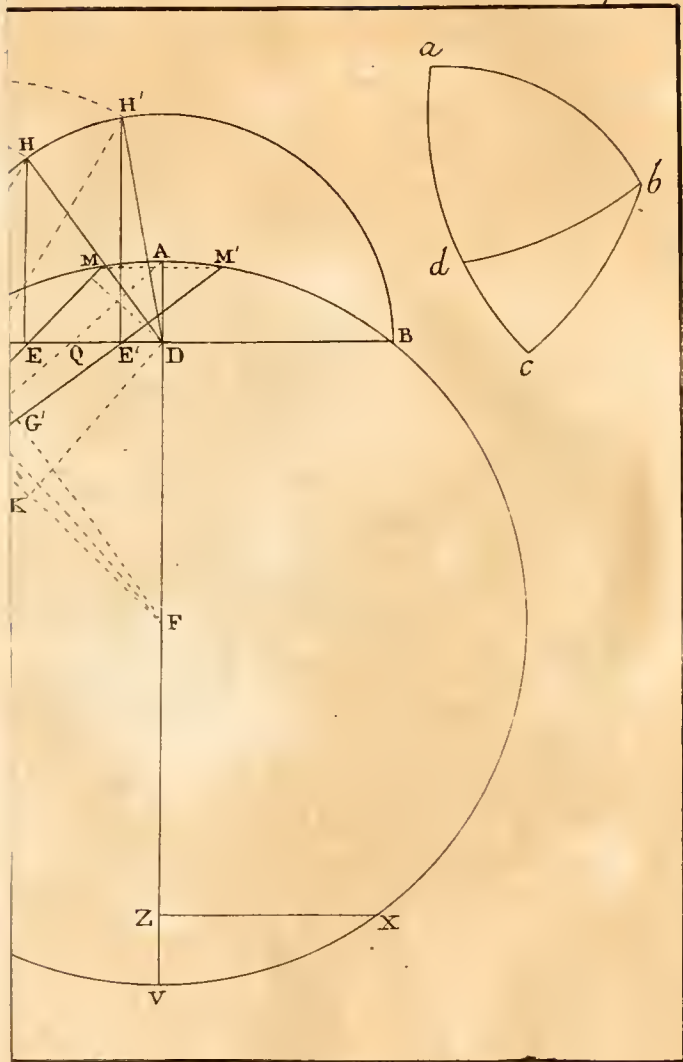
$$\cos.\,ac\,.\,\text{sen.}\,c = \cos.\,b\,;\;\cos.\,ab\,.\,\text{sen.}\,b = \cos.\,c$$

onde essendo necessariamente positivi sen. c e sen. b, cos. b e cos. c saranno positivi, o negativi, cioè b e c saranno minori, o maggiori di 90°, secondo che saranno positivi, o negativi cos. ac, cos. ab, cioè minori, o maggiori di 90° i lati opposti ac, ab. C. C. D. D.

TEOREMA V. *In un Triangolo Sferico rettangolo se i due lati che forman l'angolo retto saranno della medesima specie, cioè o entrambi maggiori o entrambi minori di* 90°, *l'ipotenusa sarà minore di* 90°, *e sarà questa maggiore di* 90° *se i due lati che forman l'angolo retto saranno di specie diversa, cioè uno maggiore e l'altro minore di* 90°; *e viceversa*.

DIMO-

H'
H
M
A
M'
E
Q
E'
D
B
G'
K
F
Z
X
V
a
b
d
c

a
b
d
c
H′
H
M
A
M′
C′
L
P
P′
B″
L′
E
Q
E′
D
B
C
R
G
G′
K
B′
F
Z
X
V

Dimostrazione . Supponendo al solito retto l'angolo a, la prima formola del *Corollario del Problema II* dà

$$\cos. bc = \cos. ab \,.\, \cos. ac$$

onde se $\cos. ab$, $\cos. ac$ saran tutti due positivi o tutti due negativi, cioè se ab, ac saran tutti due minori o tutti due maggiori di 90°, $\cos. bc$ sarà sempre positivo, cioè bc sarà minore di 90°; ma se $\cos. ab$, $\cos. ac$ saranno uno positivo e l'altro negativo, cioè ab, ac uno minore e l'altro maggiore di 90°, $\cos. bc$ sarà sempre negativo, cioè bc maggiore di 90°. Allo stesso modo si dimostrerà la proposizione inversa. C . C . D . D .

Ma ponghiam qui fine, giacchè in un argomento elementare, come questo, siam già stati forse soverchiamente lunghi .

ALCUNE RIFLESSIONI CRITICHE

SUI NUOVI PRINCIPJ D'IDRAULICA DI M.r BERNARD PUBBLICATI IN PARIGI NEL MDCCXXCVII

Del Sig. Cav. Teodoro Bonati.

Ricevute li 6 *Settembre* 1810.

Teorìa di M. Bernard *intorno alla velocità dell'acqua per un foro fatto nel fondo di un vaso cilindrico mantenuto sempre pieno d'acqua.*

1.° Il vaso sia ABHN (*Fig. I*) col foro PQ nel fondo HB da mantenersi pieno aggiungendo acqua in AN.

2. Alle prime pagine l'Autore prescrive, che le aggiunte in AN si facciano con acqna priva di velocità.

3. Nomina *fondo assoluto* il fondo intiero BH del vaso; e chiama *fondo reale* ciò, che resta del fondo assoluto fatto che sia il foro PQ.

4. A foro chiuso, e vaso pieno egli è manifesto, che il fondo reale sostiene il peso di quella parte dell'acqua nel vaso, che insiste verticalmente sullo stesso fondo.

5. E tiene per cosa certa, che il fondo reale sostenga lo stesso peso, anche a foro aperto.

6. Suppone, che a foro aperto ogni strato orizzontale dell'acqua dentro il vaso discenda mantenendosi orizzontale, e piano.

7. Per trovare la velocità dell'acqua pel foro cerca prima la velocità, colla quale discendono tali strati dell'acqua nel vaso nel primo tempo (dopo l'aprimento del foro) eguale al tempo della caduta libera di un grave dall'altezza AB del

vaso, ed a tal fine ricorre al caso di un corpo, che partito dalla quiete in A discenda lungo un piano inclinato AC. L'inclinazione deve essere tale, che come sta il fondo assoluto al fondo reale, così stia la AC all'orizzontale BC.

8. Da un punto F del piano inclinato alza una verticale FD, e fatto il rettangolo EG nota, che rappresentando FD la forza della gravità del corpo, tal forza equivale ad altre due forze dello stesso genere, cioè acceleratrici uniformemente, una espressa dalla GF, che preme normalmente in F il piano inclinato, e che viene distrutta dalla resistenza del piano; e l'altra espressa dalla EF, che accelera il corpo lungo il piano AC.

9. Così abbiamo DF : GF :: AC : BC, come il fondo assoluto al fondo reale (7). Ma come il fondo assoluto al reale, così il peso di tutta l'acqua nel vaso al peso sostenuto dal fondo reale (5). Perciò ne viene, che la DF alla GF sta come il peso di tutta l'acqua nel vaso al peso sostenuto dal fondo reale. Dunque (dice M. *Bernard*) come nel caso del piano inclinato la forza totale DF della gravità sta alla forza GF distrutta dalla resistenza del piano inclinato, così nell' altro caso il peso di tutta l'acqua nel vaso sta al peso dell' acqua sostenuto, e distrutto dal fondo reale.

10. Quindi ha creduto l'Autore di ravvisare (*Discorso critico* pag. IX), che in ambi i casi la gravità sia *similmente modificata*, e di poter dire, che anche la gravità EF, che resta al corpo sul piano inclinato per accelerare il suo moto lungo il piano sia proporzionale alla parte di gravità, che resta all'acqua nel vaso per accelerare la discesa d'ogni strato, come se mancando il fondo fosse quell'acqua animata da una gravità diminuita, e minore della comune nella ragione della EF alla DF (pag. 5).

11. Tira indi l'Autore la BO normale al piano inclinato AC, e nota, che il corpo partito da A arriverà in O nel tempo stesso, che un altro corpo sarebbe caduto liberamente da A in B.

12. Pel punto O si conduca l'orizzontale OIM, e questa si prolunghi verso T finchè sia OT = IM, e si faccia il parallelogrammo AOTS, che esprima un cilindro obbliquo AOTS di acqua (che io supporrò gelata) appoggiato sul piano AC della base del diametro OT = IM, e dell' altezza AI. Sarà questo cilindro eguale all' altro ANMI dell' acqua nel vaso perchè della medesima altezza AI, e di basi eguali.

13. E siccome il diametro degli strati dei due cilindri è il medesimo, tiene in sostanza M. *Bernard* come conseguenza evidente (pag. 6, 7) che se all' aprire il foro PQ, e mentre in conseguenza comincieranno a discendere tutti gli strati dell' acqua nel vaso, e perciò anche lo strato superiore AN, se dissi, si lascierà libero alla discesa lungo il piano inclinato AC il cilindro gelato AT, questo scorrerà uno spazio AO, ed arriverà colla sommità AS in OT, mentre lo strato AN arriverà in IM, e mentre un grave partito anch' esso da A all' aprire del foro, arriverà in B.

14. Intanto pel foro PQ sarà uscito un volume di acqua eguale al cilindro AIMN. Intendendo questo volume di acqua uscita conformato in un cilindro della base eguale al foro PQ, la sua altezza secondo l' Autore sarà la cercata velocità pel foro.

15. Per esprimere codest' altezza di una maniera generale denomina M. *Bernard* a l' altezza AB del vaso, y il fondo assoluto, b il fondo reale, cosicchè l' aja del foro riesce $y - b$; e denomina v l' altezza del detto cilindro di acqua uscita pel foro PQ nel tempo della caduta di un grave per AB. Calcolando alle pag. 7, 8 trova l' A. $v = a + \frac{ab}{y}$.

Al calcolo dell' Autore sostituisco il seguente più spedito.

16. Dev' essere (7) AC alla BC come il fondo assoluto y al fondo reale b; donde si ha $BC = \frac{AC \cdot b}{y}$, e perciò $BC^2 = \frac{AC.^2 \cdot b^2}{y^2}$.

17. Poichè nel triangolo ABC rettangolo in B la BO è normale alla AC abbiamo AC : BC : : BC : OC $= \frac{BC^2}{AC} = (16) =$ $\frac{AC^2 . b^2}{AC . y^2} = \frac{AC . b^2}{y^2}$.

18. Inoltre AC : OC : : AB : IB . Ma OC $= \frac{AC . b^2}{y^2}$ (17), ed AB $= a$ (15) . Dunque AC : $\frac{AC . b^2}{y^2}$: : a : IB $= \frac{ab^2}{y^2}$. Ma AI $=$ AB $-$ IB . Dunque AI $= a - \frac{ab^2}{y^2} = \frac{a(y^2 - b^2)}{y^2}$.

19. Moltiplicando quest'altezza AI nella sezione del vaso, ossia nel fondo assoluto y, avremo $a \times \frac{y^2 - b^2}{y}$ volume cilindrico ANMI di acqua nel vaso eguale all'acqua uscita pel foro PQ mentre lo strato AN è passato in IM . Questo volume di acqua diviso pel foro PQ lascia la cercata altezza $v = a . \frac{y + b}{y} = a + \frac{ab}{y}$.

20. Ella è questa la formola, che dà M. *Bernard* alla pag. 7 come formola generale per la velocità dell'acqua per un foro nel fondo di un vaso cilindrico mantenuto sempre pieno; essendo l'altezza v lo spazio, che può scorrere un corpo uniformemente colla velocità dell'acqua pel detto foro nel tempo della caduta libera di un grave dall'altezza AB del vaso (pag. 47) .

21. Quanto la esposta teorìa sia bene stabilita, e quanto sia fondata la lusinga dell'Autore, che la sua formola sia conforme alla sperienza, ed in massima parte conforme ai risultati della Teorìa del *Newton*, lo indagheremo nelle seguenti riflessioni .

RIFLESSIONE I

22. M. *Bernard* trova la formola $v = a + \frac{ab}{y}$ supponendo, che aperto il foro lo strato AN arrivar debba in IM nel tempo, che un grave caderebbe per AB (13).

23. Qui l'Autore pecca d'incoerenza ne' suoi principj, perchè avendo egli prima stabilito (pag. 5), che lo strato AN, aperto che sia il foro PQ, discenderà come animato da una gravità, che stia alla comune, come EF alla DF, io trovo, che in questa ipotesi nel tempo della caduta di un grave per AB lo strato AN deve arrivare oltre IM, come in *mo*.

24. Io la discorro così. Egli è principio noto, che se due corpi partiti dalla quiete siano animati da forze costanti, ma diverse, gli spazj scorsi in capo a tempi eguali saranno come le forze.

25. Nel caso nostro le forze stanno come EF alla DF. Lo spazio da scorrersi dallo strato AN nel tempo della caduta del grave per AB sia A*m*, e lo spazio da scorrersi dal grave è la AB. Perciò avremo EF : DF : : A*m* : AB, onde $Am = \frac{AB \,.\, EF}{DF}$.

26. Abbiamo poi ancora DF : EF : : AC : AB : : AB : AO, onde anche $AO = \frac{AB \,.\, EF}{DF}$.

27. Dunque $Am = AO$, ed AO è sempre maggiore della AI; dunque ec.

28. Fatta pertanto $Am = AO$, l'Autore per non essere incoerente doveva dire, che nel tempo della caduta del grave per AB lo strato AN deve arrivare in *mo*.

29. Cerchiamo la A*m*. Abbiamo AB : AO : : AO : AI; onde $AO^2 = AB \,.\, AI$. Ma $AB = a$, ed al n.° 18 ho trovato $AI = a \,.\, \frac{y^2 - b^2}{y^2}$.

Dunque $AO^2 = a \,.\, a \,.\, \frac{y^2 - b^2}{y^2}$, ed $AO = a \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{y} = Am$.

30. Moltiplicando questa altezza Am nella sezione y del vaso si ha $a\sqrt{y^2-b^2}$ volume del cilindro AmoN eguale al volume dell'acqua uscita pel foro nel tempo della caduta del grave per AB.

31. E dividendo per $y-b$, aja del foro, si trova $\frac{a\sqrt{y+b}}{\sqrt{y-b}}$ altezza del cilindro di acqua della base eguale al foro, e del volume dell'acqua uscita pel foro in capo al primo tempo della caduta libera di un grave dall'altezza AB del vaso dopo l'aprimento del *foro*, e perciò $v=\frac{a\sqrt{y+b}}{\sqrt{y-b}}$ è la formola, che doveva dare l'Autore invece della data $v=a+\frac{ab}{y}$ ben diversa.

32. Infatti mettendo il fondo assoluto $y=30$, ed il reale $b=29$, cosicchè il foro sia $=1$, la formola esibita dall' Autore dà $v=a(1,96)$, e la formola qui riformata dà $v=a(7,68)$.

33. E mettendo b quasi eguale ad y la formola esibita non arriva a dare $v=2a$, e la qui riformata dà v quasi infinita: affatto contro la sperienza. Questo solo mostra, che *i nuovi principj d'Idraulica* di M. *Bernard* hanno un qualche vizio, o dei vizj molto gravi.

RIFLESSIONE II

34. Ma vi è di più. Anche accordando che lo strato AN fosse per arrivare in IM nel tempo voluto da M. *Bernard*, mostrerò, che tuttavia la formola $v=a+\frac{ab}{y}$ non regge perchè dedotta male.

Infatti giusta l'Autore, aperto il foro, lo strato superiore AN deve discendere fino in IM nel tempo, che un grave può cadere dall'altezza del vaso, e tale discesa deve seguire come se lo strato fosse animato da una gravità, cioè con moto

uniformemente accelerato: e stando al principio notissimo, che pure si vede adottato dall'Autore alla pag. 29, §. 45 la velocità dello strato giunto in IM dev'essere quella, colla quale un corpo nel tempo di tale discesa potrebbe scorrere uniformemente uno spazio doppio della discesa AI.

35. Al n.° 18 colle denominazioni dell'Autore ho trovato $AI = a \cdot \frac{y^2 - b^2}{y^2}$. Dunque la velocità dello strato AN giunto con moto accelerato in IM dovrebb'esser quella di un corpo, che nel tempo della detta discesa per AI, l'altezza AI scorresse uniformemente uno spazio $2AI = 2a \cdot \frac{y^2 - b^2}{y^2}$.

36. E perchè come il foro $PQ = y - b$ alla sezione y del vaso, così deve stare la velocità di ogni strato dell'acqua nel vaso alla velocità dell'acqua pel foro, si trova, che all'arrivo del detto strato AN in IM la velocità pel foro dovrebb'essere di scorrere uno spazio $v = 2a + \frac{2ab}{y}$ uniformemente in un tempo eguale al tempo della discesa dello strato AN per AI, che qui coll'Autore si suppone eguale al tempo della caduta di un grave dall'altezza $a = AB$ del vaso.

37. Dunque anche accordando all'Autore ciò, che non gli si avrebbe dovuto accordare, risulta sempre una velocità pel foro diversa da quella dell'Autore. In questo caso è doppia; e si scosta troppo dal vero, giacchè quando il foro è piccolo, rapporto al fondo, dà il doppio della sperienza.

38. E perchè come il foro $y - b$ alla sezione y del vaso, così deve stare la velocità dello strato in IM alla velocità pel foro, si trova, che allora la velocità pel foro PQ dovrebbe essere $v = 2a + \frac{2ab}{y}$, cioè doppia di quella, che l'A. assegna pel foro all'arrivo dello strato AN in IM, nel qual caso i Nuovi Principj dell'Autore si scosterebbero troppo dalla sperienza.

39. Merita poi una singolare riflessione la ipotesi dell'Autore

tore, che giunto lo strato AN con moto accelerato in IM debba sul momento cessare l'accelerazione onninamente, e che in appresso debba lo strato continuare bensì la sua discesa, però con movimento affatto uniforme. Di un fenomeno di tal natura ognuno mi accorderà, che all'Autore correva l'obbligo di addurne una qualche causa: ma questa dall'Autore si aspetta invano.

40. Egli è quindi, che io metto una tale ipotesi fra le arbitrarie. Anzi perchè un effetto senza causa in natura non si dà, io la metto fra le assurde.

RIFLESSIONE III

41. Parmi, che queste, ed altre eccezioni che potrei aggiugnere, sieno state presentite dall'Autore, giacchè alla pag. 8 non lo vedo molto lontano dall'essere contento nel caso, che la sua formola $v = a + \frac{ab}{y}$ venisse riguardata almeno come una semplice ipotesi, però da valutarsi per la ragione, che ha il *merito* (pag. 8) d'essere conforme alla sperienza nei due casi estremi del foro infinitamente piccolo, e del foro eguale al fondo assoluto.

42. A che servirebbe ciò se poi in tutti i casi intermedj la formola recedesse dalla sperienza?

43. Finchè il foro è piccolissimo egli è vero, che il fondo reale b può considerarsi come eguale al fondo assoluto y, e la formola diviene $v = a + \frac{ab}{y} = 2a$, ed in tal caso convengo, che la formola viene confermata dalla sperienza, la quale allora dà, che la velocità pel foro contratto sia quella di un corpo, che nel tempo della caduta libera di un grave dall'altezza a del vaso scorre uniformemente uno spazio pressochè $= 2a$.

44. Ma io mostrerò, che in tutti gli altri casi la formola inganna, e che arriva a scostarsi dal vero fuor di modo.

45. Per ora verrò soltanto al confronto della formola colla sperienza nell'altro caso estremo del foro eguale al fondo.

46. Sia il vaso cilindrico ABCD (*Fig. II*) pieno d'acqua, e da mantenersi sempre pieno allorchè gli venga aperto un foro nel fondo, e si dica anche qui a l'altezza AD del vaso. Si levi a un tratto il fondo DC, e saremo nel caso del foro eguale al fondo assoluto. Tutti gli strati dell'acqua nel vaso liberati dall'ostacolo ubbidiranno alla gravità completamente, e discenderanno colla legge dei gravi; e lo strato, che al mancare del fondo DC si trovava in AB, arrivato in DC giusta le regole note avrà una velocità di potere con essa correre uniformemente uno spazio $2\mathrm{AD}=2a$ nel tempo della caduta libera di un grave per AD.

47. Ma la formola $v=a+\frac{ab}{y}$ per essere in questo caso estremo $b=0$ dà $v=a$, cioè dà, che lo strato AB giunto in DC abbia la sola velocità di scorrere sul detto tempo lo spazio a. Dunque le regole note, e la sperienza danno, che in capo al primo tempo della caduta di un grave per AD dopo la mancanza del fondo la velocità pel foro eguale al fondo DC sia doppia di quella, che dà la formola.

48. Andiamo avanti. Giunto il contemplato strato AB in DC sarà uscito per DC un cilindro ABCD di acqua.

49. Ma intanto il vaso deve essere stato mantenuto tutto pieno d'acqua, e l'acqua introdotta dev'essere tutta affetta della stessa velocità, che abbiamo trovato avere lo strato DC disceso da AB, perchè se un qualunque altro strato mn avesse una velocità minore egli è manifesto, che tra i due strati vi sarebbe un qualche vóto contro il supposto.

50. E qui è pure da dirsi, che questo secondo cilindro d'acqua perchè non impedito ubbidirà completamente alla gravità accelerando vieppiù la sua discesa secondo la legge dei gravi, e che al suo ultimo uscire per DC si avrà pel foro DC una velocità maggiore di quella, che vi si ebbe all'ultimo uscire del primo cilindro, cioè più che doppia della velocità della formola.

51. Continuando questo discorso si trova, che la velocità per DC non si ridurrà mai a una uniformità, ma che si farà sempre maggiore, ed in modo, che nel primo tempo eguale a quello della caduta di un grave per AD uscirà dal vaso un cilindro ABCD di acqua: nel successivo tempo eguale al primo ne usciranno tre; nel terzo cinque ec., e che in conseguenza la velocità pel foro si scosterà dalla velocità della formola sempre, e sempre più finchè il vaso verrà mantenuto pieno.

52. Altrove mostrerò, che la formola si scosta dalla sperienza anche nei casi intermedj.

RIFLESSIONE IV

53. Intende M. *Bernard* di appoggiare la sua formola dicendola (pag. 9) conforme ai risultati della Teorìa del *Newton*. Ecco come egli scrive " denominando a l'altezza del vaso, „ y il fondo assoluto, b il fondo reale, $y-b$ il foro, trova „ il *Newton* (pag. 292, 293 del Tomo II con comenti stampato „ in Ginevra) che nel tempo, che un grave cade liberamente „ dall'altezza del vaso uscirebbe pel foro un cilindro d'ac„ qua, che avendo per base questo foro contratto sarebbe „ dall'altezza $v=2a\times\frac{y}{y+y-b}=\frac{2ay}{2y-b}$. Ora in questa formo„ la supponendo il foro eguale al fondo assoluto, il fondo „ reale diviene $=0$, ed anche $b=0$; e $v=\frac{2ay}{2y}=a$. Que„ sto è il caso nel quale l'acqua cade liberamente. Quando „ il foro è infinitamente piccolo, $b=y$; dunque $v=\frac{2ay}{2y-y}=$ „ $2a$; ciò che è conforme alla sperienza „ fin qui M. *Bernard*, il quale, perchè la da esso esibita formola del *Newton* fuori dei detti due casi estremi non combina colla sua, riprende il *Newton* per la ragione, che non ha impiegato dei principj *cogniti*, come conviene nella soluzione dei Problemi.

54. Qui l'Autore ha equivocato gravemente; non ha inteso il *Newton*.

55. Per determinare la velocità dell'acqua pel foro nel fondo di un vaso mantenuto sempre pieno d'acqua immagina il *Newton* (Prop. 36 di quel Tomo II) il caso di un cilindro PABQ (*Fig. III*) di ghiaccio dell'asse HR, verticale, di una altezza indefinita, che discenda perpetuamente con velocità uniforme, ed eguale a quella di un grave caduto liberamente da un'altezza IH da determinarsi dalle misure del vaso, e del foro; e finge, che all'arrivo del cilindro in AB (bocca superiore del vaso cilindrico ABDC) si squagli, e suppone, che da AB in giù l'acqua divenuta fluida continui la discesa colla legge dei gravi formando una cateratta, o colonna ABNEFM, la quale secondo, che cresce la velocità, diminuisce di sezione, e che esca pel foro EF. Sulle prime finge lo spazio ACEM, BDFN pieno di ghiaccio. In queste ipotesi determina il *Newton* la sua legge della velocità dell'acqua pel foro EF; ed intende, che la medesima velocità si abbia anche essendo l'acqua nel vaso divenuta tutta fluida.

56. Venendo poi alle citate pagine 292, 293 non si trova, che il *Newton* ivi parli punto del tempo della caduta di un grave dall'altezza del vaso, come falsamente ci asserisce M. *Bernard*.

57. In quel sito citato sta il Corollario terzo della proposizione 36, col quale il *Newton* non fa, che dimostrare sinteticamente, che come sta la somma dei circoli AB, ed EF al doppio del circolo minore EF, così sta l'acqua tutta nel vaso all'acqua componente la cateratta ABNFEM. Mi giova il dimostrare qui lo stesso analiticamente.

58. Poichè in AB l'acqua ha la velocità di un grave caduto dall'altezza IH, e continua la sua discesa colla legge dei gravi cadenti liberamente (14), la velocità dell'acqua per ogni altra sezione MN sarà quella di un grave caduto dall'altezza IO, onde le velocità per AB e per MN saranno $:: \sqrt{IH} : \sqrt{IO}$.

59. E perchè il movimento dell'acqua della cateratta è uniforme, giacchè uniforme è la discesa del cilindro AQ di ghiaccio (55), si vede, che in tempi eguali passano per le due sezioni AB, MN quantità eguali di acqua, e perciò le due sezioni saranno in ragione inversa della velocità dell'acqua, ossia delle radici delle altezze IH, IO, cosicchè avremo; sezione AB : sezione MN :: $\sqrt{IO} : \sqrt{IH}$. Ritenendo le denominazioni al n.° 53 avremo qui $AC = a = HG$, la sezione $AB = y$, la sezione $EF = y - b$. Si dica inoltre $IH = z$, $HO = x$, ed una sezione $MN = u$. Sarà $IO = z + x$; $IG = z + a$.

60. Perciò sezione $AB = y$: sezione $MN = u :: \sqrt{IO = z + x} : \sqrt{IN = z}$; onde $y\sqrt{z} = u\sqrt{z + x}$ (N).

61. Quando x crescendo diviene $= HG = a$ la sezione $MN = u$ diviene sezione $EF = y - b$, e l'equazione (N) diviene $y\sqrt{z} = \overline{y - b}\sqrt{z + a}$, d'onde si ricava $z = a\frac{(y-b)^2}{2by - b^2} = IH$.

62. E dalla stessa equazione (N) si ha $x = \frac{y^2 z}{u^2} - z$.

63. E siccome qui le y, z sono costanti, differenziando sarà $\partial x = -\frac{2y^2 z \partial u}{u^3}$. Condotta una mn infinitamente prossima alla MN sarà $Oo = \partial x$, e l'elemento ANnm della cateratta sarà $u\partial x = -\frac{2y^2 z \partial u}{u^2}$.

64. Ed integrando per modo, che quando $u = y$ l'integrale sia $= 0$ si avrà $\int u\partial x = \frac{2y^2 z}{u} - 2yz$, volume del tronco ABNM della cateratta.

65. Passando poi dalla sezione MN al foro EF avremo $u = y - b$, e sostituendo in luogo della z il trovato suo valore $\frac{a(y-b)^2}{2by - b^2}$ (61) si troverà $\frac{2ay(y-b)}{2y - b}$ volume della cateratta intiera ABNFEM, quarto termine proporzionale ai tre $2y - b$, $2(y - b)$, ay, essendo $2y - b = y + y - b$ somma dei due circoli AB, EF; e $2(y - b)$ il doppio del circolo EF; ed ay

l'acqua tutta nel vaso, appunto come mostra il *Newton* nel Corollario citato (17).

66. Questo volume della cateratta intiera diviso pel foro $y-b$ lascia $\frac{2ay}{2y-b}$ altezza di un cilindro della base eguale al foro, e del volume eguale alla cateratta, e non (come ha equivocato M. *Bernard*) eguale al volume dell'acqua uscito pel foro in un tempo, che impiegarebbe un grave cadendo dall'altezza del vaso; che è ben diverso dal volume della cateratta.

67. Infatti alla citata pag. 292 il *Newton* dice, che l'acqua uscita per un foro EF nel tempo, che un grave potrebbe cadere non dall'altezza HG del vaso, ma dall'altezza IG, è del volume di un cilindro della base eguale al foro, e dell'altezza $=2$IG. Ho trovato (61) IH $= z = a\frac{(y-b)^2}{2by-b^2}$, e la HG si è detta $=a$ (53), con che si ha IH $+$ HG $=$ IG $= \frac{ay^2}{2by-b^2}$; e $2\text{IG} = \frac{2ay^2}{2by-b^2}$; e moltiplicando in $y-b=$ foro, avremo $\frac{2ay^2(y-b)}{2by-b^2}$ volume dell'acqua uscita giusta il *Newton* per EF nel tempo, che un grave cade per IG.

68. Ma la velocità dell'acqua per EF è uniforme. Dunque per avere l'acqua uscita pel foro nel tempo dell'Autore; cioè nel tempo della caduta per AG, basterà dire come il tempo della caduta di un grave da I in G al tempo della caduta da H in G, ossia $::\sqrt{\text{IG}}:\sqrt{\text{HG}}$, così l'acqua uscita nel tempo del *Newton* all'acqua uscita nel tempo di M. *Bernard*. Quindi $\sqrt{\frac{ay^2}{2by-b^2}}:\sqrt{a}::2ay^2\frac{(y-b)}{2by-b^2}$, che è il volume dell'acqua uscita nel tempo, che un grave cade per HG; il qual volume diviso per $y-b=$ foro lascia $\frac{2ay}{\sqrt{2by-b^2}}$ altezza del cilindro della base eguale al foro EF, e del volume dell'acqua uscita (stando al *Newton*) nel tempo, che un grave cade dall'altezza del vaso.

69. Questa è l'altezza di un cilindro, che ci doveva dare M. *Bernard* alla pag. 9, invece della quale, per non avere inteso il *Newton*, ci ha dato l'altezza $\frac{2ay}{2y-b}$, la quale non è altro, che l'altezza del cilindro della base bensì eguale al foro, ma del volume della cateratta.

70. Confrontando le due formole $v=a+\frac{ab}{y}$ di M. *Bernard*, e l'altra $v=\frac{2ay}{\sqrt{2by-b^2}}$, che è del *Newton*, si trova bensì, che nel caso estremo del foro infinitesimo posto $b=y$ si accordano dando ambedue $v=2a$. Ma in tutti gli altri casi discordano sostanzialmente, perchè al crescere del foro, ossia al calare del fondo reale b, la formola dell'A. dà delle velocità vieppiù minori, e quella del *Newton* le dà sempre maggiori.

71. Notabilissima è poi la discrepanza delle due formole nell'altro caso estremo del foro eguale al fondo, nel quale essendo $b=0$ la formola di M. *Bernard* diviene $v=a$, e quella del *Newton* diviene $v=\infty$.

RIFLESSIONE V

72. Dopo di avere redarguito il *Newton* alla pag. 10, perchè non ha impiegato dei principj *cogniti*, passa M. *Bernard* nella stessa pagina ad attaccare i celebri Geometri *Mac-Laurin*, *Daniele Bernoulli*, *Giovanni Bernoulli*, *Eulero*, *D'Alembert* ec. Per dare un giudizio della loro Teorìa crede, che basti il prendere in esame la formola di *Giovanni Bernoulli*, alla quale si accostano tutte quelle degli altri.

73. La formola è $z=\frac{h^2}{h^2-m^2}$ essendo z l'altezza dalla quale un grave cadendo può acquistare la velocità dell'acqua pel foro; h è la sezione del vaso, ed m è l'aja del foro nel fondo. Fa riflettere, che secondo questa formola, crescendo

il foro *m*, cresce ancora la velocità dell'acqua pel foro. *Ora* (egli dice alla pag. 13) *questo è assolutamente contro la sperienza*.

74. In prova di un'asserzione sì franca io stavo in attenzione di sperienze immediate con un vaso cilindrico, col foro *m* nel fondo, ora piccolo, ora grande; ma mi sono ingannato. Le sperienze addotte dall'Autore non sono, che alcune sperienze indirette, quali sono quelle dei getti all'insù delle fontane artificiali; sperienze in parte non vere, ed in parte non applicabili al caso nostro, che è di getti all'ingiù.

75. Ecco gli argomenti di M. *Bernard*. La formola vuole, che crescendo il foro nel fondo del vaso cilindrico cresca la velocità dell'acqua pel foro; dove che la sperienza dà, che i getti, crescendo il foro, si alzino meno, indizio di una velocità diminuita per lo stesso foro.

76. Inoltre se la formola fosse vera, la velocità, pel foro, di un getto sarebbe sempre maggiore di quella di un grave caduto dall'altezza del vaso; ed in conseguenza di questo il getto si alzarebbe sempre sopra il livello della conserva, dove che i getti restano sempre al disotto di quel livello.

77. Prima piacemi di notare di passaggio, che nella taccia, che qui l'Autore intenderebbe di dare ai *Bernoulli*, ed ai da esso nominati rispettabili Geometri, cade anche il *Newton*, dalla cui teorìa deriva la stessa formola Bernoulliana in questione.

78. Di questo se ne veda in fine la prova segnata A.

79. Vengo ora alla prima difficoltà di M. *Bernard*, che i getti crescendo il foro si alzino meno. Fa veramente caso, che M. *Bernard*, il quale mostra pure di aver veduta la Idrodinamica del Sig. Abb. *Bossut*, non siasi incontrato nelle sperienze I, II, III nel Tomo secondo (589).

80. La carica, ossia l'altezza dell'acqua nella conserva sopra il foro era in tutte tre di piedi 11.

81. Nella prima col foro largo 2 linee, il getto verticale si alzò piedi 10. 0. 10.

82.

82. Nella seconda col foro largo 4 linee il getto verticale si alzò piedi 10. 5. 10.

83. Nella terza essendo il foro largo 8 linee, il getto si elevò piedi 10. 6. 6.

84. Il Sig. Abb. *Bossut* nella riflessione (586) adduce la ragione dicendo: *i getti grossi s'alzano più dei piccoli*, perchè di due getti, che escono dai loro zampilli con velocità eguali, il più grosso ha più materia, ed in conseguenza ha più forza per vincere gli ostacoli opposti, che i più piccoli.

85. Anche *Mariotte* aveva trovato, che i getti grossi si alzano più, e ne aveva addotto una ragione consimile nelle sue *Regole per i Getti d'Acqua*. Avendo egli dato una Tavola delle altezze delle conserve per ottenere dai getti delle altezze dai 5 ai 100 piedi, soggiunge. " Lo sfregamento dei „ zampilli scema un poco di questa proporzione nelle grandi „ altezze: per questo egli è necessario, che in queste gran- „ di altezze i zampilli abbino un foro di 10, o 12 linee; „ perchè se n'avessero di due, o di tre linee, l'acqua si al- „ zarebbe molto meno di ciò, che dà questa Tavola; oltre „ di che l'aria resiste molto più a un piccolo corpo, che a „ un più grande, come se ne vede l'esempio nelle armi a „ fuoco, che portano più lontano una palla grossa, che una „ piccolissima, come la munizione, o la polvere di piombo „.

86. Conviene bensì, che al foro possa arrivare l'acqua in una copia proporzionata. Potrebbe essere, che il tubo E (*Fig. IV*) di condotta non fosse di una tale larghezza, che bastasse per mantenere la massima altezza del getto essendo il foro F di 6 linee, ma che bastasse per un getto di 4 linee. Allora sì, che il getto più sottile salirebbe più alto, che il getto più grosso. Ma ciò accaderebbe per difetto di afflusso di acqua. Ma quando il tubo E di condotta sia di un diametro sufficiente, accaderà sempre, che il getto si eleverà più col foro di 6 linee, che col foro di 2 linee.

87. Non sussistendo perciò generalmente il supposto di M. *Bernard*, che i getti delle fontane crescendo il foro s'al-

zino meno, non sussisterà neppure la deduzione dell'Autore dal suo supposto, la quale è, che crescendo il foro nel fondo del nostro vaso l'acqua debba uscirne con una velocità minore.

88. Ma posto anche per un momento, che i getti, crescendo il foro, si alzassero meno, e che insieme la velocità pel foro crescinto divenisse minore, non valerebbe già neppure in questa ipotesi la deduzione dell'Autore, che lo stesso dovesse accadere anche al foro fatto nel fondo del vaso. Eccomi colla sperienza.

89. Al vaso ACDB (*Fig. V*) abbiamo unito (col Signor *Luigi Gozzi* abile mio sostituto) il vaso cilindrico NPQO, ed a questo abbiamo unito una cassetta PGHR, come mostra la figura.

90. Le misure sono.

Diametro AB	=	pollici	5
Diametro NO	=	linee	5
AC	=	pollici	13
QO	=	pollici	7
QR	=	pollici	2
Cassetta larga, ed alta		linee	9

91. Un foro in V ha il suo centro nell'asse dei due cilindri AD, NQ.

92. Il centro del foro T dista dal centro del foro V linee 16.

93. Verticalmente al foro T sovrasta un foro I.

94. Nelle seguenti tre sperienze il diametro dei fori era di una linea.

Sperienza I

95. Chiusi i tre fori abbiamo empito tutto con acqua. Indi aperto il foro I, l'acqua nel vaso superiore si è abbassata otto pollici in secondi 250.

Sperienza II

96. Chiuso il foro I, abbiamo riempito tutto con acqua fino a 9 linee sotto all' orlo AB, cosicchè l' acqua restava più alta dei due fori T, V quanto lo era sopra il foro I al principio della sperienza precedente. Aperto indi il foro T, l' acqua nel vaso superiore si è abbassata otto pollici in secondi 250, pochissimo meno.

Sperienza III

97. Chiuso il foro T, e riempito il tutto con acqua, come nella sperienza precedente, ed aperto il foro V, il calo dell' acqua, nel vaso superiore, di otto pollici è seguito parimenti in secondi 250.

98. Nelle seguenti tre sperienze i fori I, T, V erano stati allargati sino al diametro di quattro linee.

Sperienza IV

99. Chiusi i fori, ed empito tutto con acqua sino a tre linee sotto l' orlo del vaso superiore, ed aperto indi il foro I, si è avuto nel vaso superiore l' abbassamento della superficie dell' acqua, di dieci pollici in secondi 42.

Sperienza V

100. Chiuso il foro I, ed empito tutto d' acqua sino ad un pollice sotto l' orlo AB, ed aperto il foro T, si è avuto il calo di dieci pollici in secondi 42 poco meno.

Sperienza VI

101. Chiuso il foro T, riempito il tutto di acqua sino a un pollice sotto l' orlo AB, ed aperto il foro V, il calo di dieci pollici è seguito in secondi 34.

102. Si veda pertanto, che quando i fori erano piccoli, cioè di una linea, la velocità pel foro I del getto è stata eguale alle velocità per T, e per V. Ma quando i fori sono stati grandi, cioè del diametro di 4 linee, essendo il diametro del vaso NQ di cinque linee, la velocità del getto è stata bensì eguale alla velocità dell'acqua pel foro T sottoposto al foro I, ma è stato notabilmente minore della velocità pel foro V da considerarsi come nel fondo del vaso BG.

103. Non essendo pertanto vero il supposto di M. *Bernard*, che la velocità in I di un getto sia sempre eguale alla velocità dell'acqua per un foro V, essendo i fori, e le cariche eguali, sparisce anche qui tutta la forza dell'argomento di M. *Bernard* contro la formola del *Bernoulli*.

RIFLESSIONE VI

104. Invece di ricorrere alle sperienze indirette dei getti, perchè non rivolgersi a sperienze dirette, immediate, e che non abbisognino di raziocinj complicati per applicarle, cioè a sperienze con vasi cilindrici con un foro nel fondo ora piccolo, ed ora grande?

105. Qui M. *Bernard* risponde, che sperienze con un foro grande rapporto al fondo non ne sono state fatte, e che per farle a dovere s'incontrano delle difficoltà (pag. 19). Le difficoltà si trovano intorno al rimpiazzare nella parte superiore del vaso l'acqua, che esce pel foro.

106. Nelle prime pagine dove l'Autore espone la sua teorìa, prescrive, che l'acqua venga aggiunta priva affatto d'ogni movimento. Solamente alla pag. 16 dichiara essere suo parere, che l'acqua, che si aggiunge, dovrebbe essere affetta di quella stessa velocità, che ha l'acqua nel vaso; perchè altrimenti si anderebbe ad introdurre nell'acqua del vaso dei movimenti irregolari atti ad alterarne la velocità naturale pel foro; e dice, che per ottenere l'intento una maniera ci manca.

107. Anche *Giovanni Bernoulli* (Idraulica Parte prima X) vuole, che l'acqua venga aggiunta colla velocità dell'acqua nel vaso, ma non ne dice il modo.

108. Il *Newton* dà una maniera di aggiugnere in AN (*Fig. I*) acqua affetta di una velocità data. La maniera è giusta teoricamente; ma in pratica è ineseguibile. Consiste in quel cilindro indefinito di ghiaccio qui sopra descritto (55), il quale discenda uniformemente, ed all'arrivo in AB (*Fig. III*) si converta in acqua fluida.

109. Quella maniera, che altri non videro, cadde in mente a me. L'abbiamo tentata (bensì finora in piccolo), e l'abbiamo trovata eseguibile. Sia NPQO (*Fig. VI*) un vaso cilindrico con un foro F nel fondo. Si abbia un altro vaso più alto, e più largo ABCD, con un foro Ε nel fondo, armato di un tubo addizionale, il di cui diametro sia eguale al diametro del vaso NQ; ed a questo vaso sia sovrapposto l'altro, come mostra la figura.

110. Le misure dei due vasi siano tali, che empiti d'acqua, ed aperti i due fori E, F, l'acqua del foro E mantenga il vaso inferiore pieno, anzi sulle prime trabocchi in parte dall'orlo NO.

111. Questo trabocco anderà scemando secondo, che la superficie dell'acqua nel vaso superiore s'abbasserà; ed al momento, che il trabocco cesserà si noti prontamente il punto R, fino al quale l'acqua del vaso superiore si sarà abbassata. Se in appresso coll'aggiugnere acqua nuova si manterrà nel vaso superiore la superficie al punto R, egli è chiaro, che il vaso NQ continuerà ad esser pieno, e senza trabocco, e che in tempi eguali passerà egual corpo di acqua per ogni sezione, tanto del tubo addizionale, che per ogni sezione del vaso NQ, e pel foro F.

112. E che essendo le sezioni del tubo addizionale E, e del vaso NQ per ipotesi eguali, la velocità dell'acqua pel tubo sarà eguale alla velocità pel vaso.

113. E che in conseguenza avremo il caso di un vaso

cilindrico NPQO, che a foro aperto nel fondo vien mantenuto pieno con acqua aggiunta nella parte superiore affetta della stessa velocità, che ha l'acqua discendente per lo stesso vaso NPQO.

114. Con questa circostanza, avuta in vista dal *Newton*, prescritta da *Giovanni Bernoulli*, e desiderata dallo stesso M. *Bernard*, abbiamo fatte le esperienze seguenti.

Sperienza VII

115. Il vaso NPQO era del diametro di linee 5, ed alto sette pollici, col foro F nel fondo, largo linee 4.

116. Il vaso superiore ACDB era di cristallo, alto 13 pollici, e del diametro di pollici 5, col foro E con tubo addizionale del diametro eguale a quello del vaso sottoposto, ossia di linee 5.

117. Empito tutto d'acqua, ed aperti indi i fori E, F, l'acqua da E sulle prime non solo manteneva pieno il vaso NQ ma in parte traboccava dall'orlo NO. Al cessare del trabocco l'acqua nel vaso superiore si era ridotta all'altezza CR di linee 48.

118. Allora coll'aggiugnere acqua nuova venne mantenuto il vaso superiore pieno all'altezza CR dieci minuti secondi, e l'acqua uscita in quel tempo uniformemente da F fu raccolta in un vaso cilindrico GLMH del diametro di cinque pollici, nel quale formò l'altezza di linee 35.

119. Dunque in un secondo era uscito per F un cilindro di acqua alto linee $3\frac{1}{2}$, e del diametro di pollici 5, ossia di linee 60, essendo il diametro del foro F di linee 4.

120. Poichè le altezze di cilindri eguali sono in ragione inversa dei quadrati dei diametri delle loro basi, se faremo $4^2 : 60^2 :: 3\frac{1}{2} :$ al quarto termine proporzionale, che è $787\frac{1}{2}$, sarà questo l'altezza del cilindro d'acqua della base eguale al foro F, uscita in un minuto secondo dallo stesso foro F con velocità uniforme.

121. Le dette linee $787\frac{1}{2}$ sono pollici 65 . 7; che io dirò $= m$; e si cerchi l'altezza x dalla quale un grave cadendo liberamente acquista la velocità di scorrere un minuto secondo lo spazio m con moto uniforme .

122. In un minuto secondo un grave cade dall'altezza di piedi 15 . 1, ossia di pollici 181; ed acquista la velocità di scorrere in un altro secondo uniformemente uno spazio doppio, cioè pollici 362 . E perchè le velocità così acquistate dai gravi cadenti sono come le radici quadrate delle cadute, avremo perciò l'analogìa $\sqrt{181} : \sqrt{x} :: 362 : m$ d'onde si ha $x = \frac{m^2}{724} =$ (nel caso nostro) pollici 6, altezza dalla quale un grave cadendo liberamente acquista la velocità che ebbe l'acqua uscendo da F, essendo nel vaso superiore mantenuta all'altezza CR .

Sperienza VIII

123. Il diametro del foro F era stato fatto di linee $4\frac{1}{2}$. Il resto era come prima .

124. Empiti di nuovo i due vasi AC, NQ ed aperti indi i due fori E, F, anche questa volta sulle prime si ebbe del trabocco dall'orlo NO, il quale cessò allorchè l'acqua nel vaso superiore fu ridotta all'altezza CR sopra il fondo di linee 98.

125. Mantenendo l'acqua alla stessa altezza CR, l'acqua uscita da F in cinque secondi fece nel vaso GLMN l'altezza di linee 25 . Dunque in un secondo vi aveva fatto l'altezza di linee 5.

126. Perciò facendo $(4\frac{1}{2})^2 : 60^2 :: 5$ al quarto termine $888\frac{8}{9}$, sarà questa l'altezza in linee del cilindro di acqua uscita in un secondo dal foro F, la cui base sia lo stesso foro F del diametro di linee $4\frac{1}{2}$; sono pollici $74\frac{2}{27}$ il cui quadrato (122) diviso per 724 pollici come sopra, dà pollici $7\frac{1}{2}$, che è l'altezza dalla quale un grave cadendo può ac-

quistare la velocità dell'acqua pel foro F in questa sperienza; altezza maggiore dell'altezza NQ, che è di pollici 7.

Sperienza IX

127. Al foro F fu dato il diametro $4\frac{3}{4}$. Empiti per la terza volta i due vasi AC, NQ, ed aperti indi i fori E, F, non si ebbe trabocco dall'orlo NO, anzi il vaso sottoposto NQ non arrivò ad esser pieno del tutto, e presto in esso l'acqua calò sensibilmente. Si vede che se il vaso superiore fosse stato più alto in modo, che anche in questa sperienza si avesse avuto trabocco, l'acqua indi al cessare del trabocco si sarebbe ridotta a una altezza CR maggiore dell'altezza del vaso, che era alto linee 156, d'onde viene, che la velocità per F sarebbe stata sempre maggiore, che nelle due sperienze precedenti.

Conseguenze.

128. Perchè nella *sperienza VIII* la velocità pel foro F fu quella di un grave caduto dall'altezza di pollici $7\frac{1}{2}$ (126), e l'altezza del vaso NQ è di soli 7 pollici, sarà questa, per quanto io sappia, la prima sperienza nella quale la velocità dell'acqua pel foro nel fondo di un vaso cilindrico mantenuto sempre pieno, sia stata maggiore dell'acquistata da un grave caduto liberamente dall'altezza del vaso, e sarà questa una sperienza, che M. *Bernard* non se la sarebbe forse aspettata mai.

129. E non meno è da dirsi, che l'Autore non si sarebbe aspettato mai le tre ultime sperienze, nelle quali al crescere del foro nel fondo del vaso le velocità sono state maggiori, conchè si oppongono diametralmente alla sua formola fondamentale $v = a + \frac{ab}{y}$, e vi si oppongono con divarj assai notabili.

130

130. Infatti nella *sperienza VII* il diametro del fondo assoluto y era di linee 5, e quello del foro F era di linee 4 (115), onde facendo $5^2 : 4^2 :: y$ al quarto termine $\frac{16y}{25}$, sarà questo l'aja del foro F, la quale tolta dal fondo assoluto y lascia il fondo reale $b = \frac{9y}{25}$, e perciò $\frac{b}{y} = \frac{9}{25}$, e $v = a + \frac{ab}{y} =$ linee $84 + 84 \times \frac{9}{25} =$ linee $114 \frac{16}{25}$, velocità in questo caso di M. *Bernard*, e la velocità della sperienza è stata di linee $787 \frac{1}{2}$ (120).

131. Nella *sperienza VIII* il diametro del foro F era di linee $4 \frac{1}{2}$. Facendo $5^2 : (4 \frac{1}{2})^2 :: y$ al quarto termine $\frac{(4 \frac{1}{2})^2 \cdot y}{25} = \frac{20 \frac{1}{4} \cdot y}{25}$, sarà questo la nuova aja del foro F, la quale tolta dal fondo assoluto y lascia il fondo reale $b = \frac{4 \frac{3}{4} y}{25}$, onde $\frac{b}{y} = \frac{4 \frac{3}{4}}{25} =$ linee 108, velocità di M. *Bernard*, dovechè la sperienza ha dato linee $888 \frac{8}{9}$ (126).

132. E se nella *sperienza IX* il vaso superiore fosse stato alto abbastanza, si vedrebbe la velocità di M. *Bernard* sempre più lontana dalla velocità della sperienza (127).

133. Il nominato Sig. *Gozzi* col comodo del corredo della mia Scuola d'Idraulica, veduto il successo delle descritte *sperienze VII, VIII, IX*, me ne ha fatto altre quattro consimili, le quali anche perchè eseguite con un vaso più largo servir possono per una buona conferma delle precedenti.

134. In luogo del vaso cilindrico NQ (*Fig. VI*) del diametro di linee 5 (115) qui abbiamo il vaso cilindrico PQSR (*Fig. VII*) del diametro di linee 17.

135. Il vaso superiore ABCD ha la bocca del diametro AB di pollici 30, ed il fondo del diametro DC di pollici $25 \frac{1}{2}$.

136. AED è un cannello comunicante col vaso, ed es-

sendo colla parte Am di vetro serve per indicare le altezze della superficie dell'acqua dentro il vaso superiore V.

137. Nel mezzo del fondo DC havvi un foro HI del diametro di linee 17, cioè eguale al diametro del vaso cilindrico sottoposto PQSR. Lo stesso foro HI è armato di un tubo addizionale HILM, ed inoltre è armato di un imbuto interno FHIO per ottenere l'uscita dell'acqua per ML a bocca piena.

138. Le altre misure sono

AE = pollici 30
HM = linee 35
TH = linee 17
PR = pollici sei.

Sperienza X

139. Essendo il diametro del foro *ab* di linee 15 $\frac{1}{2}$ furono empiti con acqua i due vasi V, Z. Poi aperti i due fori ML, *ab*, l'acqua da principio empiva il vaso inferiore, ed anzi traboccava dall'orlo NO, però sempre meno. Al cessare del trabocco la superficie dell'acqua nel vaso superiore si trovava a pollici 6 $\frac{1}{2}$ sopra il fondo DC. Coll'aggiungere nuova acqua fu mantenuta la superficie a quell'altezza costantemente per 55 minuti secondi, nel qual tempo uscirono pel foro *ab* pollici cubi 5488 di acqua.

140. Mettendo con *Archimede*, che il quadrato del diametro all'aja del circolo stia come 14 a 11, trovo l'aja del foro *ab* di linee quadrate 188, 767, ossia (dividendo per linee quadrate 144 componenti un pollice quadrato) di pollici quadrati 1, 3108.

141. Dividendo poi i pollici cubi 5488 (139) pei 55 minuti secondi, si hanno pollici cubi 99, 781 d'acqua uscita pel foro *ab* in un minuto secondo con velocità uniforme. E questi, divisi per la trovata aja del foro, danno pollici 76, 122, altezza del cilindro di acqua uscito per *ab* della ba-

se eguale al foro in ognuno dei detti 55 minuti secondi, che sono lo spazio da scorrersi in un minuto secondo uniformemente da un corpo, che si muova colla velocità dell'acqua pel foro *ab*, ridotta all'uniformità.

142. Il quadrato del detto spazio di pollici 76, 122, diviso per 724 (122) dà pollici 8, altezza dalla quale un grave cadendo liberamente acquista la velocità, ch'ebbe l'acqua pel foro *ab* nel fondo del vaso cilindrico PQSR mantenuto pieno aggiungendovi acqua affetta della velocità stessa dell'acqua nel vaso (112), del quale l'altezza era di soli pollici 6, (138).

Sperienza XI

143. Il diametro del foro *ab* era di linee 16. Il resto era come qui sopra. Empiti i due vasi V, Z con acqua, ed aperti i fori, l'acqua, che da principio sormontava l'orlo NO, cessò di traboccare quando la superficie dell'acqua nel vaso superiore V si trovò sopra il fondo DC pollici 10.4. Aggiungendo nuova acqua fu mantenuta quella superficie alla medesima altezza 55 minuti secondi; in ognuno de' quali uscirono per *ab* pollici cubi di acqua 121, 769. Questi divisi per l'aja del foro *ab*, (che era di pollici 1, 396) danno pollici 87,222 altezza di un cilindro d'acqua uscita uniformemente per *ab* in un minuto secondo. Il quadrato di quest'altezza diviso per 724 dà pollici 10.5, altezza, dalla quale un grave cadendo acquista la velocità dell'acqua per *ab* ridotta alla uniformità (122).

Sperienza XII

144. Essendo il foro *ab* largo linee 16 $\frac{1}{2}$ furono riempiti i vasi con acqua. Aperti i fori, l'acqua cessò di traboccare allorchè la superficie nel vaso superiore fu a pollici 13 $\frac{1}{2}$ sopra il fondo IX. Mantenuta con tale altezza per 55 minuti

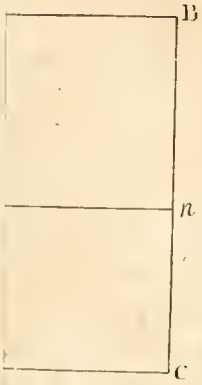
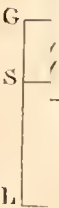
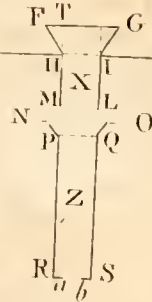
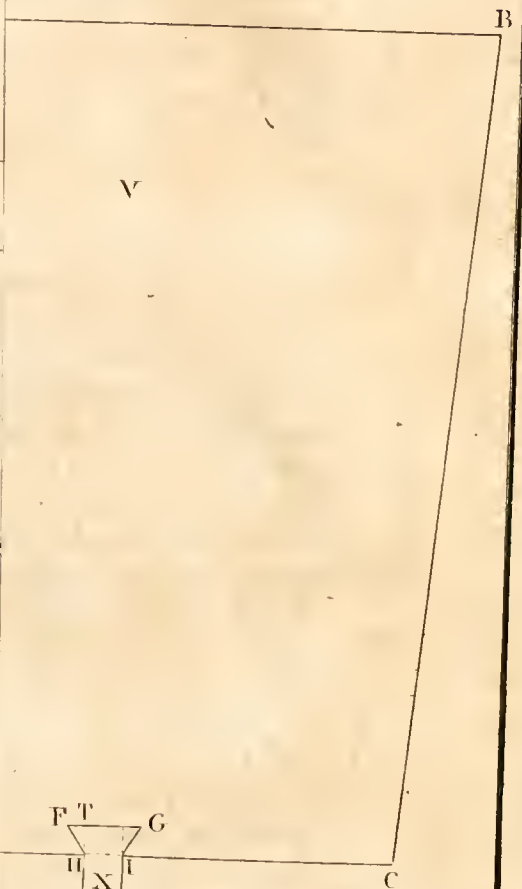
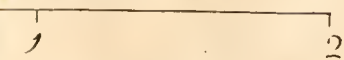
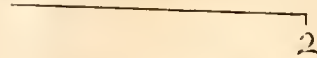
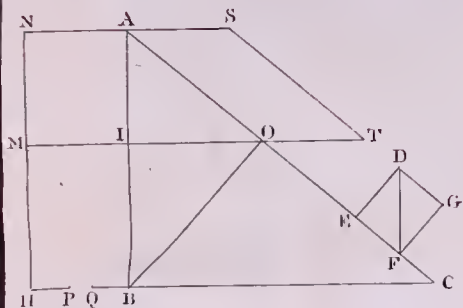
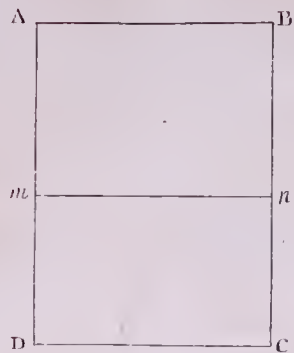
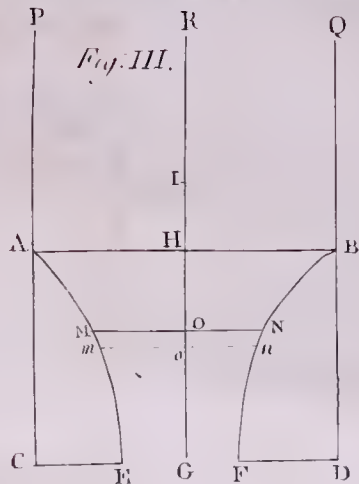
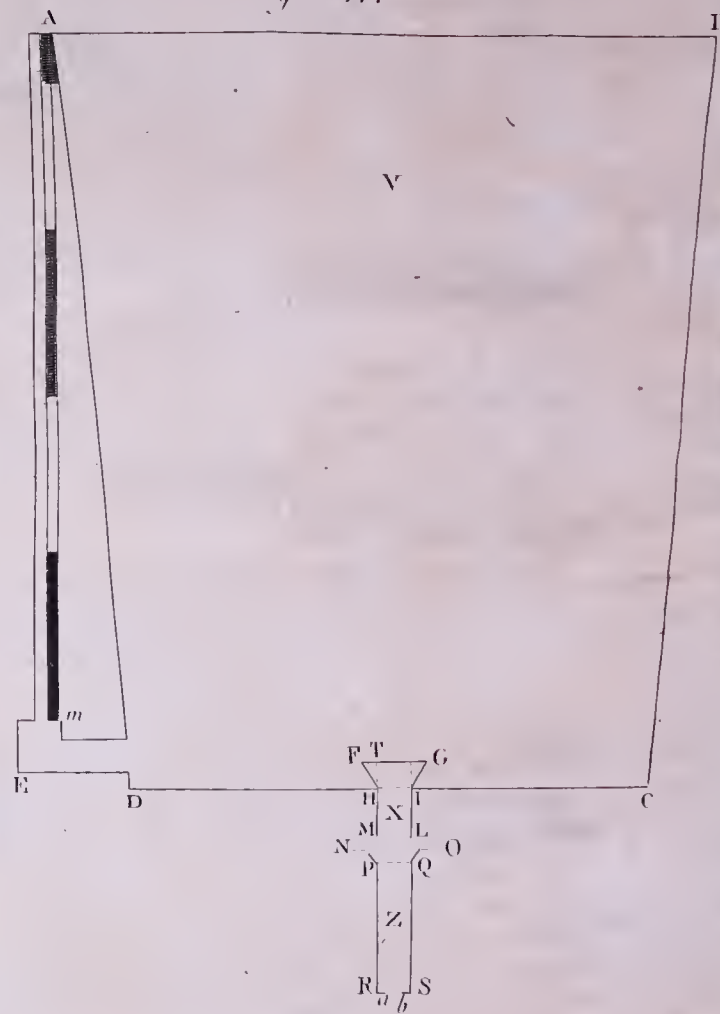
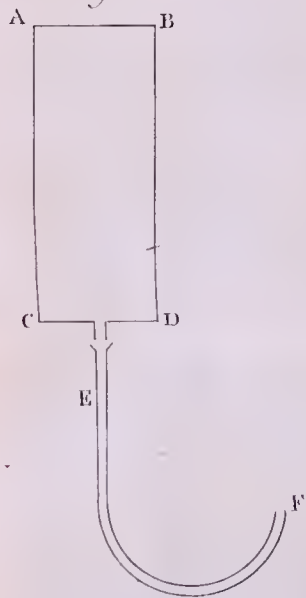
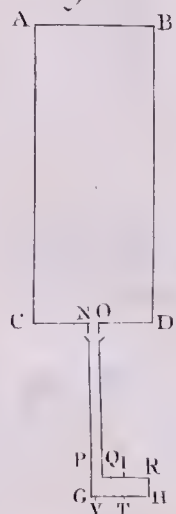
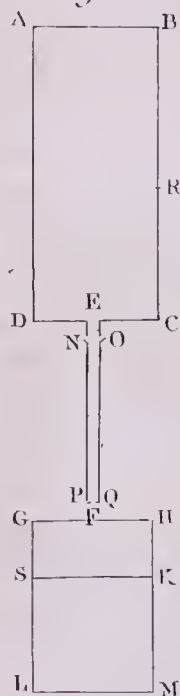
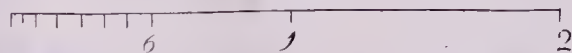
secondi si ebbero dal foro *ab* pollici cubi di acqua 143, 344 in ogni secondo; i quali divisi per l'aja del foro (che era di pollici 1, 485) danno pollici 96, 528, altezza del cilindro di acqua uscita per *ab* in un minuto secondo. Quadrando, e dividendo per 724 (122) si hanno pollici 12, 8 altezza competente alla velocità dell'acqua per *ab* in questa sperienza.

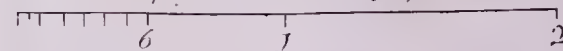
Sperienza XIII

145. Il diametro del foro *ab* era di linee 16 $\frac{3}{4}$. Operando come sopra, il trabocco cessò quando la superficie nel vaso V fu a pollici 16, 4 sul fondo. Mantenuta tale altezza durante il tempo di 55 minuti secondi, in ognuno di questi uscirono per *ab* pollici cubi 156, 581 di acqua. Dividendo per pollici 1, 530 (aja del foro) si hanno pollici 102, 28 altezza del cilindro di acqua uscito per *ab* in un minuto secondo. Quadrando, e dividendo per 724 (122) avremo pollici 14, 4, altezza d'onde un grave acquista la velocità dell'acqua di questa sperienza pel foro *ab*.

Conseguenze.

146. L'altezza del vaso di queste quattro sperienze era di soli 6 pollici (138); ed intanto nella sperienza X essendo il foro largo linee 15 $\frac{1}{2}$, si è avuta per esso la velocità competente all'altezza di pollici 8 (142); cioè quella, che può acquistare un grave cadendo dall'altezza di pollici 8; nella *sperienza XI* essendo il foro largo linee 16 la velocità per esso è stata la competente all'altezza di pollici 10, 5 (143); nella *sperienza XII* essendo il foro largo linee 16 $\frac{1}{2}$, la velocità è stata quella, che compete all'altezza di pollici 12, 8 (144); e nella *sperienza XIII* essendo il foro largo linee 16 $\frac{3}{4}$ si è avuta la velocità competente all'altezza di pollici 14, 4 (145), il che conferma più che abbastanza:

1.° Che per un foro nel fondo di un vaso cilindrico,

P
Fig II
Fig.
Fig. VII.
B
A
n
M
m
C
E
V
B
A
B
D
D
F T G
H I
X
M L
N O
P Q
Z
R S
a b
C
L R
F H
G
S
L
di 2 di Parigi
IV, V, e VI.
1
2
di Parigi per la Fig VII.
2

Scala di piedi 2 di Parigi per le Fig. IV, V, e VI.

Scala di piedi 2 di Parigi per la Fig. VII.

6 1 2

mantenuto sempre pieno di acqua, si possono avere benissimo delle velocità sensibilmente maggiori di quella di un grave caduto liberamente dall'altezza dello stesso vaso.

2.° Che crescendo il foro, la velocità cresce; con che resta provato colla stessa sperienza la totale insussistenza della formola $v = a + \frac{ab}{y}$ risultante dai nuovi principj d'Idraulica di M. *Bernard*; cosa, che non recherà meraviglia a chi avrà veduto le mie *riflessioni I*, e *II*, colle quali mostro, che tai principj sono assai male stabiliti, e che anzi sono da dirsi assurdi.

Dimostrazione promessa al N.° 77.

La z del *Bernoulli* è l'altezza d'onde un grave cadendo liberamente acquista la velocità dell'acqua per un foro EF (*Fig. III*) nel fondo di un vaso cilindrico AB dell'altezza $= a$ mantenuto sempre pieno. La stessa altezza z giusta il *Newton* è l'altezza IG trovata al n.° 67 $= \frac{ay^2}{2by - b^2}$. Mettendo in luogo della y sezione del vaso, la h del *Bernoulli*, e mettendo in luogo di $y - b$, aja del foro, la m pure del *Bernoulli*, si trova che anche giusta il *Newton* deve essere $z = \frac{h^2 . a}{h^2 - m^2}$.

SU LA FORMOLA DI DOUWES

PER RITROVARE IN MARE LA LATITUDINE CON DUE ALTEZZE DEL SOLE PRESE FUORI DEL MERIDIANO

RIFLESSIONI

Del fu Sig. Ab. Giuseppe Cassella

Presentate dal Sig. Ab. Chiminello li 15 *Dicembre* 1807

Ed esaminate dal Socio Sig. Cossali.

1. La formola di *Douwes* per ritrovare in Mare la latitudine per mezzo di due altezze del Sole fuori del Meridiano, d'uso frequentissimo in Navigazione ha attirato a sè l'attenzione degli Astronomi, e di più uomini di merito, a cercare il più vantaggioso sviluppo della medesima. Troppo lungo sarebbe l'annoverare le particolari vedute, sparse qua, e là ne' libri Astronomici, onde ciascuno s'è ingegnato, ora in un modo, ora in un altro, o di perfezionare il metodo proposto dal *Douwes*, o di facilitarne la pratica in mare. Da alcuni s'è data la dimostrazione della formola seguendo differenti tracce, da quelle che io propongo in questo Opuscolo. La dimostrazione che mi s'è presentata, maneggiando con industria, e con profitto le formole Trigonometriche, merita considerazione per un doppio vantaggio: I.° perchè essendo tutt' analitica, non ha bisogno di figura alcuna per seguirne il filo: II.° perchè modificando diversamente gli stessi metodi analitici, de' quali mi valgo, sono giunto ad avere una seconda formola, da quella di *Douwes* differente, ed insieme alcune utilissime pratiche per gli usi Nautici.

2. Indichi A la maggior altezza del Sole, cui corrisponda il minore angolo orario h: a l'altezza minore, cui corri-

sponda l'angolo orario maggiore H; e chiamando L. la latitudine stimata del vascello; d la distanza del Sole al Polo; e D. la declinazione ☼; e facendo finalmente $L. + d = N$; si troverà, com'è noto, l'angolo orario H colla formola $\text{sen.}\frac{H}{2} = \sqrt{\frac{\cos.\frac{N+a}{2} \times \text{sen.}\frac{N-a}{2}}{\cos.L. \times \cos.D.}}$; e l'altro angolo orario h colla formola seguente $\text{sen.}\frac{h}{2} = \sqrt{\frac{\cos.\frac{H+A}{2} \times \text{sen.}\frac{N-A}{2}}{\cos.L.\ \cos.D.}}$. Si prenda la differenza delle due formole, alzandole prima a quadrato, e si avrà (R) $\text{sen.}^2\frac{H}{2} - \text{sen.}^2\frac{h}{2} =$
$\frac{\cos.\frac{N+a}{2}.\,\text{sen.}\frac{N-a}{2} - \cos.\frac{N+A}{2}.\,\text{sen.}\frac{N-A}{2}}{\cos.L.\ \cos.D.}$.

3. Ora per le formole Trigonometriche, essendo $\text{sen.}^2\frac{H}{2} - \text{sen.}^2\frac{h}{2} = \text{sen.}\frac{H+h}{2} \times \text{sen.}\frac{H-h}{2}$; come anche $\cos.\frac{N+a}{2} \times \text{sen.}\frac{N-a}{2} = \frac{1}{2}\text{sen.}N - \frac{1}{2}\text{sen.}a$; e $\cos.\frac{N+A}{2}.\,\text{sen.}\frac{N-A}{2} = \frac{1}{2} \times \text{sen.}N - \frac{1}{2}\text{sen.}A$: sostituendo nell'equazione (R) n.° 2 sarà $\text{sen.}\frac{H+h}{2}.\,\text{sen.}\frac{H-h}{2} = \frac{\frac{1}{2}\text{sen.}N - \frac{1}{2}\text{sen.}a - \frac{1}{2}\text{sen.}N + \frac{1}{2}\text{sen.}A}{\cos.L.\ \cos.D.}$; vale a dire per essere $H - h$ il tempo scorso tra le due osservazioni delle altezze, che chiamo T; $\text{sen.}\frac{H+h}{2}.\,\text{sen.}\frac{T}{2} = \frac{\frac{1}{2}\text{sen.}A - \frac{1}{2}\text{sen.}a}{\cos.L.\ \cos.D.}$; vale a dire $\text{sen.}\frac{H+h}{2} = \frac{\frac{1}{2}\text{sen.}A - \frac{1}{2}\text{sen.}a}{\cos.L.\ \cos.D.\ \text{sen.}\frac{1}{2}T.}$, e finalmente per essere $\frac{1}{2}\text{sen.}A - \frac{1}{2}\text{sen.}a = \cos.\frac{A+a}{2} \times \text{sen.}\frac{A-a}{2}$; $\text{sen.}\frac{H+h}{2} =$
$\frac{\cos.\frac{A+a}{2}.\,\text{sen.}\frac{A-a}{2}}{\cos.L.\cos.D.\,\text{sen.}\frac{1}{2}T.}$ ch'è la nota formola di *Douwes*.

4. Si perviene allo stesso risultato in altra maniera. È pel n.° 2 (R) $\text{sen.}^2\frac{H}{2} - \text{sen.}^2\frac{h}{2} = \frac{\cos.\frac{N+a}{2}.\text{sen.}\frac{N-a}{2} - \cos.\frac{N+A}{2}.\text{sen.}\frac{N-A}{2}}{\cos.L.\ \cos.D.}$;

o ch'è lo stesso $\left(\text{sen.}\frac{H}{2}+\text{sen.}\frac{h}{2}\right).\left(\text{sen.}\frac{H}{2}-\text{sen.}\frac{h}{2}\right)=$ $\dfrac{\cos.\frac{N+a}{2}.\text{sen.}\frac{N-a}{2}-\cos.\frac{N+A}{2}.\text{sen.}\frac{N-A}{2}}{\cos.L.\cos.D.}$. Ora si sa per le formole Trigonometriche, che $\left(\text{sen.}\frac{H}{2}+\text{sen.}\frac{h}{2}\right)\times\left(\text{sen.}\frac{H}{2}-\text{sen.}\frac{h}{2}\right)=$
$2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{2}\right)\times\cos.\left(\frac{H-h}{2}\right)\times 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\left(\frac{H-h}{2}\right)\times\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{2}\right)=$
$2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{2}\right).\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{2}\right).\times 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\left(\frac{H-h}{2}\right)\times\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{H-h}{2}\right)=$
$2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{2}\right).\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{2}\right)\times 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)\times\cos.\frac{1}{2}\left(\frac{T}{2}\right)=$
$\text{sen.}\frac{H+h}{2}\times\text{sen.}\frac{T}{2}$. Quindi sostituendo nella formola (R) sarà $\text{sen.}\frac{H+h}{2}.\text{sen.}\frac{T}{2}=\dfrac{\cos.\frac{N+a}{2}.\text{sen.}\frac{N-a}{2}-\cos.\frac{N+A}{2}.\text{sen.}\frac{N-A}{2}}{\cos.L.\cos.D.}$;

e finalmente $\text{sen.}\frac{H+h}{2}=\dfrac{\cos.\frac{N+a}{2}.\text{sen.}\frac{N-a}{2}-\cos.\frac{N+A}{2}.\text{sen.}\frac{N-A}{2}}{\cos.L.\cos.D.\text{sen.}\frac{T}{2}}$;

la stessa, che al n.° 3 diversamente modificata.

5. Siccome prendendo la differenza tra le due formole n.° 2, che servono a trovare gli angoli orarj H, e h s'è pervenuto dopo diverse modificazioni al risultato del n.° 3, e 4, ch'è la formola di *Douwes*, così una nuova formola mi s'è presentata moltiplicando l'istesse quantità, che potranno servire in altre occasioni, anche alla pratica. Di fatti facendo la moltiplicazione, si avrà $\text{sen.}\frac{H}{2}.\text{sen.}\frac{h}{2}=\frac{1}{\cos.L.\cos.D.}\times$ $\sqrt{\cos.\frac{N+a}{2}.\text{sen.}\frac{N-a}{2}.\cos.\frac{N+A}{2}.\text{sen.}\frac{N-A}{2}}$; cioè a dire $\frac{1}{2}\cos.\frac{H-h}{2}-\frac{1}{2}\cos.\frac{H+h}{2}=\frac{1}{\cos.L.\cos.D.}\times$
$\sqrt{\cos.\frac{N+a}{2}.\text{sen.}\frac{N-a}{2}.\cos.\frac{N+A}{2}.\text{sen.}\frac{N-A}{2}}$ o sia $\cos.\frac{H+h}{2}$
$=$

$$=\cos.\frac{T}{2}-\frac{2}{\cos.L.\cos.D.}\times\sqrt{\cos.\frac{N+a}{2}.\text{sen}.\frac{N-a}{2}.\cos.\frac{N+A}{2}.\text{sen}.\frac{N-A}{2}};$$

formola che differisce dalla prima trovata al n.° 3.

6. Per risolvere facilmente il Problema coll' ajuto de' Logaritmi applicati alla precedente formola, si faccia $\frac{2}{\cos.L.\cos.D}$.

$\sqrt{\cos.\frac{N+a}{2}.\text{sen}.\frac{N-a}{2}.\cos.\frac{N+A}{2}.\text{sen}.\frac{N-A}{2}}=\cos.\frac{V}{2}$; e si trovi la quantità $\frac{V}{2}$. Allora la formola al n.° 5 diventa $\cos.\frac{H+h}{2}$

$=\cos.\frac{T}{2}-\cos.\frac{V}{2}$; ovvero per le formole Trigonometriche

$\cos.\frac{H+h}{2}=2\,\text{sen}.\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2}-\frac{T}{2}\right)\times\text{sen}.\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2}+\frac{T}{2}\right)$; la quale com' è chiaro, si risolve anche facilmente coll' ajuto de' Logaritmi; e per conseguenza si viene in cognizione della quantità $\frac{H+h}{2}$.

7. Prendendo la differenza de' seni $\frac{H}{2}$, e $\frac{h}{2}$, e moltiplicando i medesimi, siamo ormai pervenuti a due formole differenti sì, ma che conducono, sebbene non colla stessa facilità al medesimo fine. Ma le formole nè sono così facili, nè così conducenti, sommando, o dividendo gli stessi seni $\frac{H}{2}$, e $\frac{h}{2}$: quindi è che per ora ne curo poco lo sviluppo. Una seconda riflessione però egualmente interessante a farsi su le passate formole è, che la stessa quantità $\frac{H+h}{2}$ si trova coll' ajuto de' seni al n.° 3, e seguenti; ed in altra guisa coll' ajuto de' coseni al n.° 5, e 6, le quali formole com' è noto, non hanno gli stessi vantaggi. In certe date altezze del Sole, ed in date latitudini, gioverà servirsi della prima formola a preferenza della seconda: siccome viceversa in altre gioverà di servirsi della seconda a preferenza della prima. La brevità che mi ho prefisso di dare a questo piccolo Opu-

scolo, non permette che io mi dilunghi di vantaggio su di questo argomento.

8. Noti i valori $\frac{H+h}{2}$, e $\frac{H-h}{2}=\frac{T}{2}$ si troverà facilmente o H, o h, ed in segnito si viene in cognizione dell' altezza meridiana del Sole, con una delle due ormai note formole.

I.ª Sen. altezza meridiana del ☼ = sen. verso h. cos. L $\times$ cos. D. + sen. A.

II.ª Sen. altezza meridiana del ☼ = sen. verso H cos. L $\times$ cos. D. + sen. a: le quali due formole non sono egualmente conducenti al desiderato fine; essendosi già dimostrato, che colla maggiore altezza del Sole, e coll' ajuto dell' angolo orario più piccolo, si ottiene più presto la soluzione del Problema. Le formole però Trigonometriche mi presentano una maniera e più spedita, e più facile di trovare l' altezza meridiana del Sole richiesta, la quale fatto il confronto coll' antica maniera, ci fa conoscere la preferenza di questa nostra su di quella.

9. Di fatti la prima formola n.° 8, chiamando l' altezza del Sole meridiana ☼, diviene sen. ☼ — sen. A = sen. verso $h \times$ cos. L. cos. D. = 2 sen.$^2 \frac{h}{2}$. cos. L. cos. D. Questa per i principj della Trigonometria passa nell' altra

$$2 \text{ Sen. } \frac{☼-A}{2} \text{ . cos. } \frac{☼+A}{2} = 2 \text{ sen.}^2 \frac{h}{2} \text{. cos.L. cos. D,}$$ ed anche

$$\text{sen. } \frac{☼-A}{2} = \frac{\text{sen.}^2 \frac{h}{2} \text{ . cos. L. cos. D.}}{\text{cos. } \frac{☼+A}{2}}$$; la quale si può trattare facilmente coi Logaritmi, e mi apre la strada, come si è avvertito, all' invenzione di alcune facili, ed utili pratiche per gli usi nautici; oltre ai grandi vantaggi, che così espressa ne derivano, dedotti dal fondo stesso della natura delle linee, e delle formole Trigonometriche: del che però non è questo il luogo di ragionare.

10. In breve il tutto si riduce a questa pratica. Supposta ad arbitrio un' altezza meridiana del Sole $\odot$, la quale generalmente parlando sempre sarà più grande della maggiore altezza osservata A, sostituendo la quantità supposta $\odot$ nella formola $\text{sen.}\,\frac{\odot' - A}{2} = \frac{\text{sen.}^2\,\frac{h}{2}\,.\,\cos.\,L.\,\cos.\,D.}{\frac{\cos.\,\odot + A}{2}}$, si avrà un' altra altezza meridiana del Sole, che chiamo $\odot'$, la quale se sarà eguale alla supposta, il Problema è risoluto. In caso contrario l' altezza corretta $\odot'$, si sostituisca per la seconda volta nella stessa formola così modificata $\text{sen.}\,\frac{\odot'' - A}{2} = \frac{\text{sen.}^2\frac{h}{2}.\cos.\,L.\,\cos.\,D.}{\frac{\cos.\,\odot' + A}{2}}$; e si trovi una seconda altezza corretta $\odot''$, la quale se non è eguale a $\odot'$, se ne trovi una terza, e così di seguito fino a che la supposta non differisca dalla calcolata, che di 4, in 5 minuti. Debbo avvertire, ch' è tale l' attività della formola, che dopo la prima, e la seconda operazione, si giunge al desiderato fine, e vi si giunge con molta facilità. Facendo il confronto di questo nostro metodo coll' ordinario, che si adopra in mare, si vede facilmente che il nostro deve preferirsi a quello. Dappoichè nell' ordinario modo, trovata l' altezza meridiana del Sole, che risulta dal calcolo molto più imbarazzante del primo, deve con essa trovarsi la latitudine, la quale diviene così corretta: indi con questo nuovo dato s' incomincia da capo un calcolo tedioso. Qualche esempio metterà la cosa sotto gli occhi più chiaramente; donde anche si potranno rilevare altri vantaggi, che non posso far conoscere in questo scritto.

11. Esempio I. In una latitudine in mare stimata di 46°. 50' Nord, sia la declinazione del Sole D. 11°. 17' Bor.; l' altezza *a* del Sole corretta siasi trovata di 46°. 55', a 10$^{or.}$. 2' su la mostra, e l' altezza A siasi ritrovata di 54°. 9' a 11$^{or.}$. 27' su la medesima mostra. Si cerca la latitudine del vascello.

Scelgo la prima formola al n.° 8, la quale al n.° 9 è divenuta $\text{sen.}\frac{☼-A}{2}=\frac{\text{sen.}^2\frac{h}{2}.\cos.L.\cos.D.}{\cos.\frac{☼+A}{2}}$; e prima di tutto trovo la quantità $\frac{H+h}{2}$, e per conseguenza h colla formola al n.° 3. Quindi si ha $\log.\text{sen.}\frac{H+h}{2}=9.5107280$, cui nelle tavole corrisponde l'arco $18°.54'$. Perciò $\frac{H+h}{2}=18°.54'$; è poi $\frac{H-h}{2}=\frac{T}{2}=\frac{1^{or}.25'}{2}=42'30''=10°.37'30''$ in parti dell' Equatore; per conseguenza $h=\left(\frac{H+h}{2}\right)-\left(\frac{H-h}{2}\right)=8°.16'30''$; ed $\frac{h}{2}=4°.8'15''$. Finalmente si avrà per la formola

$2.\text{Log.sen.}\frac{h}{2}=4°.8'15''=$		7.7164756
$+\text{Log.cos.L.}=46°.50'$	=	9.8351350
$+\text{Log.cos.D.}=11°.17'$	=	9.9915240
Log. Costante.		7.5431346

12. Si supponga ora l'altezza meridiana del Sole $54°.11'$, cioè $2'$ più grande di $A=54°.9'$: e sarà $\frac{☼+A}{2}=\frac{54°.11'+54°.9'}{2}=54°.10'$: si avrà

Log. costante 2°.10	7.5431346
Comp. arit. Log. $\cos.\frac{☼+A}{2}=54°.10'$	0.2325254
Log. $\text{sen.}\frac{☼'-A}{2}=20'.31''$	7.7756600

Per conseguenza $\frac{☼'-A}{2}=20'31''$, e $☼'-A=41'2''$; e finalmente $☼'=41'2''+54°.9'=54°.50'$. Ma si è supposta l'altezza meridiana $54°.11'$; quindi essendovi differenza, deve farsi una nuova ipotesi, introducendo nel calcolo l'altezza meridiana corretta, or ora trovata $54°.50'$.

13. Fatta perciò l'altezza meridiana del Sole $54^\circ . 50'$, sostituendo s'avrà $\frac{☼' + A}{2} = \frac{54^\circ . 50' + 54^\circ . 9'}{2} = 54^\circ . 29' 30''$.

Quindi Log. costante	7.5431346
Comp. arit. Log. cos. $54^\circ . 29' 30''$	0.2359574
Log. sen. $\frac{☼'' - A}{2} = 20' 40''$	7.7790920

Perciò $\frac{☼'' - A}{2} = 20' 40''$, e $☼'' - A = 41' 20''$, e per conseguenza $☼'' = 54^\circ . 9' + 41' 20'' = 54^\circ . 50' 20''$, la quale altezza meridiana conviene colla supposta, ed è la vera. È facile a dedurre da questa altezza meridiana $54^\circ . 50'$ la latitudine del vascello, che si trova di $46^\circ . 27'$ differente dalla stimata di $23'$.

14. Se poi voglia mettersi a cimento l'altra formola notata al n.° 6, si vedrà nel nostro esempio il vantaggio della passata soluzione, su di quest'altra, restando confermato quanto s'è accennato al n.° 7. Siano gli stessi dati $A = 54^\circ . 9'$: $a = 46^\circ . 55'$; $D. = 11^\circ . 17'$ Bor.; $L. = 46^\circ . 50'$ Bor.: sarà $d = 90^\circ - (11^\circ . 17') = 78^\circ . 43'$ e $N = L. + d = 125^\circ . 33'$; $\frac{N + a}{2} = 86^\circ . 14'$; $\frac{N - a}{2} = 39^\circ . 19'$; $\frac{N + A}{2} = 89^\circ . 51'$; $\frac{N - A}{2} = 35^\circ . 42'$; e per conseguenza Log. cos. $\frac{V}{2} = 8.3760626$; e quindi $\frac{V}{2} = 88^\circ \, 38' \, 16''$: così poi si avrà $\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2} - \frac{T}{2}\right) = 39^\circ . 0' 22''$, e $\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2} + \frac{T}{2}\right) = 49^\circ . 37' 52''$; e Log. cos. $\frac{H + h}{2} = 9.9818513$; onde $\frac{H + h}{2} = 16^\circ . 26' 50''$. Coll'altra soluzione n.° 11 s'è trovato $\frac{H + h}{2} = 18^\circ . 54' 0''$. Proseguendo innanzi l'operazione, si ha $\frac{h}{2} = 5^\circ . 49' 20''$. E sostituendo nella formola $\text{sen.} \frac{☼ - A}{2} = \frac{\text{sen.}^2 \frac{h}{2} \text{cos.L.cos.D}}{\text{cos.} \frac{☼ + A}{2}}$,

si avrà, supposto $\odot = (54^\circ . 11')$, $\frac{\odot' - A}{2} = 10' 10''$; e $\odot' = 54^\circ . 9' + 20' 20'' = 54^\circ . 29' 20''$. Nella seconda operazione si rinviene $\odot'' = 54^\circ . 29' 24''$; e non si arriverà che lentissimamente alla richiesta altezza meridiana del Sole. Dal che per conseguenza ricavo, che giova nel caso del nostro esempio, di servirsi del metodo spiegato al n.° 2, e 3, a preferenza dell'altro spiegato al n.° 5, e 6.

15. ESEMPIO II. Sia la latitudine del vascello stimata sul mare $52^\circ . 50'$ Nord: la declinazione del Sole $D. = 14^\circ . 0'$ Bor.: siasi trovata l'altezza a dal centro del Sole corretta $41^\circ . 33'$ a $9^{or.} . 30' 0''$ su la mostra; e l'altra altezza corretta dal centro del Sole A siasi trovata $50^\circ . 1'$ a $10^{or.} . 0' 0''$, su la medesima mostra. Si cerca la vera latitudine del vascello.

Pel n.° 3 fatte le opportune sostituzioni, si avrà

Log. sen. $\frac{H+h}{2} = 9.6483559$, cui corrisponde l'arco $26^\circ . 25' 20''$.

Quindi $\left(\frac{H+h}{2}\right) - \left(\frac{H-h}{2}\right) = h = 26^\circ . 25' 20'' - 11^\circ . 15' = 15^\circ . 10'$;

e $\frac{h}{2} = 7^\circ . 35'$.

16. Si supponga ora l'altezza meridiana del Sole $51^\circ . 30'$ maggiore di $A = 50^\circ . 1'$, e si avrà pel n.° 9

2 . Log. sen. $\frac{h}{2} = 7^\circ 35'$	8 . 2409376
+ Log. cos. $L. = 52^\circ 50'$	9 . 7811344
+ Log. cos. $D. = 14^\circ\ 0'$	9 . 9869041
Log. costante	8 . 0089761
Comp. arit. Log. cos. $\frac{\odot + A}{2} = 50^\circ 45' 30''$	0 . 1988758
Log. sen. $\frac{\odot' - A}{2} = 55^\circ 29'$	8 . 2078519

Quindi $\frac{\odot' - A}{2} = 55^\circ 29'$; e $\odot' - A = 1^\circ 50' 58''$; e $\odot' = 51^\circ 51' 58''$, perciò l'altezza meridiana del Sole dedotta dal calcolo è $51^\circ 52'$.

Ma si è supposta $51°30'$; quindi essendovi differenza, si faccia la seconda ipotesi dell'altezza meridiana del Sole di $51°52'$.

17. Essendo nella seconda ipotesi ☼$'=51°52'$, sarà $\frac{☼'+A}{2}=\frac{51°52'+50°1'}{2}=50°56'30''$. Facendo un secondo calcolo, si avrà

Log. costante n.° 16	8.0089761
Comp. arit. Log. cos. $\frac{☼'+A}{2}=50°56'30''$	0.2005827
Log. sen. $\frac{☼''-A}{2}=55'.42''$	8.2095588

Per conseguenza $\frac{☼''-A}{2}=55'42''$, e ☼$''-A=1°51'28''$; e ☼$''=51°52'28''$ che conviene colla supposta ☼$'=51°52'$, ch'è la vera. Da quest'altezza meridiana si deduce la latitudine vera del vascello $52°8'$ minore della stimata di $42'$.

18. Si risolva l'istesso problema colla formola al n.° 6. Facendo $A=50°1'$; $a=41°33'$; $D.=14°$ Bor.; $L.=52°50'$; sarà $d=90°-D.=90°-(14°0')=76°0'$; e $N=L.+d=128°50'$: $\frac{N+a}{2}=85°11'30''$; $\frac{N-a}{2}=43°38'30''$; $\frac{N+A}{2}=89°25'30''$; $\frac{N-A}{2}=39°24'30''$. Quindi per essere $\cos.\frac{V}{2}=\frac{2}{\cos.L.\cos.D.}\times\sqrt{\cos.\frac{N+a}{2}\times\text{sen}.\frac{N-a}{2}\times\cos.\frac{N+A}{2}\times\text{sen}.\frac{N-A}{2}}$ n.° 5, sarà Log. $\cos.\frac{V}{2}=8.8162451$; e per conseguenza $\frac{V}{2}=86°14'40''$. Si avrà poi (essendo $T=22°.30'$) $\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2}-\frac{T}{2}\right)=\frac{1}{2}(86°14'40''-11°15')$; $\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2}+\frac{T}{2}\right)=\frac{1}{2}(86°14'40''+11°15')$, cioè $\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2}-\frac{T}{2}\right)=\frac{74°59'40''}{2}=37°29'50''$; e $\frac{1}{2}\left(\frac{V}{2}+\frac{T}{2}\right)=\frac{97°29'40''}{2}=48°44'50''$. È poi pel n.° 6 $\cos.\frac{H+h}{2}=2\times\text{sen}.\frac{1}{2}\left(\frac{V-T}{2}\right)\times\text{sen}.\frac{1}{2}\frac{V+T}{2}$. Quindi, applicando i Log. alla solu-

zione, Log. cos. $\frac{H+h}{2} = 9.9614645$; e per conseguenza $\frac{H+h}{2} =$ $23^\circ 46' 50''$. Al n.° 15, si è trovato $\frac{H+h}{2} = 26^\circ 25' 20''$. Quindi $\frac{H+h}{2} - \left(\frac{H-h}{2}\right) = h = 23^\circ 46' 50'' - 11^\circ 15' = 12^\circ 31' 50''$; e $\frac{h}{2} =$ $6^\circ 15' 55''$.

19. Supposta ora come al n.° 16 l'altezza meridiana del Sole $51^\circ 30'$, si avrà

2 Log. sen. $\frac{h}{2} = 6^\circ 15' 55''$	8.0759036
Log. cos. L. $= 52^\circ 50'$	9.7811344
Log. cos. D. $= 14^\circ 0'$	9.9869041
Log. costante	7.8439421
Comp. arit. cos. $\frac{\odot + A}{2} = 50^\circ 45' 30''$	0.1988758
Log. sen. $\frac{\odot' - A}{2} = 37' 56''$	8.0428179

Quindi $\frac{\odot' - A}{2} = 37' 56''$, e per conseguenza $\odot' - A = 1^\circ 15' 52''$, o sia $\odot' = 50^\circ 1' + 1^\circ 15' 52''$; cioè l'altezza meridiana del Sole dedotta dal calcolo $51^\circ 16' 52''$. Ma si è supposta $51^\circ 30'$; essendovi differenza, si deve fare una seconda ipotesi.

20. Si supponga perciò l'altezza meridiana del Sole $51^\circ 17'$, si avrà

Log. costante n.° 19	7.8439421
Comp. arit. Log. cos. $\frac{\odot' + A}{2} = \frac{51^\circ 17' + 50^\circ 1'}{2} = 50^\circ 39'$	0.1978724
Log. sen. $\frac{\odot'' - A}{2} = 37' 51''$	8.0418145

Cioè $\frac{\odot'' - A}{2} = 37' 51''$; e $\odot'' - A = 1^\circ 15' 42''$; e $\odot'' = 1^\circ 15' 42'' +$ $50^\circ 1' = 51^\circ 16' 42''$, di alcuni secondi minore della supposta. Dal che si ricava, che l'ipotesi dell'altezza meridiana ricavata

vata dal calcolo è più piccola del dovere, e si deve anzi accrescere, per poterci accostare alla vera. Questo stesso ci dimostra la preferenza, che si deve dare alla prima formola su la seconda, per ritrovare la quantità $\frac{H+h}{2}$.

21. Convien fare qualche riflessione su le due passate soluzioni. E prima di tutto il nostro metodo non dà che la soluzione del Problema con molta approssimazione solamente, e con molta facilità ancora; lo che basta per la pratica. Secondo: l'esattezza, e la precisione dell'altezza meridiana del Sole dipendendo immediatamente dall'esattezza dell'angolo orario h, o H; mai questo può aversi esatto coll'ipotesi della latitudine stimata. Di fatti ne' nostri secondi calcoli, si trascura la modificazione dell'angolo orario, che si dovrebbe rettificare colla latitudine già corretta nel primo calcolo, per averne uno più esatto. Questa stessa ragione ci dovrà indurre a servirci, per ritrovare la quantità $\frac{H+h}{2}$, piuttosto della formola esposta al n.° 3, che dell'altra sviluppata al n.° 6; dandoci cioè la prima con più esattezza $\frac{H+h}{2}$, che la seconda; al che si aggiunga il merito d'una maggiore semplicità. Che se finalmente ad onta di tutto questo volesse uno valersi della formola al n.° 6, bisognerà sostituire agli esempj nella fine de' numeri (14, e 21), i logaritmi presi a rigore, e tener conto anche de' secondi ne' risultati del calcolo. Così lentissimamente si giungerà a ritrovare l'altezza meridiana richiesta. E nel caso che le quantità, che risultano dal calcolo, si allontanassero dalle supposte, l'istesso calcolo ci avvertirà della ipotesi da farsi, o maggiore, o minore, come s'è notato al fine del n.° 14.

22. Esempio III. *Sul mare in una latitudine a stima 7° 40' Nord, a 7^or. 25' 40" di mattina su la mostra s'è trovata l'altezza vera dal centro del Sole di 22° 30', e a 10^or. 31' 48", la seconda altezza del medesimo centro di 63° 40'. La declina-*

zione del Sole si è calcolata di $22^\circ 47'$ Bor., *si cerca la latitudine vera del Vascello.*

Essendo $A = 63^\circ 40'$; $a = 22^\circ 30'$; $L. = 7^\circ 40'$; $D = 22^\circ 47'$; $\frac{T}{2} = \frac{10^{or.} 31' 48'' - 7^{or.} 25' 40''}{2} = \frac{3^{or.} 6' 8''}{2} = 1^{or.} 33' 4''$; e in parti dell' Equatore $\frac{T}{2} = 23^\circ 16' 0''$. Fatte le opportune sostituzioni nella formola al n.° 3, si troverà Log. sen. $\frac{H+h}{2} = 9.8521200$, cui corrisponde nelle tavole l'angolo $\frac{H+h}{2} = 45^\circ 21'$. Per conseguenza si avrà $h = 45^\circ 21' - 23^\circ 16' = 22^\circ 5'$, ed $\frac{h}{2} = 11^\circ 2' 30''$.

23. Seguendo le stesse tracce, che ai n.[i] 11, e 16

2. Log. sen. $\frac{h}{2} = 11^\circ 2' 30''$	8.5644410
+ Log. cos. L. = $7^\circ 40'$	9.9961004
+ Log. cos. D. = $22^\circ 47'$	9.9647195
Log. costante	8.5252609

Supposta l'altezza meridiana del Sole $74^\circ 0'$, sarà $\frac{☼+A}{2} = 68^\circ 50'$; sostituendo nella formola al n.° 9 i valori rispettivi, si avrà

Log. costante	8.5252609
Comp. arit. Log. cos. $\frac{☼+A}{2} = 68^\circ 50'$	0.4423940
Log. sen. $\frac{☼'-A}{2} = 5^\circ 19' 30'' =$	8.9676549

Onde $\frac{☼'-A}{2} = 5^\circ 19' 30''$; e $☼' - A = 10^\circ 39' 0''$; e $☼' = 10^\circ 39' 0'' + 63^\circ 40' = 74^\circ 19'$; maggiore della supposta $74^\circ 0'$.

24. Fatta la seconda ipotesi dell'altezza meridiana $74^\circ 19'$, si avrà $\frac{☼'+A}{2} = \frac{74^\circ 19' + 63^\circ 40'}{2} = \frac{137^\circ 59'}{2} = 68^\circ 59' 30''$. Per cui

Log. costante n.° 23	8 . 5252609
Comp. arit. Log. cos. 68° 59′ 30″	0 . 4455063
Log. sen. $\frac{☼'' - A}{2} = 5° 21' 50''$	8 . 9707672

Cioè $\frac{☼'' - A}{2} = 5° 21' 50''$, o sia $☼'' - A = 10° 43' 40''$; e finalmente $☼'' = 10° 43' 40'' + 63° 40' = 74° 23' 40''$. La quale altezza meridiana differendo di circa 5′ dalla supposta può prendersi per la vera. La latitudine dedotta da quest'altezza meridiana è di 7° 11′; che differisce dalla stimata di 29′.

25. È chiaro che il metodo di trovare la latitudine del vascello per mezzo di due altezze del Sole, osservate fuori del Meridiano, poggia su l'artificio di conchiudere l'altezza meridiana del Sole coll'ajuto della maggiore altezza del medesimo, e col più piccolo angolo orario; ovvero colla più piccola altezza, e col più grande angolo orario. La formola al n.° 3 dandoci il valore dell'angolo orario medio $\frac{H + h}{2}$, sono pervenuto con artificj consimili a quei adoperati in quest'Opuscolo a due altre formole da non trascurarsi, le quali mi danno egualmente la soluzione del problema; profittando però del vantaggio dell' angolo medio, ch'entra necessariamente nel calcolo, e dell'altezza del Sole, che si trova aver rapporto, o di corrispondere a quest'angolo medio.

26. Facendo $\frac{H + h}{2} = M$; e per R (*) indicando una quantità, che si trova col calcolo di aver relazione coll'angolo orario medio M; e per ☼ l'altezza meridiana del Sole, che si cerca, si avranno le tre formole

$$\text{I. Sen. M} = \frac{\text{sen.} \frac{A - a}{2} \cdot \text{cos.} \frac{A + a}{2}}{\text{cos. L. cos. D. sen.} \frac{1}{2} T} \qquad \text{n.° 3.}$$

(*) Questa quantità R rilevasi dal n.° 27 dover significare un' altezza poco maggiore di $\frac{A + a}{2}$. *Così il Socio Esaminatore*.

$$\text{II. Sen. } \frac{R'-A}{2} = \frac{\text{sen. } \frac{M}{2} \text{ . sen. } \frac{M}{2} \text{ . cos. L. cos. D.}}{\text{cos. } \frac{R+A}{2}}.$$

$$\text{III. Sen. } \frac{R-☼'}{2} = \frac{\text{sen. } \frac{M+h}{2} \text{ . sen. } \frac{M-h}{2} \text{ . cos. L. cos. D.}}{\text{cos. } \frac{R+☼}{2}}.$$

Colla prima formola si trova l'angolo orario medio. Colla seconda si viene in cognizione della quantità R, che ha rapporto coll'angolo orario stesso. Colla terza finalmente si ritrova l'altezza meridiana del Sole, scopo finale del Problema.

27. Si applichino le formole ai superiori esempj. Nel I. esempio n.° 11, essendo $A = 54° 9'$; $a = 46° 55'$; $D. = 11° 17'$; $h = 46° 50'$; $\frac{T}{2} = 10° 37' 30''$; si è di già trovato $\frac{H+h}{2} = M = 18° 54'$. Si trovi ora il valore di R, coll'ajuto della seconda formola n.° 26, supponendo R un poco maggiore, come deve essere di $\frac{A+a}{2}$, cioè maggiore di $\frac{54° 9' + 46° 51'}{2}$: cioè R per esempio $= 51° 1'$; si avrà

2 . Log. sen. $\frac{M}{2} = 9° 27'$	8 . 4306768
Log. cos. L. $= 46° 50'$	9 . 8351350
Log. cos. D. $= 11° 17'$	9 . 9915240
Log. costante	8 . 2573358
Comp. arit. Log. cos. $\frac{R+A}{2} = \frac{51° 1' + 54° 9'}{2} = 52° 35'$	0 . 2163773
Log. sen. $\frac{R'-A}{2} = 1° 42' 20''$	8 . 4737131

Quindi $\frac{R'-A}{2} = 1° 42' 20''$; e $R' - A = 3° 24' 40''$; e $R' = 3° 24' 40'' + 54° 9' = 57° 33' 40''$; differente dalla supposta $51° 1'$.

Si supponga $R'' = 57° 34'$, e si avrà

Log. costante 8.2573358

Comp. arit. Log. cos. $\frac{R'+A}{2} = 55^\circ\, 51'\, 30''$ 0.2508506

Log. sen. $\frac{R''-A}{2} = 1^\circ\, 50'\, 47''$ 8.5081864

Quindi $\frac{R''-A}{2} = 1^\circ 50' 47''$; e $R''-A = 3^\circ 41' 34''$; e $R'' = 3^\circ 41' 34'' + 54^\circ 9' = 57^\circ 50' 34''$; diversa da $57^\circ 34'$. Finalmente fatta $R'' = 57^\circ 50'$, si avrà

Log. costante 8.2573358

Comp. arit. Log. cos. $\frac{R''+A}{2} = \frac{57^\circ 50' + 54^\circ 9'}{2} = 55^\circ 59' 30''$ 0.2523447

Log. sen. $\frac{R''-A}{2} = 1^\circ\, 51'\, 11''$ 8.5096805

Onde $\frac{R''-A}{2} = 1^\circ 51' 11''$, e $R''-A = 3^\circ 42' 22''$; e $R'' = 57^\circ 51' 22''$, poco diversa dalla supposta $57^\circ 50'$, che perciò sarà la vera.

28. Con questo ultimo dato $R'' = 57^\circ 51'$, si troverà facilmente l'altezza meridiana del Sole colla III.ª formola n.° 26. Di fatti sarà

Log. sen. $\frac{M+h}{2} = 13^\circ 35' 15'' =$ 9.3709385

Log. sen. $\frac{M-h}{2} = 5^\circ 18' 45'' =$ 8.9665538

Log. cos. L. $= 46^\circ 50' =$ 9.8351350

Log. cos. D. $= 11^\circ 17' =$ 9.9915240

Log. costante 8.1641513

Ed essendosi trovata $R = 57^\circ 51'$, si avrà supponendo ☼ $= 54^\circ 11'$, come altra volta

Log. costante 8.1641513

Comp. arit. Log. cos. R + ☼ $= 56^\circ 1'$ 0.2526257

Log. sen. $\frac{R - ☼'}{2} = 1^\circ 29' 46''$ 8.4167770

Quindi $\frac{R-\odot'}{2} = 1^\circ 29' 46''$, e $R - \odot' = 2^\circ 59' 32''$; e $\odot' = R - 2^\circ 59' 32'' = 57^\circ 51' - 2^\circ 59' 32'' = 54^\circ 51' 28''$; diversa da $54^\circ 11'$.
Si faccia la seconda volta

Log. costante	8.1641513
Comp. arit. Log. cos. $\frac{R+\odot'}{2} = \frac{57^\circ 51' + 54^\circ 51'}{2} = 56^\circ 21'$	0.2563976
Log. sen. $\frac{R-\odot''}{2} = 1^\circ 30' 33''$	8.4205489

Quindi $\frac{R-\odot''}{2} = 1^\circ 30' 33''$; e $R - \odot'' = 3^\circ 1' 6''$; e $\odot'' = 57^\circ 51' - 3^\circ 1' = 54^\circ 50'$; altezza meridiana del Sole, la stessa che s'è trovata altrove n.° 13. Si giugnerà alla risoluzione del Problema, applicando nello stesso modo le formole del n.° 26 agli altri due esempj.

29. Evvi anche un altro modo differente di pervenire alla determinazione dell'altezza meridiana del Sole coll'ajuto di due altre formole, ritrovate cogli stessi principj, che le passate, le quali potranno avere il loro vantaggio, e perciò da non trascurarsi. Col loro ajuto trovandosi l'angolo orario medio, e l'altezza media del Sole, che gli compete, si determina facilmente l'altezza medesima meridiana. Se oltre alle determinazioni date agli archi nel corso di questo Opuscolo, si chiami V l'altezza del Sole conveniente all'angolo orario medio M, si avranno le tre formole seguenti.

$$\text{I.}^a \ \text{Sen.}\, M = \frac{\text{sen.}\frac{A-a}{2}\,.\,\cos.\frac{A+a}{2}}{\cos. L.\, \cos. D.\, \text{sen.}\frac{1}{2}T}\,.$$

$$\text{II.}^a \ \text{Sen.}\frac{A-V'}{2} = \frac{\text{sen.}\frac{M+h}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{M-h}{2}\,.\,\cos. L.\, \cos. D}{\cos.\frac{A+V}{2}}\,.$$

$$\text{III.}^a \ \text{Sen.}\frac{\odot'-V}{2} = \frac{\text{sen.}\frac{M}{2}\,.\,\text{sen.}\frac{M}{2}\,.\,\cos. L.\, \cos. D}{\cos.\frac{\odot+V}{2}}\,.$$

Colla prima si determina M, o l'angolo orario medio: colla

II.ª si determina l'altezza del Sole V, corrispondente a quell' angolo orario medio. Colla III.ª si viene a capo dell'altezza meridiana del Sole, scopo finale del Problema.

30. Qualche esempio metterà in chiaro l'applicazione delle formole. Coi dati esposti nell'Esempio I, si avrà $M = 18^\circ 54'$; Log. sen. $\frac{M+h}{2}$. sen. $\frac{M-h}{2}$. cos. L. cos. D. $=$ 8.1641513 n.° 28; e supponendo $V = \frac{54^\circ 9' + 46^\circ 55'}{2} = \frac{A+a}{2} =$ $50^\circ 32'$, altezza meridiana per approssimazione, si avrà

Log. costante	8.1641513
Comp. arit. Log. cos. $\frac{A+V}{2} = \frac{54^\circ 9' + 50^\circ 32'}{2} = 52^\circ 20' 30''$	0.2139933
Log. sen. $\frac{A-V'}{2} = 1^\circ 22' 7''$	8.3781446

Quindi $\frac{A-V'}{2} = 1^\circ 22' 7''$, e $A - V' = 2^\circ 44' 14''$, e $V' = A -$ $2^\circ 44' 14'' = 54^\circ 9' - 2^\circ 44' 14'' = 51^\circ 25' 46''$, diversa dalla supposta $50^\circ 32'$. Fatto in seguito $V' = 51^\circ 26'$, si avrà

Log. costante	8.1641513
Comp. arit. Log. cos. $\frac{A+V'}{2} = 52^\circ 47' 30''$	0.2184493
Log. sen. $\frac{A-V''}{2} = 1^\circ 22' 58''$	8.3826006

Quindi $\frac{A-V''}{2} = 1^\circ 22' 58''$; e $A - V'' = 2^\circ 46'$; e $V'' = A - 2^\circ 46' =$ $54^\circ 9' - 2^\circ 46' = 51^\circ 23'$, altezza del Sole corrispondente all'angolo orario medio $M = 18^\circ 54'$.

31. Per trovare ora l'altezza meridiana del Sole, si sostituiscano nella III.ª formola n.° 29 i numeri corrispondenti, e si avrà prima

2. Log. sen. $\frac{M}{2} = \frac{18^\circ 54'}{2} = 9^\circ 27' =$	8.4306768
Log. cos. L. $= 46^\circ 50' =$	9.8351350
Log. cos. D. $= 11^\circ 17' =$	9.9915240
Log. costante	8.2573358

Supponendo poi l'altezza meridiana del Sole 54° 11', come altra volta, si avrà

Log. costante	8.2573358
Comp. arit. Log. cos. $\frac{☼ + V}{2} = 52° 44'$	0.2178676
Log. sen. $\frac{☼' - V}{2} = 1° 42' 42''$	8.4752034

Quindi $\frac{☼' - V}{2} = 1° 42' 42''$; e $☼' - V = 3° 25'$, e $☼' = 3° 25' + 51° 23' = 54° 48'$, diversa dalla supposta 54° 11'. Si faccia per la seconda volta

Log. costante	8.2573358
Comp. arit. Log. cos. $\frac{☼' + V}{2} = \frac{54° 48' + 51° 23'}{2} = 53° 5' 30''$	0.2214606
Log. Sen. $\frac{☼'' - V}{2} = 1° 43' 32''$	8.4787964

Onde $\frac{☼'' - V}{2} = 1° 43' 32''$; e $☼'' - V = 3° 27' 4''$; e $☼'' = 3° 27' 4'' + 51° 23' = 54° 50'$, altezza vera meridiana del Sole ricercata, ch'è la stessa ritrovata altrove.

32. Applicando le formole del n.° 29 all'esempio III., n.° 20, essendo $A = 63° 40$; $a = 22° 30'$; $L. = 7° 40'$; $D. = 22° 47'$, $\frac{T}{2} = 23° 16'$; si è trovato $M = 45° 21'$; e $h = 22° 5'$.

Quindi si troverà V colla 4.ª formola.

Log. sen. $\frac{M + h}{2} = \frac{45° 21' + 22° 5'}{2} = 33° 43' =$	9.7443606
Log. sen. $\frac{M - h}{2} = \frac{45° 21' - 22° 5'}{2} = 11° 38' =$	9.3045934
Log. cos. L. = 7° 40'	9.9961064
Log. cos. D. = 22° 47'	9.9647195
Log. costante	9.0097799

Supponendo $V = \frac{A + a}{2} = 43° 5'$, sarà $\frac{A + V}{2} = \frac{63° 40' + 43° 5'}{2} = 53° 22' 50''$, e conseguentemente

Log.

Log. costante	9 . 0097799
Comp. arit. Log. cos. $\frac{A+V}{2} = 53^\circ 22' 30''$	0 . 2243349
Log. sen. $\frac{A-V'}{2} = 9^\circ 52' 20''$	9 . 2341148

Quindi $\frac{A-V'}{2} = 9^\circ 52' 20''$; e $A - V' = 19^\circ 44' 40''$; e $V' = A - 19^\circ 44' 40'' = 63^\circ 40' - 19^\circ 44' 40'' = 43^\circ 55$, diversa dalla supposta $43^\circ 5'$. Fatta perciò $V' = 43^\circ 55'$; si avrà per la seconda volta

Log. costante	9 . 0097799
Comp. arit. Log. cos. $\frac{A+V'}{2} = \frac{63^\circ 40' + 43^\circ 55'}{2} = 53^\circ 47',5$	0 . 2286161
Log. sen. $\frac{A-V''}{2} = 9^\circ 58' 10''$	9 . 2383960

E per conseguenza $\frac{A-V''}{2} = 9^\circ 58' 10''$; e $A - V'' = 19^\circ 56'$; o sia $V'' = A - 19^\circ 56' = 63^\circ 40' - 19^\circ 56' = 43^\circ 44'$, diversa dalla supposta $43^\circ 55'$. Si faccia finalmente

Log. costante	9 . 0097799
Comp. arit. Log. cos. $\frac{A+V''}{2} = \frac{63^\circ 40' + 43^\circ 44'}{2} = 53^\circ 42'$	0 . 2276686
Log. sen. $\frac{A-V'''}{2} = 9^\circ 56' 50''$	9 . 2374485

Quindi $\frac{A-V'''}{2} = 9^\circ 56' 50''$, o sia $A - V''' = 19^\circ 53' 40''$, cioè $V'' = A - 19^\circ 53' 40'' = 63^\circ 40' - 19^\circ 53' 40'' = 43^\circ 46' 20''$, la quale essendo poco differente dalla supposta, può prendersi per la vera. Perciò si avrà $V = 43^\circ 46'$.

33. L'altezza meridiana in fine si determina per la III. formola n.° 29.

2 . Log. sen. $\frac{M}{2} = \frac{45^\circ 21'}{2} = 22^\circ 40' 50''$	9 . 1720566
Log. cos. L. $= 7^\circ 40'$	9 . 9961064
Log. cos. D. $= 22^\circ 47'$	9 . 9647195
Log. costante	9 . 1328825

Supponendo ☼$=74^\circ\ 0'$, come altrove, sarà $\frac{☼+V}{2}=\frac{74^\circ\ 0'+43^\circ\ 46'}{2}=$ $58^\circ\ 53'$. Quindi

Log. costante	9 . 1328825
Comp. arit. Log. cos. $\frac{☼+V}{2}=58^\circ\ 53'$	0 . 2866923
Log. sen. $\frac{☼'-V}{2}=15^\circ\ 14'$	9 . 4195748

Quindi $\frac{☼'-V}{2}=15^\circ\ 14'$, e ☼$'-V=30^\circ\ 28'$, e ☼$'=30^\circ\ 28'+V=30^\circ\ 28'+43^\circ\ 46'=74^\circ\ 14'$, diversa dalla supposta altezza meridiana $74^\circ\ 0'$. Supposta perciò ☼$'=74^\circ\ 14'$, si avrà $\frac{☼'+V}{2}=\frac{74^\circ\ 14'+43^\circ\ 46'}{2}=59^\circ\ 0'$. Onde

Log. costante	9 . 1328825
Comp. arit. Log. cos. $\frac{☼+V}{2}=59^\circ\ 0'$	0 . 2881607
Log. sen. $\frac{☼''-V}{2}=15^\circ\ 17'\ 10''$	9 . 4210432

Perciò $\frac{☼''-V}{2}=15^\circ\ 17'\ 10''$, e ☼$''-V=30^\circ\ 34'\ 20''$; e ☼$''=30^\circ\ 34'\ 20''+43^\circ\ 46'=74^\circ\ 20'\ 20''$, diversa da $74^\circ\ 14'$. Si faccia ☼$''=74^\circ\ 20'$, e sarà

Log. costante	9 . 1328825
Comp. arit. Log. cos. $\frac{☼''+V}{2}=\frac{74^\circ 20'+43^\circ 46'}{2}=59^\circ\ 3'$	0 . 2887920
Log. sen. $\frac{☼'''-V}{2}=15^\circ\ 18'\ 30''$	9 . 4216745

Quindi ☼$'''-V=30^\circ\ 37'\ 0''$, e ☼$''=30^\circ\ 37'+43^\circ\ 46'=74^\circ\ 23'$, altezza meridiana, poco diversa dalla supposta $74^\circ\ 20'$, che si può prendere per la vera. Al n.° 24 si è trovata la stessa altezza meridiana con altro metodo $74^\circ\ 23'\ 40''$.

34. Il fin qui detto è sufficientissimo per la pratica, al quale oggetto specialmente ho formato il presente breve Opu-

scolo. In una lunga Memoria, che ho stabilito di pubblicare sullo stesso argomento, esaminerò parte per parte tutto ciò, che può contribuire alla soluzione del Problema di trovare la latitudine in Mare. Ivi m' ingegnerò di far conoscere, come si possa collo stesso metodo risolvere il Problema a terra, colle necessarie precauzioni, e colla scelta delle osservazioni più conducenti: dando anche di tutto le opportune dimostrazioni. Ma siccome in questo breve scritto non si è fatta parola alcuna degli espedienti da prendere, quando in tempo delle Osservazioni delle altezze del Sole il vascello abbia mutata Latitudine, e Longitudine: così rimetto a quella Memoria la discussione di tutto questo. In somma niente sarà tralasciato, che possa condurre a una completa, ed esatta soluzione del Problema.

CONGIUNZIONE INFERIORE DI VENERE

DELL' ANNO MDCCCVII OSSERVATA IN PISA

MEMORIA

Del Sig. Giuseppe Piazzini.

Presentata li 5 Febbrajo 1810 dal Sig. Cav. Brunacci ed approvata dal Sig. Cav. Ab. Cesaris.

Le osservazioni furono fatte al quadrante murale; il pianeta venne paragonato colle stelle γ, δ del Capricorno, e ι dell' Aquario: le posizioni di queste desunte dal Catalogo del celebre *Piazzi* hanno dato i seguenti luoghi apparenti calcolati per l' epoca della congiunzione:

γ del Capricorno;	Ascensione retta	$10^s.22^\circ.21'.38'',6$
	Declinazione australe	17.31.10,2
δ del Capricorno;	Ascensione retta	10.24. 6.31,6
	Declinazione australe	16.59.14,9
ι dell' Aquario;	Ascensione retta	10.29. 0.51,2
	Declinazione australe	14.47.29,8

Il dì 11 Ottobre a $23^h.55'.4'',7$ tempo medio astronomico:

Differenza osservata in ascensione retta	
fra il centro di Venere e γ del Capricorno	−4. 3.29.21,7
fra il centro di Venere e δ del Capricorno	−4. 5.14.12,1
fra il centro di Venere e ι dell' Acquario	−4.10. 8.29,2
Ascensione retta di Venere dedotta	
da γ del Capricorno	6.18.52.16,9
da δ del Capricorno	6.18.52.19,5
da ι dell' Aquario	6.18.52.22,0

Differenza osservata in declinazione fra il lembo superiore vero di Venere e γ del Capricorno	— 1°. 18′. 4″,6
fra il detto lembo e δ del Capricorno	— 0 . 46 . 15 , 1
fra il detto lembo e ι dell' Aquario	+ 1 . 25 . 26 , 2
La stessa, corretta dalla parallasse e dalla refrazione (tenuto conto dell' altezza del barometro e del termometro) fra il lembo superiore di Venere e γ del Capricorno	— 1 . 18 . 40 , 1
fra il detto lembo e δ del Capricorno	— 0 . 46 . 48 , 3
fra il detto lembo e ι dell' Aquario	+ 1 . 25 . 1 , 4
Declinazione australe di Venere, posto il semidiametro 30″, 1, dedotta	
da γ del Capricorno	16 . 13 . 0 , 2
da δ del Capricorno	16 . 12 . 56 , 7
da ι dell' Aquario	16 . 13 . 1 , 3
Preso un medio fra le tre osservazioni, si ottiene il luogo apparente osservato di Venere:	
Ascensione retta	6 . 18 . 52 . 19 , 5
Declinazione australe	16 . 12 . 59 , 4
E quindi, essendo l' obliquità dell' eclittica 23° . 27′ . 48″ , 8, si ha	
Longitudine di Venere	6 . 23 . 33 . 17 , 1
Latitudine australe	7 . 36 . 53 , 2

Adì 15 Ottobre a 23^h . 30′ . 59″ , 2 tempo medio astronomico .

Differenza osservata in ascensione retta	
fra il centro di Venere e γ del Capricorno	— 4 . 5 . 35 . 12 , 0
fra il centro di Venere e δ del Capricorno	— 4 . 7 . 20 . 2 , 7
fra il centro di Venere e ι dell' Aquario	— 4 . 12 . 14 . 19 , 8
Ascensione retta di Venere dedotta	
da γ del Capricorno	6 . 16 . 46 . 26 , 6
da δ del Capricorno	6 . 16 . 46 . 28 , 9
da ι dell' Aquario	6 . 16 . 46 . 31 , 4

Differenza osservata in declinazione fra il lembo superiore di Venere, e γ del Capricorno	$-$ 2°.40'.28",0
fra il detto lembo e δ del Capricorno	$-$ 2. 8.39,9
fra il detto lembo e ι dell'Aquario	+ 0. 3. 1,9
La stessa corretta dalla refrazione e dalla parallasse fra il lembo superiore di Venere e γ del Capricorno	$-$ 2.41. 8,2
fra il detto lembo e δ del Capricorno	$-$ 2. 9.17,8
fra il detto lembo e ι dell'Aquario	+ 0. 2.32,4
Declinazione australe di Venere, posto il semidiametro 30",4, dedotta	
da γ del Capricorno	14.50.32,4
da δ del Capricorno	14.50.27,5
da ι dell'Aquario	14.50.32,6
Preso un medio fra le tre osservazioni, si avrà il luogo apparente osservato di Venere:	
Ascensione retta	6.16.46.29,0
Declinazione australe	14.50.30,8
Longitudine	6.21. 8.31,6
Latitudine australe	7. 7. 0,3

Il dì 19 Ottobre a 23^h.7'.23"0, tempo medio astronomico.

Differenza osservata in ascensione retta	
fra il centro di Venere e γ del Capricorno	$-$ 4. 7.33.38,5
fra il centro di Venere e δ del Capricorno	$-$ 4. 9.18.29,5
fra il centro di Venere e ι dell'Aquario	$-$ 4.14.12.46,6
Ascensione retta di Venere dedotta	
da γ del Capricorno	6.14.48. 0,1
da δ del Capricorno	6.14.48. 2,1
da ι dell'Aquario	6.14.48. 4,6
Differenza osservata in declinazione fra il lembo superiore di Venere, e γ del Capricorno	$-$ 4.14. 9,5

fra il detto lembo e δ del Capricorno	— 3°.42'.21",9
fra il detto lembo e ι dell'Aquario	— 1.30.40,1
La stessa, corretta dalla refrazione e dalla parallasse, fra il lembo superiore di Venere e γ del Capricorno	— 4.14.53,9
fra il detto lembo e δ del Capricorno	— 3.43. 4,0
fra il detto lembo e ι dell'Aquario	— 1.31.13,7
Declinazione australe di Venere, posto il semidiametro 30",2, dedotta	
da γ del Capricorno	13.16.46,5
da δ del Capricorno	13.16.41,1
da ι dell'Aquario	13.16.46,3
Preso un medio fra le tre osservazioni, si avrà il luogo apparente osservato di Venere:	
Ascensione retta	6.14.48. 2,3
Declinazione australe	13.16.44,6
Longitudine	6.18.45.21,2
Latitudine australe	6.24.49,4

Applicando alle longitudini apparenti le correzioni — 15",3, e — 3",4 per la mutazione lunisolare e l'aberrazione, ed alle latitudini apparenti la correzione — 0",8 per l'aberrazione, si otterranno i seguenti luoghi veri di Venere dedotti dall'osservazione per i tre istanti sopraindicati:

Longitudine dall'equinozio medio	Latitudine australe
6ˢ.23°.32'.58",4	7°.36'.52",4
6.21. 8.12,9	7. 6.59,5
6.18.45. 2,5	6.24.48,6

Dalle tavole di Venere dell'illustre *Lalande* inserite nella terza edizione della sua Astronomia si hanno i luoghi geocentrici veri del pianeta, per gli istanti medesimi, come segue:

Longitudine dall'equinozio medio	Latitudine australe
6ˢ.23°.32'.26",2	7°.36'.54",9
6.21. 7.36,5	7. 7. 5,2
6.18.44.28,2	6.24.50,2

Nel dedurre tali luoghi geocentrici dagli eliocentrici è stato fatto uso delle tavole solari del celebre Sig. *De Lambre* pubblicate dal Bureau delle longitudini di Francia, e si è adoprato per l'elongazione la formola $\text{tang. } E = \frac{\text{sen. } C}{\frac{R}{r} - \cos. C}$, ove E rappresenta l'elongazione, C la commutazione, R il raggio vettore della terra, ed r il raggio vettore del pianeta ridotto all'eclittica.

Le longitudini dedotte dalle tavole differiscono dalle corrispondenti osservate delle quantità $-32'',2 \ldots -36'',4 \ldots - 34'',3$; e perciò la correzione media determinata dalle osservazioni da applicarsi alle longitudini calcolate è $+34'',3$. Parimente le latitudini date dalle tavole differiscono dalle osservate respettivamente delle quantità $+2'',5 \ldots +5'',7 \ldots + 1'',6$; onde la correzione media applicabile alle prime è $-3'',3$.

Attesa l'irregolarità dei moti geocentrici di Venere, mi sono servito delle seconde differenze, sì per determinare l'istante della congiunzione vera, che per calcolare la latitudine geocentrica del pianeta nel momento medesimo.

È noto che esprimendo α la differenza costante fra gli indici x dei termini y_x d'una serie, ed essendo β un numero minore di α, l'equazione generale per l'interpolazione è

$$y_{x+\beta} = y_x + \frac{\beta}{\alpha} \Delta y_x + \frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)}{2} \Delta^2 y_x + \text{ec.}$$

Siccome la congiunzione accadde nelle 24 ore precedenti l'osservazione del 15 Ottobre tempo astronomico, ho dedotto dalle tavole i luoghi veri geocentrici di Venere per i due istanti anteriori, l'uno di 12 ore, l'altro di 24, a quello dell'osservazione predetta; le corrispondenti elongazioni aumentate della correzione media $34'',3$ (per ridurle a ciò che sarebbero state, se le avesse offerte l'osservazione) e le loro differenze sono come appresso:

14 Ottob. $23^h.30'.59'',2$	$+35'.\ 6'',7$	$-48'.12'',1$	$+4'',0$
15 Ottob. $11\ .30\ .59\ ,2$	$-13\ .\ 5\ ,4$	$-48\ .\ 8\ ,1$	
15 Ottob. $23\ .30\ .59\ ,2$	$-61\ .13\ ,5$		

Nell' esposta equazione facendo pertanto il primo membro uguale a zero, (poichè nel momento della congiunzione l'elongazione è nulla) ponendo $\alpha = 12^h$, $y_x = 35'.6''.7$, $\Delta y_x = -48'.12'',1$, $\Delta^2 y_x = 4'',0$, e non curando le differenze superiori alla seconda, si trova il valore di β soddisfacente al caso nostro $= 8^h.44'.22'',4$; quindi si deduce che la congiunzione vera avvenne il 15 Ottobre a $8^h.15'.21'',6$ tempo medio astronomico.

La longitudine del Sole calcolata colle mentovate tavole era per il momento stesso di $6^s.21^\circ.31'.32'',5$; onde se ne ricava la longitudine eliocentrica vera di Venere in congiunzione $0^s.21^\circ.31'.32'',5$; e siccome le tavole la danno allora $0^s.21^\circ.31'.44'',8$, l'errore di queste in longitudine eliocentrica per la detta epoca è $+12'',3$.

Le latitudini geocentriche di Venere calcolate per i tempi sopraindicati, e le loro differenze sono le seguenti:

14 Ottob. $23^h.30'.59'',2$	$7^\circ.15'.41'',6$	$-4'.\ 7'',6$	$-21'',2$
15 Ottob. $11\ .30\ .59\ ,2$	$7\ .11\ .34\ ,0$	$-4\ .28\ ,8$	
15 Ottob. $23\ .30\ .59\ ,2$	$7\ .\ 7\ .\ 5\ ,2$		

E perciò nella solita equazione facendo $\alpha = 12^h$, $\beta = 8^h.44'.22'',4$, $y_x = 7^\circ.15'.41'',6$, $\Delta y_x = -4'.7'',6$, $\Delta^2 y_x = -21'',2$ e trascurando le differenze più alte, si trova $y_{x+\beta} = 7^\circ.12'.43'',4$; tale è dunque la latitudine geocentrica data dalle tavole per l'istante della congiunzione; ed applicandovi la correzione media $-3'',3$ si ha la latitudine geocentrica $7^\circ.12'.40'',1$ quale sarebbe stata offerta dall' osservazione. Da questa si deduce la corrispondente latitudine eliocentrica $2^\circ.43'.29'',0$ la quale paragonata coll' altra $2^\circ.43'.30'',7$ data dalle tavole, mostra che l' errore di queste in latitudine eliocentrica per l' epoca della congiunzione è $+1'',7$.

OPPOSIZIONE DI GIOVE

DELL'ANNO MDCCCVII OSSERVATA A PISA

MEMORIA

DEL SIG. GIUSEPPE PIAZZINI.

Presentata li 5 Febbrajo 1810 dal Sig. Cav. Brunacci ed approvata dal Sig. Cav. Ab. Cesaris.

Per mezzo del quadrante murale fu il pianeta confrontato colle Stelle ρ, v ed η del Capricorno: le posizioni di queste prese dal Catalogo del celebre Piazzi, ridotte all'epoca dell' opposizione e convertite in apparenti, sono come appresso:

ρ del Capricorno:	Ascensione retta	$10^s.\ 4^\circ.28'.38'',3$
	Declinazione australe	$18.26.\ 8,7$
v del Capricorno:	Ascensione retta	$10.\ 7.16.43,7$
	Declinazione australe	$18.48.\ 7,5$
η del Capricorno:	Ascensione retta	$10.13.22.\ 7,8$
	Declinazione australe	$20.36.\ 6,5$

Il dì 27 Luglio a $12^h.22'.23'',4$ tempo medio astronomico:

Differenza osservata in ascensione retta	
fra Giove e la Stella ρ	$+\ 5^\circ.50'.26'',4$
fra Giove e la Stella v	$+\ 3.\ 2.14,4$
fra Giove e la Stella η	$-\ 3.\ 3.\ 6,9$
Ascensione retta di Giove dedotta	
dalla Stella ρ	$10^s.10^\circ.19'.\ 4'',7$
dalla Stella v	$10.10.18.58,1$
dalla Stella η	$10.10.19.\ 0,5$
Differenza osservata in declinazione	
fra Giove e la Stella ρ	$+\ 0.41.\ 0,0$

fra Giove e la Stella υ + 0 . 19 . 4 , 0
fra Giove e la Stella η — 1 . 28 . 47 , 0
La stessa, corretta dalla refrazione e dalla parallasse, fra Giove e la Stella ρ + 0 . 41 . 1 , 4
fra Giove e la Stella υ + 0 . 19 . 3 , 7
fra Giove e la Stella η — 1 . 28 . 56 , 3
Declinazione australe di Giove dedotta
dalla Stella ρ 19 . 7 . 10 , 1
dalla Stella υ 19 . 7 . 11 , 2
dalla Stella η 19 . 7 . 10 , 2
Preso un medio fra le tre osservazioni si avrà
Ascensione retta di Giove 10 . 10 . 19 . 1 , 1
Declinazione australe 19 . 7 . 10 , 5
Donde, coll' obliquità dell' eclittica $23^{\circ} . 27' . 49'' , 2$ si ottiene il luogo apparente del pianeta.
Longitudine 10 . 7 . 41 . 22 , 0
Latitudine australe 0 . 46 . 47 , 6
Il dì 29 Luglio a $12^{h} . 13' . 28'' , 6$ t. m. astronomico.
Differenza osservata in ascensione retta
fra Giove e la Stella ρ + 5 . 34 . 38 , 9
fra Giove e la Stella υ + 2 . 46 . 26 , 9
fra Giove e la Stella η — 3 . 18 . 54 , 6
Ascensione retta di Giove dedotta
dalla Stella ρ 10 . 10 . 3 . 17 , 2
dalla Stella υ 10 . 10 . 3 . 10 , 6
dalla Stella η 10 . 10 . 3 . 13 , 2
Differenza osservata in declinazione
fra Giove e la Stella ρ + 0 . 45 . 16 , 0
fra Giove e la Stella υ + 0 . 23 . 18 , 0
fra Giove e la Stella η — 1 . 24 . 29 , 0
La stessa, corretta dalla refrazione e dalla parallasse, fra Giove e la Stella ρ + 0 . 45 . 17 , 8

fra Giove e la Stella υ	+	0 . 23 . 18, 1
fra Giove e la Stella η	—	1 . 24 . 37, 9
Declinazione australe di Giove dedotta		
dalla Stella ρ		19 . 11 . 26, 5
dalla Stella υ		19 . 11 . 25, 6
dalla Stella η		19 . 11 . 28, 6
Preso un medio fra le tre osservazioni si avrà		
Ascensione retta di Giove		10 . 10 . 3 . 13, 7
Declinazione australe		9 . 11 . 26, 9
Longitudine		10 . 7 . 25 . 51, 1
Latitudine australe		0 . 47 . 5, 4
Il dì 30 Luglio a $12^h . 9' . 1'', 1$ t. m. astronomico.		
Differenza osservata in ascensione retta		
fra Giove e la Stella ρ	+	5 . 26 . 45, 2
fra Giove e la Stella υ	+	2 . 38 . 33, 0
fra Giove e la Stella η	—	3 . 26 . 48, 3
Ascensione retta di Giove dedotta		
dalla Stella ρ		10 . 9 . 55 . 23, 5
dalla Stella υ		10 . 9 . 55 . 16, 7
dalla Stella η		10 . 9 . 55 . 19, 5
Differenza osservata in declinazione		
fra Giove e la Stella ρ	+	0 . 47 . 23, 0
fra Giove e la stella υ	+	0 . 25 . 27, 0
fra Giove e la Stella η	—	1 . 22 . 21, 0
La stessa, corretta dalla refrazione e dalla parallasse, fra Giove e la Stella ρ	+	0 . 47 . 24, 9
fra Giove e la Stella υ	+	0 . 25 . 27, 2
fra Giove e la Stella η	—	1 . 22 . 29, 8
Declinazione australe di Giove dedotta		
dalla Stella ρ		19 . 13 . 33, 6
dalla Stella υ		19 . 13 . 34, 7
dalla Stella η		19 . 13 . 36, 7

Il medio fra le tre osservazioni dà

Ascensione retta di Giove		10 . 9 . 55 . 19 , 9
Declinazione australe		19 . 13 . 35 , 0
Longitudine		10 . 7 . 18 . 5 , 7
Latitudine australe		0 . 47 . 14 , 7
Il dì 31 Luglio a $12^h.4'.33'',8$ t. m. astronomico		
Differenza osservata in ascensione retta		
fra Giove e la stella ρ	+	5 . 18 . 51 , 3
fra Giove e la Stella v	+	2 . 30 . 39 , 3
fra Giove e la Stella η	—	3 . 34 . 42 , 1
Ascensione retta di Giove dedotta		
dalla Stella ρ		10 . 9 . 47 . 29 , 6
dalla Stella v		10 . 9 . 47 . 23 , 0
dalla Stella η		10 . 9 . 47 . 25 , 7
Differenza osservata in declinazione		
fra Giove e la Stella ρ	+	0 . 49 . 30 , 0
fra Giove e la Stella v	+	0 . 27 . 32 , 0
fra Giove e la Stella η	—	1 . 20 . 15 , 0
La stessa, corretta dalla refrazione e dalla parallasse, fra Giove e la Stella ρ	+	0 . 49 . 32 , 0
fra Giove e la Stella v	+	0 . 27 . 32 , 3
fra Giove e la Stella η	—	1 . 20 . 23 , 7
Declinazione australe di Giove dedotta		
dalla Stella ρ		19 . 15 . 40 , 7
dalla Stella v		19 . 15 . 39 , 8
dalla Stella η		19 . 15 . 42 , 8
Prendendo il medio fra le tre osservazioni si ha		
Ascensione retta di Giove		10 . 9 . 47 . 26 , 1
Declinazione australe		19 . 15 . 41 , 1
Longitudine		10 . 7 . 10 . 21 , 0
Latitudine australe		0 . 47 . 22 , 5

Alle longitudini apparenti osservate applicando l'aberrazione — 10'', 9 e la nutazione — 17'', 5, ed applicando pure l'aberrazione + 0'', 2 alle latitudini apparenti osservate, si

hanno per i momenti indicati le seguenti posizioni geocentriche vere di Giove ricavate dall' osservazione .

Longitudine dall' equinozio medio .	Latitudine australe .
10 . 7 . 40 . 53 , 6	0 . 46 . 47 , 8
10 . 7 . 25 . 22 , 7	0 . 47 . 5 , 6
10 . 7 . 17 . 37 , 3	0 . 47 . 14 , 9
10 . 7 . 9 . 52 , 6	0 . 47 . 22 , 7

Dalle tavole di Giove del celebre Sig. *De Lambre* annesse alla terza edizione dell' Astronomia di *Lalande*, ho dedotto per l' epoche stesse le seguenti posizioni geocentriche vere del pianeta :

Longitudine dall' equinozio medio	Latitudine australe
10 . 7 . 40 . 50 , 2	0 . 46 . 54 , 1
10 . 7 . 25 . 18 , 9	0 . 47 . 10 , 9
10 . 7 . 17 . 31 , 6	0 . 47 . 19 , 0
10 . 7 . 9 . 44 , 6	0 . 47 . 26 , 8

Onde le longitudini calcolate differiscono dalle corrispondenti osservate di — 3'' , 4 . . . — 3'' , 8 . . . — 5'' , 7 . . . — 8'' , 0 ; e le latitudini calcolate differiscono dalle corrispondenti osservate di + 6'' , 3 . . . + 5'' , 3 . . . + 4'' , 1 . . . + 4'' , 1 . L' error medio delle dette tavole è in longitudine geocentrica — 5'' , 2 ed è + 4'' , 9 in latitudine geocentrica .

L' opposizione accadde fra gli istanti delle osservazioni del 30 e 31 Luglio lontani fra loro di 23^h . 55' . 32'' , 7 : in tale intervallo il moto del Sole dedotto dalle ultime tavole del celebre Sig. *De Lambre* è + 57' . 15'' , 7 , ed il moto di Giove calcolato, come sopra si è esposto, è — 7' . 47'' , 0 ; e perciò il moto relativo di Giove rapporto al Sole è 1° . 5' . 2'' , 7 .

L' elongazione del pianeta calcolata per il momento dell' osservazione del 30 , e corretta dall' error medio delle tavole in longitudine è 30' . 50'' , 4 ; il tempo che Giove impiega a percorrere quest' arco col moto relativo è di 11^h . 20' . 38'' , 4 ; quindi l' opposizione vera accadde il 30 Luglio a 23^h . 29' . 39'' , 5 tempo medio astronomico .

In tale istante la longitudine del Sole era 4^s . 7° . 13' . 55'' , 2 ,

e perciò la longitudine eliocentrica di Giove era $10^s.7^\circ.13'.55'',2$; e siccome le predette tavole danno allora tal longitudine di $10^s.7^\circ.13'.51'',2$, il loro errore in longitudine eliocentrica pel momento dell'opposizione è $-4'',0$.

La latitudine geocentrica di Giove calcolata per l'epoca stessa, e corretta dall'error medio delle tavole è $0^\circ.47'.17'',8$; da questa se ne deduce la corrispondente eliocentrica $0^\circ37'51''5$; le tavole mentovate la danno di $0^\circ.37'.55'',4$; onde il loro errore in latitudine eliocentrica è $+3'',9$ per il momento dell'opposizione.

Nel 1802 il celebre Sig. *Maskeline* s'accorse, che l'ascensione retta di α dell'Aquila, fondamento dei più recenti cataloghi di fisse, doveva essere aumentata di circa $4''$, e seco dovevano esserlo le ascensioni rette delle Stelle tutte. Era dell'estrema importanza il verificare se la posizione fino allora ricevuta del punto equinoziale fosse o nò esatta, dipendendo dalla medesima le epoche della longitudine media dei pianeti, ed i loro moti medj. Il rinomato Professor *Piazzi* si accinse a quest'impresa; e prima nell'effemeridi di Vienna pel 1806, poscia nel Libro VI del R. Osservatorio di Palermo ha pubblicato il resultato delle sue osservazioni, comprovanti la necessità di ammettere una correzione alle ascensioni rette delle fisse; in quest'ultima opera ne ha determinato la quantità, ed ha inoltre esposto le rettificazioni da farsi al suo gran catalogo in conseguenza della più rigorosa determinazione del punto equinoziale, e della latitudine di Palermo.

Per paragonare le soprariferite osservazioni di Giove colle recentissime tavole di questo pianeta dell'illustre Sig. *Bouvard* pubblicate nel 1808 dal Bureau delle longitudini di Francia, ho applicato alle Stelle di confronto le indicate correzioni, ed ho ottenuto i seguenti luoghi apparenti osservati di Giove:

Il dì 27 Luglio a $12^h.22'.23'',4$ t. m. astronomico:

Ascensione retta	$10^s.10^\circ.19'.6'',1$
Declinazione australe	19 . 7 . 12 , 0
Longitudine	10 . 7 . 41 . 26 , 1
Latitudine australe	0 . 46 . 50 , 3

Il dì 29 Luglio a $12^h.13'.28'',6$ t. m. astronomico:

Ascensione retta	10 . 10 . 3 . 18 , 7
Declinazione australe	19 . 11 . 28 , 4
Longitudine	10 . 7 . 25 . 55 , 3
Latitudine australe	0 . 47 . 7 , 5

Il dì 30 Luglio a $12^h.9'.1'',1$ t. m. astronomico:

Ascensione retta	10 . 9 . 55 . 24 , 9
Declinazione australe	19 . 13 . 36 , 5
Longitudine	10 . 7 . 18 . 9 , 9
Latitudine australe	0 . 47 . 17 , 4

Il dì 31 Luglio a $12^h.4'.33'',8$ t. m. astronomico:

Ascensione retta	10 . 9 . 47 . 31 , 1
Declinazione australe	19 . 15 . 42 , 6
Longitudine	10 . 7 . 10 . 25 , 1
Latitudine australe	0 . 47 . 25 , 2

Detraendone l'effetto dell'aberrazione e della nutazione, si hanno i luoghi geocentrici veri osservati come segue:

Longitudine dall'equinozio medio	Latitudine australe
$10^s.7^\circ.40'.57'',7$	$0^\circ.46'.50'',5$
10 . 7 . 25 . 26 , 9	0 . 47 . 7 , 7
10 . 7 . 17 . 41 , 5	0 . 47 . 17 , 6
10 . 7 . 9 . 56 , 7	0 . 47 . 25 , 4

Le posizioni geocentriche vere del pianeta date dalle tavole del prelodato Sig. *Bouvard* sono come appresso:

Longitudine dall'equinozio medio	Latitudine australe
10 . 7 . 41 . 4 , 1	0 . 46 . 58 , 7
10 . 7 . 25 . 33 , 8	0 . 47 . 15 , 3
10 . 7 . 17 . 47 , 6	0 . 47 . 23 , 4
10 . 7 . 10 . 1 , 1	0 . 47 . 31 , 2

Le longitudini calcolate differiscono dalle corrispondenti osservate di + 6″, 4 . . . + 6″, 9 . . . + 6″, 1 . . . + 4″, 4 : le latitudini calcolate differiscono dalle osservate di + 8″, 2 . . . + 7″, 6 . . . + 5″, 8 . . . + 5″, 8 . Pertanto l'error medio delle tavole è + 6″, 0 in longitudine geocentrica, e + 6″, 8 in latitudine geocentrica.

Al momento dell'osservazione del 30, l'elongazione di Giove ricavata dalle tavole e corrette dall'errore medio di queste, è 30′ . 55″, 2 : il pianeta col moto relativo impiegava 11^h . 22′ . 29″, 6 a percorrere quest'arco; perciò l'opposizione vera accadde il 30 Luglio a 23^h . 31′ . 30″, 7 t. m. astr.

La longitudine del Sole era allora 4^s . 7° . 13′ . 59″, 8; onde la longitudine eliocentrica di Giove era 10^s . 7° . 13 . 59″8: le prefate tavole la danno di 10^s . 7° . 14′ . 4″, 6; quindi il loro errore in longitudine eliocentrica è + 4″, 8 pel momento dell'opposizione.

La latitudine geocentrica di Giove calcolata per l'epoca stessa, e corretta dall'errore medio delle tavole è 0° . 47′ . 20″, 3; la corrispondente eliocentrica è 0° . 37′ . 53″, 6; le tavole la danno di 0° . 37′ . 59″, 0; perciò il loro errore in latitudine eliocentrica pel momento dell'opposizione è + 5″, 4.

OSSERVAZIONI

DELL' ECLISSE DI SOLE

DEL XVI GIUGNO MDCCCVI

CALCOLATE DAL SIG. GIUSEPPE PIAZZINI

PRESENTATE LI 5 FEBBRAJO 1810 DAL SIG. CAV. BRUNACCI ED APPROVATE DAL SIG. CAV. AB. CESARIS.

Il celebre Sig. *De Cesaris* con un cannocchiale acromatico di 8 piedi osservò il principio dell'eclisse a $5^h.25'.49'',8$, ed il fine a $6^h.42'.40'',1$ tempo vero astronomico a Milano.

Il chiarissimo Sig. *Chiminello* con un acromatico di piedi $3\frac{1}{2}$ osservò il principio a $5^h.38'.26'',8$, ed il fine a $6^h.51'.30'',9$ tempo vero a Padova.

Con un telescopio di *Short* di 5 piedi osservai il principio a $5^h.32'.13'',9$, ed il fine a $6^h.50'.12'',7$ tempo vero a Pisa.

Nel calcolare queste osservazioni mediante il metodo del nonagesimo ho adoprato le tavole del Sole dell'illustre Sig. *De Lambre*, e quelle della Luna del rinomato Sig. *Burg* pubblicate nel 1806 dal Bureau delle longitudini di Francia. Per trovare le differenze delle parallassi in longitudine ed in latitudine, e l'aumento del semidiametro della Luna a cagion dell'altezza, mi sono servito delle formole seguenti:

$$\text{tang. } \Pi = \frac{\text{sen. P}' \cos. l \text{ sen.}(\text{L}-\text{N})}{\text{sen. }\Delta - \text{sen. P}' \cos. l \cos.(\text{L}-\text{N})},$$

$$\text{cotang. } \Delta' = \frac{(\cos.\Delta - \text{sen. P}' \text{ sen. } l) \cos. \Pi}{\text{sen.}\Delta - \text{sen. P}' \cos. l \cos. (\text{L}-\text{N})},$$

aumento del semidiametro $= \frac{1}{2} d \,\text{sen. P} \cos. l \cos.(\text{L}-\text{N}) \,\text{sen.}\Delta$, ove P esprime la parallasse orizzontale della Luna nello sferoide, P' la stessa parallasse diminuita della parallasse oriz-

zontale del Sole, L la longitudine vera della Luna, N quella del nonagesimo, l la distanza del nonagesimo dal zenit, Δ la distanza vera della Luna dal polo boreale dell'eclittica, d il diametro orizzontale della Luna, Π la differenza delle parallassi di longitudine, e Δ' la distanza della Luna dal polo boreale dell'eclittica affetta dalla differenza delle parallassi di latitudine. Il semidiametro del Sole è stato diminuito di 3″, 5 per l'effetto dell'irradiazione: quello della Luna, essendo determinato per mezzo d'occultazioni, non abbisogna di veruna correzione: il rapporto degli assi terrestri è stato supposto di 299 : 300.

CALCOLO DELL'OSSERVAZIONE DI MILANO.

		Principio.	Fine.
Parallasse equatoriale della Luna		60′. 16″, 6	60′. 17″, 8
Parallasse orizzontale nello sferoide		60 . 10 , 5	60 . 11 , 7
Differenza della medesima e della parallasse solare		60 . 1 , 8	60 . 3 , 0
Differenza delle parallassi di longitudine		43 . 22 , 2	43 . 6 , 1
Differenza delle parallassi di latitudine		35 . 5 , 9	40 . 41 , 3
Somma corretta dei semidiametri del Sole e della Luna		32 . 16 , 2	32 . 12 , 8
Moto vero della Luna sull' eclittica nel tempo dell'eclisse	47′. 1″, 8		
Moto apparente	47 . 17 , 9		
Moto del Sole	3 . 3 , 2		
Moto apparente relativo della Luna in longitudine	44 . 14 , 7		
Moto apparente in latitudine	9 . 56 , 5		
Distanza apparente della Luna dalla congiunzione		27 . 11 , 3	17 . 3 , 4
Distanza vera		16 . 10 , 9	60 . 9 , 5

La stessa ridotta in tempo per mezzo del moto relativo vero	0h. 28'. 16",7	1h. 45'. 6",7
Istante della congiunzione vera, tempo vero	4h. 57'. 33",4	4h. 57'. 33",4
Longitudine del Sole	2s. 24°. 45'. 46",8	2s 24° 48' 50",0
Longitudine apparente della Luna dedotta dall' osservazione	2 . 24 . 18 . 35 , 5	2 25 5 53 , 4
Longitudine vera della Luna dedotta dall'osservazione	2 . 25 . 1 . 57 , 7	2 25 48 59 , 5
Longitudine vera della Luna data dalle tavole	2 . 25 . 2 . 13 , 4	2 25 49 15 , 2
Errore delle tavole in longitudine	+ 15 , 7	+ 15 , 7
Latitudine australe apparente della Luna dedotta dall' osservazione	17 . 22 , 9	27 . 19 , 6
Latitudine boreale vera della Luna dedotta dall' osservazione	17 . 43 , 0	13 . 21 , 7
Latitudine boreale vera della Luna data dalle tavole	17 . 42 , 3	13 . 21 , 2
Errore delle tavole in latitudine	— 0 , 7	— 0 , 5

CALCOLO DELL' OSSERVAZIONE DI PADOVA.

	Principio.	Fine.
Parallasse equatoriale della Luna	60 . 16 , 6	60 . 17 , 8
Parallasse orizzontale nello sferoide	60 . 10 , 5	60 . 11 , 7
Differenza della medesima e della parallasse solare	60 . 1 . 8	60 . 3 , 0
Differenza delle parallassi di longitudine	43 . 42 , 8	42 . 51 , 0

Differenza delle parallassi di latitudine		35.56,9	41.16,9
Somma corretta dei semidiametri del Sole e della Luna		32.15,6	32.12,5
Moto vero della Luna sull' eclittica nel tempo dell' eclisse	44'.43",3		
Moto apparente	45.35,1		
Moto del Sole	2.54,3		
Moto apparente relativo della Luna in longitudine	42.40,8		
Moto apparente in latitudine	9.28,2		
Distanza apparente della Luna dalla congiunzione		26.30,5	16.10,3
Distanza vera		17.12,3	59. 1,3
La stessa ridotta in tempo per mezzo del moto relativo vero		0^h.30'. 3",7	1^h.43'. 7",9
Istante della congiunzione vera		5^h. 8'.23",0	5^h. 8'.23",0
Longitudine del Sole		2^s.24°.45'.51",0	2^s 24° 48' 45",3
Longitudine apparente della Luna dedotta dall'osservazione		2.24.19.20,5	2 25 4 55,6
Longitudine vera della Luna dedotta dall'osservazione		2.25. 3. 3,3	2 25 47 46,6
Longitudine vera della Luna data dalle tavole		2.25. 3.19,0	2 25 48 2,3
Errore delle tavole in longitudine		+ 15,7	+ 15,7
Latitudine australe apparente della Luna dedotta dall' osservazione		18.23,0	27.51,3
Latitudine boreale vera della Luna dedotta dall' osservazione		17.33,9	13.25,6

Latitudine boreale vera della Luna dedotta dalle tavole		17.36,2	13.28,0
Errore delle tavole in latitudine		+ 2,3	+ 2,4

CALCOLO DELL' OSSERVAZIONE DI PISA.

		Principio.	Fine.
Parallasse equatoriale della Luna		60'.16",6	60'.17".9
Parallasse orizzontale nello sferoide		60.10,9	60.12,2
Differenza della medesima e della parallasse solare		60. 2,2	60. 3,5
Differenza delle parallassi di longitudine		44.45,7	44. 3,8
Differenza delle parallassi di latitudine		34.14,2	40. 5,4
Somma corretta dei semidiametri del Sole, e della Luna		32.15,7	32.12,3
Moto vero della Luna sull' eclittica nel tempo dell' eclisse	47.43,7		
Moto apparente	48.25,6		
Moto del Sole	3. 6,0		
Moto apparente relativo della Luna in longitudine	45.19,6		
Moto apparente in latitudine	10.16,1		
Distanza apparente della Luna dalla congiunzione		27.38,2	17.41,4
Distanza vera		17. 7,5	61.45,2
La stessa ridotta in tempo per mezzo del moto relativo vero		0^h.29'.55",4	1^h.47'.54",2
Istante della congiunzione vera		5^h. 2'.18",5	5^h. 2'.18",5

Longitudine del Sole	2ˢ.24°.45'.50",7	2ˢ 24° 48' 56",7
Longitudine apparente della Luna dedotta dall' osservazione	2 .24 . 18 . 12 ,5	2 25 6 38 ,1
Longitudine vera della Luna dedotta dall' osservazione	2 .25 . 2 .58 ,2	2 25 50 41 ,9
Longitudine vera della Luna data dalle tavole	2 .25 . 3 . 13 ,7	2 25 50 57 ,4
Errore delle tavole in longitudine	+ 15 ,5	+ 15 ,5
Latitudine australe apparente della Luna dedotta dall' osservazione	16 . 38 ,6	26 . 54 ,7
Latitudine boreale vera della Luna dedotta dall' osservazione	17 . 35 ,6	13 . 10 ,7
Latitudine boreale vera della Luna data dalle tavole	17 . 36 ,7	13 . 11 ,8
Errore delle tavole in latitudine	+ 1 ,1	+ 1 ,1

Paragonando gli istanti della congiunzione, si trova la differenza de' meridiani 10'.49",6 fra Milano e Padova, 4'.45",1 fra Milano e Pisa .

Nel volume della *Connoissance des Tems* per l' anno 1808, e nel Tomo VII delle Memorie della Classe di matematica, e fisica dell' Instituto di Francia, l' illustre *Lalande* pubblicò varie osservazioni di questa eclisse da lui calcolata : egli trovava che le medesime andavano poco d' accordo fra loro, e perciò ne resultavano troppo grandi gli errori delle tavole. Le osservazioni sopra esposte, essendo molto concordi, potranno per avventura esser reputate soddisfacienti; e confrontate colle altre riferite dal prelodato Astronomo, indicheranno quali di esse siano esatte, e quali difettose .

OSSERVAZIONI

DELL'OCCULTAZIONE DI τ DEL TORO SOTTO LA LUNA

ACCADUTA IL 2 OTTOBRE MDCCCVI

CALCOLATE DAL SIG. GIUSEPPE PIAZZINI

PRESENTATE LI 5 FEBBRAJO 1810 DAL SIG. CAV. BRUNACCI ED APPROVATE DAL SIG. CAV. AB. CESARIS.

A Milano il celebre Signor *Oriani* osservò l'immersione a $10^h . 36' . 53'' , 3$, e l'emersione a $11^h . 15' . 37'' , 0$ tempo medio.

A Pisa osservai l'immersione a $10^h . 36' . 22'' , 4$, e l'emersione a $11^h . 21' . 24'' , 7$ tempo medio.

Ho calcolato queste osservazioni coll'elegante e comodo metodo dall'abilissimo Sig. *Carlini* pubblicato nell'Appendice all'Efemeridi milanesi pel 1809. In esso chiamando l la longitudine della Stella, λ la latitudine, p la parallasse orizzontale della Luna nello sferoide, h l'altezza del nonagesimo, d la longitudine della Stella meno quella del nonagesimo pel momento dell'immersione, Π la parallasse in longitudine, e π quella in latitudine del punto della Luna ove la Stella s'occulta, e chiamando pure p', h', d', Π', π' le medesime quantità pel momento dell'emersione, si comincia dal cercare i valori delle parallassi in longitudine e in latitudine colle formole:

$$\Pi = \frac{p \text{ sen. } h \text{ sen. } d}{\cos. (\lambda - \pi)}$$

$$\pi = -p \cos. h \cos. \lambda + p \text{ sen. } h \text{ sen. } \lambda \cos. (d - \tfrac{1}{2}\Pi)$$

$$\Pi' = \frac{p' \text{ sen. } h' \text{ sen. } d'}{\cos. (\lambda - \pi')}$$

$$\pi' = -p' \cos. h' \cos. \lambda + p' \text{ sen. } h' \text{ sen. } \lambda \cos. (d' - \tfrac{1}{2}\Pi')$$

Indi

Indi denotando m il moto vero della Luna in longitudine (dato dalle tavole, o ricavato per interpolazione da efemeridi esatte) dall' istante dell' immersione a quello dell' emersione, n il moto vero in latitudine nello stesso intervallo, r il semidiametro orizzontale della Luna per l' istante medio fra le due osservazioni, e Λ la latitudine vera della Luna per l' immersione espressa soltanto in gradi e minuti, si forma la quantità $\Lambda + \frac{n + \pi' - \pi}{2}$ espressa pure in gradi e minuti, ed indicando tal quantità con Λ' si cercano due angoli α e β, sempre minori di 90°, mediante le formole

$$\text{tang.}\ \alpha = \frac{n + \pi' - \pi}{(m + \Pi' - \Pi)\cos.\Lambda'}$$

$$\cos.\ \beta = \frac{(m + \Pi' - \Pi)\cos.\Lambda'}{2r\cos.\alpha}$$

L' angolo α ha lo stesso segno della quantità $n + \pi' - \pi$; l' angolo β è positivo quando $\lambda - \pi < \Lambda'$, è negativo quando $\lambda - \pi > \Lambda'$. La latitudine sia della Stella, sia della Luna, si considera positiva se è boreale, negativa se australe. La longitudine vera osservata della Luna per l' immersione resulta $= l - \Pi - \frac{r\cos.(\beta - \alpha)}{\cos.(\lambda - \pi)}$, e la latitudine vera osservata $= \lambda - \pi + r\,\text{sen.}(\beta - \alpha)$, donde si deduce l' error delle tavole.

Per confrontare osservazioni fatte in due luoghi diversi, esprimendo A la differenza de' tempi delle due immersioni, B la differenza delle due longitudini corrispondenti osservate della Luna, q il moto orario in longitudine, ed x la differenza de' meridiani in tempo, si ha $x = A - \frac{B}{q}$. Quando però occorre di paragonare molte osservazioni fatte in paesi differenti, torna più conto dedurre l' istante della congiunzione vera, dalla longitudine osservata della Luna.

La posizione della Stella presa dal Catalogo dell' illustre Professore *Piazzi*, corretta secondo ciò che egli avvisa nel

Libro VI del R. Osservatorio di Palermo, e ridotta in apparente per l'epoca dell'occultazione dà $l = 69° . 27' . 48'', 3$, e $\lambda = + 0° . 41' . 27'', 2$.

CALCOLO DELL'OSSERVAZIONE DI MILANO.

	Immersione.	Emersione.
Altezza del nonagesimo	$h = 45°.35'.58'',2$	$h' = 49°.16'.30'',1$
Longitudine del nonagesimo	13 .58 .11 ,1	21 .47 .21 ,3
Longitudine della Stella meno quella del nonagesimo	$d =$ 55 .29 .37 ,2	$d' =$ 47 .40 .27 ,0
Parallasse orizzontale nello sferoide	$p =$ 57 .16 ,5	$p' =$ 57 .17 ,4
Prima parte della parallasse di latitudine	— 40 . 4 ,3	— 37 .22 ,5
Parallasse di longitudine	$\Pi =$ 33 .43 ,9	$\Pi' =$ 32 . 6 ,4
Seconda parte della parallasse di latitudine	+ 0 .16 ,9	+ 0 .21 ,3
Parallasse di latitudine	$\pi = -$ 39 .47 ,4	$\pi' = -$ 37 . 1 ,2

Le tavole danno $m = + 21' . 23'', 6$, $n = - 1' . 50'', 6$, $r = 15' . 39'', 6$, $\Lambda = 1° . 8' . 40''$, e quindi si ha $\Lambda' = 1° . 9' . 10''$; onde si trova $\alpha = + 2° . 41' . 4''$ e $\beta = - 50° . 49' . 16''$ e perciò $\beta - \alpha = - 53° . 30' . 20''$, $- \frac{r \cos.(\beta - \alpha)}{\cos.(\lambda - \pi)} = - 9' . 19'', 0$, $r \,\text{sen.}(\beta - \alpha) = - 12' . 35'', 4$.

La longitudine vera osservata della Luna nell'istante dell'immersione era dunque $= 69° . 27' . 48'', 3 - 33' . 43'', 9 - 9' . 19'', 0 = 68° . 44' . 45'', 4$; e la corrispondente latitudine osservata era $+ 0° . 41' . 27'', 2 + 39' . 47'', 4 - 12' . 35'', 4 = 1° . 8' . 39'', 2$ boreale.

Le tavole lunari del ch. *Burg* pubblicate dal Bureau delle longitudini di Francia danno per tale istante la longitudine $68° . 44' . 44'', 9$ e la latitudine boreale $1° . 8' . 37'' . 6$, pren-

dendo 27' . 25'' per differenza in tempo de' meridiani di Parigi e di Milano; l'errore di esse in longitudine è pertanto — 0'', 5, ed in latitudine — 1'', 6.

CALCOLO DELL'OSSERVAZIONE DI PISA.

	Immersione.	Emersione.
Altezza del nonagesimo	$h = 47°. 0'. 52'',3$	$h' = 51°. 18'. 16'',8$
Longitudine del nonagesimo	12 . 32 . 57 ,9	21 . 45 . 57 ,6
Longitudine della Stella meno quella del nonagesimo	$d = 56 . 54 . 50 ,4$	$d' = 47 . 41 . 50 ,7$
Parallasse orizzontale nello sferoide	$p =$ 57 . 16 ,7	$p' =$ 57 . 17 ,7
Prima parte della parallasse di latitudine	— 39 . 3 ,1	— 35 . 49 ,0
Parallasse di longitudine	$\Pi =$ 35 . 7 ,0	$\Pi' =$ 33 . 4 ,9
Seconda parte della parallasse di latitudine	+ 0 . 16 ,7	+ 0 . 21 . 9
Parallasse di latitudine	$\pi =$ — 38 . 46 ,4	$\pi' =$ — 35 . 27 ,1

Dalle tavole si ha $m = + 24' . 52'', 7$, $n = - 2' . 8'', 6$, $r = 15' . 39'', 6$, $\Lambda = 1° . 8' . 50''$, e così trovasi $\Lambda' = 1° . 9' . 30''$. Perciò si ottiene $\alpha = + 2° . 57' . 13''$, $\beta = - 43° . 5' . 54''$, $\beta - \alpha = - 46° . 3' . 7''$, $- \frac{r \cos.(\beta - \alpha)}{\cos.(\lambda - \pi)} = - 10' . 52'' . 3$, e r sen. $(\beta - \alpha) = - 11' . 16'', 5$.

Quindi la longitudine vera osservata della Luna per l'istante dell'immersione resulta $= 69° . 27' . 48'', 3 - 35' . 7'', 0 - 10' . 52'', 3 = 68° . 41' . 49'', 0$, e la latitudine osservata $= + 0° . 41' . 27'', 2 + 38' . 46'', 4 - 11' . 16'', 5 = 1° . 8' . 57'', 1$ boreale.

Pel confronto delle due osservazioni abbiamo $A = 30'' 9$, $B = 2' . 56'', 4$, $q = 33' . 8'', 7$, e la differenza in tempo de' meridiani di Milano e di Pisa resulta uguale a $4' . 48'', 4$.

Laonde prendendo 32' . 13" per la differenza in tempo de' meridiani di Parigi e di Pisa, la longitudine della Luna per l' istante dell' immersione osservata a Pisa trovasi colle citate tavole del ch. *Burg*, 68° . 41' . 48", 6, e la latitudine boreale 1° . 8' . 53", 8; ossia l' errore delle tavole in longitudine è — 0", 4, ed in latitudine — 3", 3.

NUOVO RAPPORTO TRA LA TEORIA DEL CENTRO DI GRAVITÁ E QUELLA DELLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE.

MEMORIA

DEL SIG. ANTONIO BORDONI.

Presentata li 2 Aprile 1810 dal Sig. Cav. Brunacci ed esaminata dal Sig. Paolo Delanges.

Se si rappresentino colle rette AA', BB', CC', ... le direzioni e grandezze delle forze F, F', F'', ... applicate ai punti A, B, C, ... invariabilmente uniti ossia formanti un sistema rigido, e che si unisca il centro di gravità G delle prime loro estremità A, B, C, ... (supponendo in tutte queste estremità collocati pesi eguali) coll' altro *g* delle seconde A', B', C'..., la direzione e la lunghezza della retta G*g* (*Fig.* 1) hanno alcuni rapporti utili ed eleganti colla direzione e grandezza della risultante di tutte le forze. L'esposizione di questi rapporti con alcune conseguenze, che si ricavano naturalmente da essi, tra le quali è rimarcabile l'elegante Teorema sulla composizione del moto di *Leibnizio*, formeranno il soggetto di questa piccola Memoria.

Quantunque si potrebbero esporre immediatamente i rapporti suddetti per un sistema rigido qualunque, sollecitato da forze dirette nello spazio, e poscia dedurli per un sistema disposto unitamente alle forze sullo stesso piano, come caso particolare, non ostante, per maggior chiarezza incominciaremo dall' esporli e dimostrarli per questo caso particolare, indi passeremo ad abbracciare tutta la generalità del soggetto, cioè esponendoli e dimostrandoli per un sistema rigido qualunque, sollecitato da forze dirette nello spazio, ossia in diversi piani.

OSSERVAZIONE I

Per evitare un dubbio che potrebbe nascere intorno all' esattezza dei rapporti, che si esporranno, atteso il modo usato nella Meccanica di rappresentare indifferentemente colla stessa retta AA' (*Fig.* 1) la forza F sia essa positiva o negativa, si previene, che chiameremo A prima estremità e A' seconda della forza AA', quando agirà da A verso A', e all' opposto A' prima e A seconda, quando agirà da A' verso A; cioè il punto M (*Fig.* 2) di applicazione della forza MM' si chiamerà prima estremità della stessa forza, quando sarà tirato da M verso M', e seconda quando sarà spinto da M' verso M. Così, se tutte le forze AA', BB', CC', ... (*Fig.* 1) ossia F, F', F'', ... agiranno da A, B, C, ... verso A', B', C', ... come abbiamo supposto nell' enunciato antecedente, le prime estremità saranno A, B, C, ... e le seconde A', B', C', ...; e viceversa A', B', C', ... le prime, e A, B, C, ... le seconde, se agiranno in senso contrario: che se la forza F' agirà da B' verso B, e le altre dai punti A, C, ... verso gli altri A', C', ... le prime estremità saranno A, B', C, ... e le seconde A', B, C', ...

Proposizione I. Teorema.

Trovato il centro di gravità G delle prime estremità delle forze F, F', F'', ... applicate ai punti di un sistema rigido, e quello delle seconde g, ed indicata colla δ la distanza di questi due centri, colla R la grandezza della risultante, e colla n il numero delle forze, si avrà $R = n\delta$; cioè la risultante di un numero qualunque di forze applicate ai punti di un sistema rigido, ossia invariabile, è sempre eguale alla distanza tra il centro di gravità delle prime estremità, e quello delle seconde, ma ripetuta questa distanza tante volte, quante sono le forze.

Dimostrazione.

Indicando colle $a, a', a'', \ldots$ le ascisse, e colle $b, b', b'' \ldots$ le ordinate delle prime estremità delle forze, supposte riferite a due assi ortogonali, ed indicato il peso collocato in ciascuno di queste estremità colla m, saranno $am, a'm, a''m, \ldots$ i momenti degli stessi punti riportati all'asse delle ordinate; e perciò la distanza A' da questo asse al centro di gravità G delle prime estremità delle forze, ossia l'ascissa, sarà eguale alla somma dei momenti $am + a'm + a''m +$ ec., divisa per quella dei pesi $m+m+m+$ ec.; cioè $A'=(am+a'm+a''m+\text{ec.}):(m+m+m+\text{ec.})=m(a+a'+a''+\text{ec.}):m(1+1+1+\text{ec.})$; ovvero $A'=(a+a'+a''+\text{ec.}):n$. Similmente saranno bm, $b'm, b''m, \ldots$ i momenti delle stesse estremità, riferite all' asse delle ascisse, per cui la distanza B' tra il centro suddetto e l'asse delle ascisse, ovvero l'ordinata, sarà eguale alla somma $bm+b'm+b''m+$ec., divisa per l'altra $m+m+m+$ec.; cioè a dire $B'=(bm+b'm+b''m+\text{ec.}):(m+m'+m''+\text{ec.})$; ossia $B'=(b+b'+b''+\text{ec.}):n$.

Facendo dei simili ragionamenti per le seconde estremità delle forze, e chiamando $x, x', x'', \ldots$ le ascisse, ed $y, y', y'', \ldots$ le ordinate di queste estremità riferite ai medesimi assi a cui si sono riferite le prime, si troveranno le coordinate X', Y' del centro g di gravità delle seconde estremità eguali ad $(mx+mx'+mx''+\text{ec.}):(m+m+m+\text{ec.})$, $(my+my'+my''+\text{ec.}):(m+m+m+\text{ec.})$; cioè $X'=(x+x'+x''+\text{ec.}):n$, ed $Y'=(y+y'+y''+\text{ec.}):n$.

Ora la distanza δ dei due centri G, g di gravità essendo l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto è la differenza delle ascisse A', X', e l'altro la differenza delle ordinate B', Y', per essere A', X', B', Y' le coordinate delle sue estremità, sarà $\delta=\sqrt{\{(A'-X')^2+(B'-Y')^2\}}$; vale a dire

$$\delta=\sqrt{\left\{\left(\frac{a+a'+a''+\text{ec.}}{n}-\frac{x+x'+x''+\text{ec.}}{n}\right)^2+\left(\frac{b+b'+b''+\text{ec.}}{n}-\frac{y+y'+y''+\text{ec.}}{n}\right)^2\right\}};$$

ossia eguale ad $\frac{1}{n} \sqrt{\left\{ (A-X)^2 + (B-Y)^2 \right\}}$, supposto $a+a'+a''+$ ec. $=A$, $b+b'+b''+$ ec. $=B$, $x+x'+x''+$ ec. $=X$, $y+y'+y''+$ ec. $=Y$.

Supponendo α, α', α'', ... gli angoli che fanno coll'asse delle ascisse le forze F, F', F'', ..., e decomponendo ciascuna di esse in due parallele ai due assi ortogonali, saranno $F \cos.\alpha$, $F' \cos.\alpha'$, $F'' \cos.\alpha''$ ... le componenti parallele all'asse delle ascisse, e $F \operatorname{sen}.\alpha$, $F' \operatorname{sen}.\alpha'$, $F'' \operatorname{sen}.\alpha''$, ... quelle parallele all'asse delle ordinate; cioè la risultante di tutte le componenti parallele all'asse delle ascisse sarà eguale ad $F \cos.\alpha + F' \cos.\alpha' + F'' \cos.\alpha'' +$ ec., e quella delle parallele all'asse delle ordinate eguale ad $F \operatorname{sen}.\alpha + F' \operatorname{sen}.\alpha' + F'' \operatorname{sen}.\alpha'' +$ ec.; e perciò la risultante R di tutte le forze applicate al sistema, sarà eguale a

$$\sqrt{\left\{ (F\cos.\alpha + F'\cos.\alpha' + F''\cos.\alpha'' + \text{ec.})^2 + (F\operatorname{sen}.\alpha + F'\operatorname{sen}.\alpha' + F''\operatorname{sen}.\alpha'' + \text{ec.})^2 \right\}};$$

perchè le due forze $F \cos.\alpha + F' \cos.\alpha' + F'' \cos.\alpha'' +$ ec., $F \operatorname{sen}.\alpha + F' \operatorname{sen}.\alpha' + F'' \operatorname{sen}.\alpha'' +$ ec. ad esse equivalenti si tagliano ad angolo retto, essendo parallele ai due assi ortogonali.

Ma le componenti $F\cos.\alpha$, $F\operatorname{sen}.\alpha$, $F'\cos.\alpha'$, $F'\operatorname{sen}.\alpha'$, $F''\cos.\alpha''$, $F''\operatorname{sen}.\alpha''$, ... parallele ai due assi ortogonali sono eguali alle projezioni $a-x$, $b-y$, $a'-x'$, $b'-y'$, $a''-x''$, $b''-y''$, ... delle forze F F' F'' ... sugli assi stessi; cioè $F \cos.\alpha = a-x$, $F \operatorname{sen}.\alpha = b-y$, $F' \cos.\alpha' = a'-x'$, $F' \operatorname{sen}.\alpha' = b'-y'$, $F'' \cos.\alpha'' = a''-x''$, $F'' \operatorname{sen}.\alpha'' = b''-y''$, ...; sarà adunque $F\cos.\alpha + F'\cos.\alpha' + F''\cos.\alpha'' +$ ec. $= a-x+a'-x' + a''-x'' +$ ec., ed $F\operatorname{sen}.\alpha + F'\operatorname{sen}.\alpha + F'\operatorname{sen}.\alpha' + F''\operatorname{sen}.\alpha'' +$ ec. $= b-y+b'-y'+b''-y''+$ ec. ossia $F\cos.\alpha + F'\cos.\alpha' + F''\cos.\alpha'' +$ ec. $= A-X$, ed $F\operatorname{sen}.\alpha + F'\operatorname{sen}.\alpha' + F''\operatorname{sen}.\alpha'' +$ ec. $= B-Y$; e perciò la risultante $R = \sqrt{\left\{(A-X)^2 + (B-Y)^2\right\}}$. Quindi sostituendo questo valore dal radicale $\sqrt{\left\{(A-X)^2 + (B-Y)^2\right\}}$ nella equazione superiormente trovata, avrassi $\delta = \frac{1}{n} R$, ovvero $R = n\delta$. Ciò che ec.

Pro-

Proposizione II Teorema .

La linea δ che unisce i due centri di gravità G, g delle estremità delle forze applicate ad un sistema rigido è parallela alla loro risultante R .

Dimostrazione.

Per dimostrare questo Teorema e nello stesso tempo preparare dei risultati ai seguenti onde facilitarne le loro dimostrazioni, troveremo le equazioni delle rette di cui le δ, R ne sono porzioni; cioè ricercheremo la equazione della linea, che passa pei centri G, g di gravità, e di quella sulla quale trovasi la risultante .

Dell' equazione della retta che passa pei centri G , g .

Riferita la linea che passa pei due centri g, G ai medesimi assi ortogonali fissati nella soluzione del teorema antecedente, ed indicato colla $u = Tt + D$ la sua equazione ; cioè colle u , t le sue coordinate, e colle T , D le quantità da cui ne dipende la posizione , la difficoltà è ridotta a trovare i valori di queste due ultime quantità .

Per le condizioni a cui dee soddisfare la posizione di questa linea, cioè di passare pei due centri di gravità, ai quali corrispondono le coordinate $A' = \frac{1}{n} A$, $B' = \frac{1}{n} B$, $X' = \frac{1}{n} X$, $Y' = \frac{1}{n} Y$, dovrà essere la sua equazione $u = Tt + D$ soddisfatta tanto dai valori $u = \frac{1}{n} B$, $t = \frac{1}{n} A$, quanto dagli altri $u = \frac{1}{n} Y$, $t = \frac{1}{n} X$; vale a dire si avranno le due equazioni $\frac{1}{n} B = \frac{1}{n} TA + D$, $\frac{1}{n} Y = \frac{1}{n} TX + D$, le quali daranno $T = \frac{B - Y}{A - X}$,

$D = \frac{1}{n} \cdot \frac{AY - BX}{A - X}$ valori cercati delle T, D; perchè le due equazioni $B = TA + nD$, $Y = TX + nD$ sono soddisfatte, quando si pongono per le T, D i veri loro valori, o li danno, quando siano incogniti. Quindi sostituendo i valori trovati delle T, D nella equazione supposta della retta, che passa per i centri G, g, si avrà la sua equazione tutta conosciuta $u = t \cdot \frac{B - Y}{A - X} + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY - BX}{A - X}$.

Dell' equazione della retta sulla quale trovasi la risultante delle forze.

Riferita anch' essa agli stessi assi ortogonali ed indicata colla $u' = T't' + D'$ la sua equazione, cioè colle u', t' le coordinate, e colle T', D' i coefficenti da cui ne dipende la sua posizione, la difficoltà è ridotta, come nel caso antecedente, a trovare i valori delle quantità T', D'. Sebbene si potrebbero determinare i valori delle quantità T', D' trovando prima le coordinate di due punti per cui dee passare la retta, e poscia procedere come nel caso antecedente, nondimeno, le determineremo colle condizioni, che la retta passi per un solo di quei punti, e che facci un dato angolo coll' asse delle ascisse, giacchè coll' ajuto delle cose esposte, più facilmente si può determinare la tangente di questo angolo, che le coordinate di un altro suo punto.

Essendo le componenti $F \cos. a$, $F' \cos. a'$, $F'' \cos. a''$, ... parallele all' asse delle ascisse, e di più applicate ai punti corrispondenti alle coordinate $a, a', a'', \ldots b, b', b'', \ldots$, sarà la loro risultante sopra di una retta parallela allo stesso asse delle ascisse, e distante da questo asse dell' ordinata eguale a $(bF \cos. a + b'F' \cos. a' + b''F'' \cos. a'' + \text{ec.}) : (F \cos. a + F' \cos. a' + F'' \cos. a'' + \text{ec.})$; ossia a $\big(b(a-x)+b'(a'-x')+b''(a''-x'')+\text{ec.}\big):(a-x+a'-x'+a''-x''+\text{ec.})$

$= (ab + a'b' + a''b'' + \text{ec.} - bx - b'x' - b''x'' - \text{ec.}):$
$(a + a' + a'' + \text{ec.} - x - x' - x'' - \text{ec.})$; cioè supponendo
$ab + a'b' + a''b'' + \text{ec.} = \text{M}$, e $bx + b'x' + b''x'' + \text{ec.} = \text{N}$,
sarà la distanza suddetta eguale ad $\frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}}$. Similmente la risultante delle componenti F sen. α, F′ sen. α', F″ sen. α'', ... si troverà sopra di una retta parallela all'asse delle ordinate e distante da quello delle ascisse di
$(a\text{F sen. } \alpha + a'\text{F}' \text{ sen. } \alpha' + a''\text{F}'' \text{ sen. } \alpha'' + \text{ec.}):$
$(\text{F sen. } \alpha + \text{F}' \text{ sen. } \alpha' + \text{F}'' \text{ sen. } \alpha'' + \text{ec.})$; ovvero di
$\big(a (b - y) + a' (b' - y') + a'' (b'' - y'') + \text{ec.} \big):$
$(b - y + b' - y' + b'' - y'' + \text{ec.}) =$
$(ab + a'b' + a''b'' + \text{ec.} - ay - a'y' - a''y'' - \text{ec.}):$
$(b + b' + b'' + \text{ec.} - y - y' - y'' - \text{ec.})$; cioè sopra di una retta parallela all'asse delle ordinate a cui corrisponderà l'ascissa eguale ad $\frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}}$, supposto $ay + a'y' + a''y'' + \text{ec.} = \text{P}$.

Ma la risultante di tutte le forze F, F′, F″, . . . non è che la risultante delle due F cos. α + F′ cos. α' + F″ cos. α'' + ec., F sen. α + F′ sen. α' + F″ sen. α'' + ec. delle quali qui sopra abbiamo determinate le posizioni; e la risultante di queste due passa pel punto di loro intersezione, al quale corrispondono le coordinate $\frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}}$, $\frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}}$ trovate dianzi; dunque la retta di cui cercasi la equazione, passerà per il punto corrispondente ai valori $u' = \frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}}$, $t' = \frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}}$; cioè avrassi la equazione $\frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}} = \text{T}' . \frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}} + \text{D}'$; ossia $\text{D}' = \frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}} - \text{T}' \frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}}$. Di più la stessa risultante è la diagonale di un rettangolo, i di cui lati adiacenti e paralleli agli assi ortogonali sono F cos. α + F′ cos. α' + F″ cos. α'' + ec. $= a - x + a' - x' + a'' - x'' + \text{ec.}$ $= \text{A} - \text{X}$, ed F sen. α + F′ sen. α' + F″ sen. α'' + ec. $= \text{B} - \text{Y}$, per cui fa col lato di questo rettangolo parallelo all'asse delle ascisse, ossia collo stesso asse un angolo, la cui tangente

è eguale al lato opposto B — Y, diviso per l'altro A — X; e perciò sarà $T' = \frac{B-Y}{A-X}$, e $D' = \frac{P-N}{A-X}$, giacchè T' esprime la tangente di questo angolo. Vale a dire, la equazione della retta sulla quale si trova la risultante, sarà $u' = \frac{B-Y}{A-X} \cdot t' + \frac{P-N}{A-X}$.

Paragonando ora le due equazioni $u = \frac{B-Y}{A-X} t + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $u' = \frac{B-Y}{A-X} t' + \frac{P-N}{A-X}$ trovate, si comprende, che esprimono due linee parallele, perchè sono eguali i coefficenti delle ascisse t, t', i quali rappresentano le tangenti trigonometriche degli angoli, che le due linee fanno dalla medesima parte coll'asse delle ascisse; cioè la linea che passa pei due centri di gravità G, g, e quella sulla quale trovasi la risultante, sono parallele; e perciò anche le δ, R loro porzioni. Ciò ec.

Dalle due Proposizioni dimostrate, ricavasi questo elegantissimo ed utile Teorema " La risultante R di un numero qualsiasi di forze disposte sullo stesso piano ed applicate ai punti di un sistema rigido, è sempre eguale a tante volte quante sono le forze la distanza δ dei centri di gravità G, g delle prime e seconde estremità di esse; e di più parallela a questa distanza ".

Le relazioni dimostrate, naturalmente ci ispirano il desiderio di scoprire in quali casi la risultante R coinciderà colla linea δ di unione dei centri g, G, e quali saranno le condizioni a cui dovranno soddisfare le grandezze e direzioni delle forze F, F', F'', . . . affinchè ciò accada; ossia, acciocchè la risultante passi pei due centri di gravità suddetti.

Proposizione III Problema.

Quali sono le condizioni alle quali dovranno soddisfare le forze, acciocchè coincidano le posizioni delle due linee R, δ, ossia affinchè la risultante passi pei due centri di gravità delle prime e seconde estremità?

Soluzione.

È noto a tutti, che due linee riferite allo stesso modo ai medesimi assi si confondano, allora che hanno la stessa equazione; per tanto le condizioni cercate saranno quelle, le quali ridurranno alla stessa, le equazioni delle rette di cui le δ, R ne sono porzioni; cioè le equazioni $u = \frac{B-Y}{A-X}\, t + \frac{1}{n} \times \frac{AY-BX}{A-X}$, $u' = \frac{B-Y}{A-X}\, t' + \frac{P-N}{A-X}$ trovate superiormente. Ma queste equazioni si riducono alla medesima, purchè sia il termine $\frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$ della prima eguale al termine $\frac{P-N}{A-X}$ della seconda, giacchè gli altri sono sempre eguali; dunque la equazione $\frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X} = \frac{P-N}{A-X}$, ovvero $AY - BX = n\,(P - N)$ esprimerà la condizione a cui dovranno soddisfare le forze, affinchè le rette δ, R coincidano.

La equazione $AY - BX = n\,(P - N)$, la quale indicherà la coincidenza delle δ, R tutte le volte, che sarà soddisfatta, servirà pure a determinare opportunamente qualcheduna delle quantità da cui ne dipenderà la grandezza o direzione delle forze, quando non saranno tutte determinate, acciocchè abbia luogo la suddetta sopraposizione. C. D. F.

Nelle Proposizioni dimostrate abbiamo supposto tutte le forze nello stesso piano, cioè su quello delle coordinate x, y, passiamo adesso a dimostrarne delle simili per delle forze ap-

plicate ai punti di un sistema rigido comunque posto nello spazio, ma talmente dirette che abbiano una sola risultante.

Proposizione IV Teorema.

Se più forze applicate ai punti di un sistema rigido qualunque avranno una sola risultante, questa sarà eguale a tante volte la distanza tra il centro di gravità delle prime estremità e quello delle seconde, quante sono le forze stesse; cioè chiamando R la risultante, δ la distanza suddetta, ed n il numero delle forze, si avrà $R = n\delta$.

Dimostrazione.

Riferite tanto le prime estremità quanto le seconde agli stessi tre piani ortogonali, e chiamate $a, a', a'', \ldots\, b, b', b'', \ldots\, c, c', c'', \ldots$ le coordinate delle prime estremità, ed $x, x', x'', \ldots\, y, y', y'', \ldots\, z, z', z'', \ldots$ quelle delle seconde, avrassi la distanza A' del centro di gravità G delle prime estremità dal piano delle b, c, dividendo la somma dei momenti $am + a'm + a''m +$ ec. delle stesse estremità riferite al medesimo piano bc (si suppone collocato il peso m a tutte l' estremità) per quella dei pesi $m + m + m +$ ec.; cioè sarà $A' = \frac{A}{n}$, posto $a + a' + a'' +$ ec. $= A$. Così si avranno le altre due distanze B', C' del centro stesso agli altri due piani ab, ac, cioè $B' = \frac{B}{n}$, e $C' = \frac{C}{n}$, supposto qui pure per brevità $b + b' + b'' +$ ec. $= B$, e $c + c' + c'' +$ ec. $= C$.

Similmente otterransi le tre coordinate X', Y', Z' del centro g di gravità delle seconde estremità eguali ad $(x + x' + x'' +$ ec.$) : n$, $(y + y' + y'' +$ ec.$) : n$, $(z + z' + z'' +$ ec.$) : n$, ossia $X' = \frac{X}{n}$, $Y' = \frac{Y}{n}$, $Z' = \frac{Z}{n}$, supposto $x + x' + x'' +$ ec. $= X$, $y + y' + y'' +$ ec. $= Y$, $z + z' + z'' +$ ec. $= Z$.

Ora, essendo la distanza δ dei due centri G, g, la diagonale di un parallelepipedo rettangolo i cui tre spigoli concorrenti a formare lo stesso angolo sono le differenze delle coordinate A'X', B'Y', C'Z' corrispondenti ai due centri, ossia alle stesse estremità della δ, sarà essa eguale a $\sqrt{\{(A'-X')^2+(B'-Y')^2+(C'-Z')^2\}}$; ovvero $\delta=\sqrt{\left\{(A-X)^2:n^2+(B-Y)^2:n^2+(C-Z)^2:n^2\right\}}=\frac{1}{n}\sqrt{\{(A-X)^2+(B-Y)^2+(C-Z)^2\}}$ ponendo per le coordinate A', B', C', X', Y', Z' i loro valori $\frac{A}{n}$, $\frac{B}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{X}{n}$, $\frac{Y}{n}$, $\frac{Z}{n}$.

Ma decomposte tutte le forze F, F', F'', . . . in tre parallele alle tre intersezioni dei tre piani ortogonali, ossia agli assi delle coordinate, risultano le tre somme delle componenti parallele ai tre assi eguali alle differenze delle AX, BY, CZ, come è facile a comprendere, ragionando come nella Proposizione prima; cioè tutte le forze F, F', F'', . . . equivalenti alle sole tre A — X, B — Y, C — Z, la prima delle quali è parallela alle x, la seconda alle y, e la terza alle z, e di cui una è perpendicolare alle altre due al punto della loro intersezione; dunque la risultante di tutte le F, F', F'', . . . sarà la diagonale di un parallelepipedo rettangolo di cui i tre lati paralleli agli assi ortogonali sono le tre forze suddette; e perciò $R=\sqrt{\{(A-X)^2+(B-Y)^2+(C-Z)^2\}}$: per tanto sostituendo questo valore del radicale nella equazione $\delta=\frac{1}{n}\sqrt{\left\{(A-X)^2+(B-Y)^2+(C-Z)^2\right\}}$ trovata sopra, si otterrà $\delta=\frac{1}{n}R$, od $R=n\delta$. Ciò ec.

Proposizione V Teorema.

La risultante di un numero qualunque di forze (che abbiano una sola risultante) applicate ai punti di un siste-

ma rigido qualunque, è parallela alla linea, la quale unisce i due centri di gravità G, g; cioè la R è parallela alla δ.

Dimostrazione.

Il modo più facile onde paragonare le posizioni delle due rette di cui si parla, è quello di determinare le loro equazioni, come abbiamo fatto nella dimostrazione della seconda Proposizione, indi paragonarle, dal qual paragone deducesi il parallelismo suddetto, ossia la dimostrazione del Teorema. Per procedere collo stesso ordine tenuto nella dimostrazione della suddetta Proposizione, colla quale la seguente ha tutti i rapporti, incominciaremo a trovare le due equazioni della retta di cui δ ne è porzione, la quale passa pei due centri G, g; e poi passeremo a trovare quelle della quale ne è porzione la risultante R.

Dell' equazioni della retta che passa pei centri G, g.

Projettata la linea, che passa pei due centri di gravità sui piani ortogonali xy, xz, ed indicate le equazioni di queste projezioni colle $y = Tx + D$, $z = lx + H$, si avranno i valori delle quattro quantità T, D, l, H da cui dipendono le posizioni delle due projezioni, osservando, che la prima passa per due punti a cui corrispondono le ordinate $\frac{B}{n}$, $\frac{Y}{n}$, e le ascisse $\frac{A}{n}$, $\frac{X}{n}$, e che la seconda passa pure per due altri sul piano delle z, x corrispondenti alle coordinate $\frac{C}{n}$, $\frac{Z}{n}$, $\frac{A}{n}$, $\frac{X}{n}$; per cui le quattro quantità T, D, l, H dovranno soddisfare alle equazioni $\frac{B}{n} = T\frac{A}{n} + D$, $\frac{Y}{n} = T\frac{X}{n} + D$, $\frac{C}{n} = l\frac{A}{n} + H$, $\frac{Z}{n} = l\frac{X}{n} + H$, cioè le T, D alle due prime, e le

l, H

l, H alle due ultime; vale a dire sarà $T = \frac{B-Y}{A-X}$, $D = \frac{1}{n} \times \frac{AY-BX}{A-X}$, $l = \frac{C-Z}{A-X}$, $H = \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$; e perciò le due equazioni della retta, che passa per i due centri suddetti, saranno $y = \frac{B-Y}{A-X} x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $z = \frac{C-Z}{A-X} x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$.

Dell' equazioni della retta sulla quale trovasi la risultante R.

Decomposta ciascuna delle forze F, F', F'', . . . in tre parallele ai tre assi ortogonali, saranno le somme o risultanti di queste componenti parallele ai tre assi, $a - x + a' - x' + a'' - x'' +$ ec. $= A - X$, $b - y + b' - y' + b'' - y'' +$ ec. $= B - Y$, $c - z + c' - z' + c'' - z'' +$ ec. $= C - Z$; cioè tutte le forze F, F', F'', . . . equivaleranno alle sole tre rappresentate dalle differenze $A - X$, $B - Y$, $C - Z$, e dirette parallelamente ai tre assi delle coordinate. Di più la $A - X$ incontrerà il piano yz in un punto corrispondente alle coordinate $y = \{b(a-x) + b'(a'-x') + b''(a''-x'') + \text{ec.}\} : (a-x+a'-x'+a''-x''+\text{ec.})$, $z = \{c(a-x) + c'(a'-x') + c''(a''-x'') + \text{ec.}\} : (a-x+a'-x'+a''-x''+\text{ec.})$, le quali saranno anche le coordinate della retta sulla quale trovasi la stessa forza $A - X$. Similmente le coordinate delle rette sulle quali si trovano le forze $B - Y$, $C - Z$ saranno

$x = \{a(b-y) + a'(b'-y') + a''(b''-y'') + \text{ec.}\} : (b-y+b'-y'+b''-y''+\text{ec.})$

$z = \{c(b-y) + c'(b'-y') + c''(b''-y'') + \text{ec.}\} : (b-y+b'-y'+b''-y''+\text{ec.})$, e

$y = \{b(c-z) + b'(c'-z') + b''(c''-z'') + \text{ec.}\} : (c-z+c'-z'+c''-z''+\text{ec.})$

$x = \{a(c-z) + a'(c'-z') + a''(c''-z'') + \text{ec.}\} : (c-z+c'-z'+c''-z''+\text{ec.})$.

Vale a dire, alle tre rette sulle quali trovansi le forze $A - X$, $B - Y$, $C - Z$ corrispondono le coordinate

$y = \frac{M-N}{A-X}$, $z = \frac{P-Q}{A-X}$, $x = \frac{M-V}{B-Y}$, $z = \frac{R-S}{B-Y}$, $y = \frac{R-T}{C-Z}$, $x = \frac{P-U}{C-Z}$,

supposto $bx + b'x' + b''x'' +$ ec. $= N$,

$ab + a'b' + a''b'' +$ ec. $=$ M, $ac + a'c' + a''c'' +$ ec. $=$ P,
$cx + c'x' + c''x'' +$ ec. $=$ Q, $bc + b'c' + b''c'' +$ ec. $=$ R,
$cy + c'y' + c''y'' +$ ec. $=$ S, $bz + b'z' + b''z'' +$ ec. $=$ T,
$az + a'z' + a''z'' +$ ec. $=$ U, $ay + a'y' + a''y'' +$ ec. $=$ V.

Ma la risultante dee passare pel punto d'incontro delle tre forze suddette, passerà adunque pel punto corrispondente alle coordinate $y = \frac{M-N}{A-X} = \frac{R-T}{C-Z}$, $x = \frac{M-V}{B-Y} = \frac{P-U}{C-Z}$, $z = \frac{P-Q}{A-X} = \frac{R-S}{B-Y}$ (si possono prendere tanto i primi quanto i secondi di questi valori delle coordinate, perchè le forze hanno una sola risultante); cioè rappresentate colle equazioni $y' = T'x' + D'$, $z' = l'x'' + H'$ le projezioni sui piani xy, xz della retta di cui si parla, avrassi $\frac{M-N}{A-X} = T'\frac{M-V}{B-Y} + D'$, $\frac{P-Q}{A-X} = l'\frac{P-U}{C-Z} + H'$, ossia $D' = \frac{M-N}{A-X} - T'\frac{M-V}{B-Y}$, $H' = \frac{P-Q}{A-X} - l'\frac{P-U}{C-Z}$: di più la sua projezione sul piano xy, cioè la retta avente per equazione $y' = T'x' + D'$ fa coll'asse delle x un angolo eguale a quello che fa la diagonale del rettangolo, che serve di base al parallelepipedo rettangolo (*Prop. IV*); cioè un angolo avente per tangente trigonometrica $\frac{B-Y}{A-X}$; sarà pertanto T' che rappresenta questa tangente eguale a $\frac{B-Y}{A-X}$, e per la stessa ragione $l' = \frac{C-Z}{A-X}$. Vale a dire $T' = \frac{B-Y}{A-X}$, $l' = \frac{C-Z}{A-X}$, $D' = \frac{V-N}{A-X}$, $H' = \frac{U-Q}{A-X}$; e perciò le due equazioni cercate saranno $y' = \frac{B-Y}{A-X} \cdot x' + \frac{V-N}{A-X}$, $z' = \frac{C-Z}{A-X}x' + \frac{U-Q}{A-X}$:

Essendo nelle due equazioni $y = \frac{B-Y}{A-X}x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $y' = \frac{B-Y}{A-X}x' + \frac{V-N}{A-X}$ i coefficenti delle x, x' eguali, e rap-

presentando essi le tangenti degli angoli, che le due projezioni sul piano xy fanno coll'asse delle x, saranno queste projezioni parallele; per cui le due linee δ, R porzioni di quelle rette, si troveranno sopra due piani perpendicolari a quello delle x, y, e tra loro paralleli. Per la medesima ragione le stesse rette troveransi su di due piani che saranno similmente paralleli, e perpendicolari al piano ortogonale xz; giacchè i coefficenti delle x, x' nelle equazioni $z = \frac{C-Z}{A-X}x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$, $z' = \frac{C-Z}{A-X}x' + \frac{U-Q}{A-X}$ delle loro projezioni sullo stesso piano sono pure eguali. Ma l'intersezione dei piani espressi dalle equazioni $y = \frac{B-Y}{A-X}x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $z = \frac{C-Z}{A-X}x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$ è la retta che passa pei due centri g, G, e quella degli espressi dalle due altre $y' = \frac{B-Y}{A-X}x' + \frac{V-N}{A-X}$, $z' = \frac{C-Z}{A-X}x' + \frac{U-Q}{A-X}$ è la retta sulla quale trovasi la risultante delle forze; saranno adunque queste due linee parallele; quindi ancora le loro porzioni δ, R. Ciò ec.

Adunque, la risultante unica di un numero qualsiasi di forze applicate ai punti di un sistema rigido qualunque è sempre parallela alla retta, che passa pel centro di gravità delle prime estremità di esse e per quello delle seconde, ed è eguale a tante volte la distanza di questi due centri, quante sono le forze stesse.

Proposizione VI Problema.

In quali casi la R risultante si troverà sulla retta δ, che unisce i due centri g, G?

Soluzione.

Sappiamo, che due rette coincidono nello spazio, quando abbiano le stesse equazioni; dunque la R coinciderà colla δ semprecchè le grandezze, le direzioni, ed il numero delle forze ridurranno alla stessa equazione, tanto le due $y = \frac{B-Y}{A-X} x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $y' = \frac{B-Y}{A-X} x' + \frac{V-N}{A-X}$, quanto le due altre $z = \frac{C-Z}{A-X} x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$, $z' = \frac{C-Z}{A-X} x' + \frac{U-Q}{A-X}$; cioè accadrà la suddetta coincidenza tutte le volte, che saranno soddisfatte le due equazioni $n(V-N) = AY-BX$, $n(U-Q) = AZ-CX$ risultanti dall'uguagliare tra loro i termini $\frac{V-N}{A-X}$, $\frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, e $\frac{U-Q}{A-X}$, $\frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$, i quali sono i soli nelle equazioni delle projezioni in generale disuguali. Eliminando la n dalle equazioni trovate, si avrà la $(U-Q)(AY-BX) = (V-N)(AZ-CX)$ esplicitamente indipendente dal numero delle forze, la quale potrà rimpiazzare una delle stesse equazioni.

OSSERVAZIONE II

Senza alterare l'ordine tenuto nelle Proposizioni espresse, si poteva supporre a ciascun dei punti A B C... del sistema applicato un numero qualunque di forze, e poi ricavare dalle loro dimostrazioni quelle delle Proposizioni dimostrate, come casi particolari; ma con ciò si sarebbe sacrificata la semplicità ed in parte ancora la chiarezza delle dimostrazioni, e nulla sarebbesi acquistato rapporto alla generalità; giacchè si possono ricavare quelle Proposizioni dalle dimostrate, egualmente come corollari. Infatti, se al punto A del sistema vi fossero applicate tutte le forze $F, F', F'', \ldots F^{(s)}$,

basterebbe supporre nelle dimostrazioni date $a = a' = a'' = \ldots a^{(s)}$. $b = b' = b'' = \ldots b^{(s)}$, $c = c' = c'' = \ldots c^{(s)}$; ciò che per nulla le altererebbe, perchè esse si sono fatte indipendentemente da tutte le relazioni delle coordinate $a, a', a'', \ldots b, b', b'', \ldots c, c', c'', \ldots$. Vale a dire, se al punto A del sistema vi saranno applicate tutte le forze F, F′, F″, ... $F^{(s)}$, le dimostrazioni date delle Proposizioni abbraccieranno il caso di cui si parla, senza nessuna alterazione, nominando questo punto, A per la forza F, B per la F′; e così delle altre.

OSSERVAZIONE III

Quantunque le supposizioni di $a = a' = \ldots a^{(s)}$, $b = b' = \ldots b^{(s)}$, $c = c' = \ldots c^{(s)}$ non alterino le Proposizioni sciolte, nulladimeno in forza di esse si potranno sostituire alle quantità $am + a'm + \ldots a^{(s)}m$, $a + a' + \ldots a^{(s)}$, $bm + b'm + \ldots b^{(s)}m$, $b + b' + \ldots b^{(s)}$, $cm + c'm + c''m + \ldots c^{(s)}m$, $c + c' + \ldots c^{(s)}$ le altre $a \, . \, sm$, sa, $b \, . \, sm$, sb, $c \, . \, sm$, sc; cioè si potranno abbreviare le dimostrazioni, supponendo collocato il peso sm al punto A al quale sono applicate s forze; vale a dire, basterà supporre in generale le estremità A, B, C, ... caricate di pesi proporzionali al numero delle forze ad esse concorrenti. Simili riflessioni si faranno, se più delle forze F, F′, F″, ... applicate ai diversi punti A, B, C, ... del sistema, termineranno agli stessi; ossia se diverse delle seconde estremità A′, B′, C′, ... coincideranno.

Da queste riflessioni si ricava la elegantissima ed utile Proposizione seguente: " Trovati separatamente i centri di gravità delle prime e delle seconde estremità delle forze, valutandole in ragione del numero delle forze ad esse concorrenti, ed uniti questi due centri, avrassi una retta parallela alla risultante di tutte le forze (si suppone sempre sola) e che ripetuta tante volte quante saranno le forze, darà la grandezza della stessa risultante ".

CONSEGUENZE.

1.ª Alle forze F, F', F'', ... $F^{(n-1)}$ applicate ai punti di un sistema rigido sia che si faccino o no equilibrio, se ne potranno sostituire delle altre $f, f', f'', \ldots f^{(n-1)}$, e non si altererà nè la grandezza nè la direzione della loro risultante, purchè la direzione e lunghezza della δ rimanga la stessa. Così, se le forze AB', BC', CA', ... avranno una sola risultante, come supponghiamo che l'abbiano le altre AA', BB', CC', ... sarà essa eguale e parallela a quella di queste ultime; perchè i centri di gravità delle estremità A, B, C, ... A', B', C', ... sono gli stessi di quelli delle altre A, B, C, ... B', C', A', ...

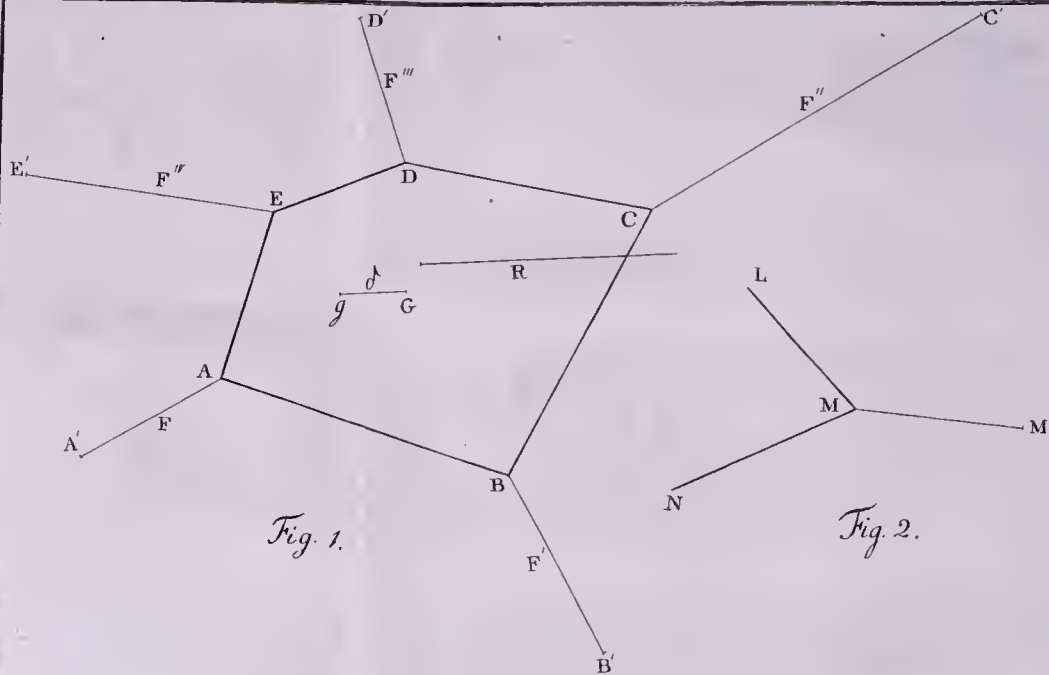
2.ª Se tutte le forze F, F', F'', ... concorreranno, cioè se sarà $a=a'=a''=\ldots$, $b=b'=b''=\ldots$, od $x=x'=x''=\ldots$, $y=y'=y''=\ldots$, $z=z'=z''=\ldots$, la risultante R non solo passerà per il punto a cui concorrono tutte le forze F, F', F'', ..., come è naturale, ma coinciderà colla δ; imperciocchè, la prima supposizione dà $A=na$, $B=nb$, $C=nc$, $M=nab$, $N=bX$, $P=nac$, $Q=cX$, $R=nbc$, $S=cY$, $T=bZ$, $U=aZ$, $V=aY$, e la seconda $X'=nx$, $Y=ny$, $Z=nz$, $N=xB$, $Q=xC$, $S=yC$, $U=zA$, $T=zB$, $V=yA$, i primi dei quali valori sostituiti nelle equazioni delle condizioni espresse nell' ultima Proposizione danno $(aZ-cX)(naY-nbX)=(aY-bX)(naZ-ncX)$, $n(aY-bX)=naY-nbX$, ed i secondi $(zA-xC)(Any-Bnx)=(Ay-Bx)(Anz-Cnx)$, e $n(Ay-Bx)=Any-Bnx$ equazioni identiche.

Questo corollario costituisce il Teorema (accennato al principio) di *Leibnizio* sulla composizione del moto, riportato dallo stesso autore nel terzo Tomo delle sue Opere.

3.ª Se le forze F, F', F'', ... si faranno equilibrio, il centro di gravità G delle prime estremità coinciderà con quello delle seconde g; perchè al valore di $R=o$, corrisponderà quello di $\delta=o$ in virtù della equazione dimostrata nella

Fig. 2.

Fig. 1.

Fig. 2.

Proposizione IV. Così tutte le volte che si avrà $\delta = 0$, avrassi pure $R = 0$.

4.ª Se tutte le forze $F, F', F'', \ldots$ applicate allo stesso punto si faranno equilibrio, il centro di gravità delle seconde estremità $A', B', C', \ldots$ cadrà nel punto di comune applicazione .

Questo risultato, il quale è un caso particolare della terza conseguenza, si dee anch'esso a *Leibnizio* (veggasi l'aurea Meccanica di *Lagrange*).

RICERCHE PER CONOSCERE I RAPPORTI DELLE VELOCITÀ DELLE ACQUE IN ANDAMENTI NEI QUALI S'INCONTRINO DIFFERENTI ATTRITI.

MEMORIA

Del Sig. Dottor Francesco Focacci.

Presentata
li 26 Aprile 1810 dal Sig. Ottaviano Targioni Tozzetti ed esaminata dal Socio Sig. Venturoli.

§. I. Nell' adiacenza dell'Arno in Casentino ed in luogo contiguo all'acquedotto di un mulino, feci scavare 4 canali regolari e rettangoli AB, CD, EF, GH (*Fig. I*) destinati a ricever le acque da deviarsi dal Berignale PQRS.

§. II. Questi canali sono di egualissima capacità: lunghi piedi 80, larghi piedi $1\frac{1}{2}$, alti piedi $2\frac{1}{2}$ (1).

§. III. Il primo canale AB, la di cui sezione per larghezza, o sia spaccato o taglio MNPQ (*Fig. II*), ha i laterali murati, ed il fondo mattonato.

I laterali del secondo CD sono di terra, ed il di lui fondo coperto di arena.

Il terzo EF ha i laterali simili al secondo, ed è coperto di minuta ghiaja nel fondo.

Il quarto GH è coperto nel fondo con ghiaja più grossa.

§. IV. Questi canali oltre all'avere eguali le capacità e pendenze, hanno ancora i loro fondi disposti all'istesso livello, o sia determinati dalla medesima linea orizzontale.

§. V.

---

(1) Tal misura si riferisce al piede antico reale di Francia, che nel nuovo sistema di misure corrisponde a Chiliometri 0,324839.

§. V. Sì fatte disposizioni han per oggetto il conoscere la *velocità* con cui un medesimo volume d'acqua contenuta successivamente nei predetti canali AB, CD, EF, GH scorra per la lunghezza dei medesimi.

L'inclinazione o pendenza di questi canali è di pollici $3\frac{1}{3}$ per la lunghezza dei piedi 80, la quale ragguaglia a mezza linea per piede.

§. VI. Le testate superiori, o sieno imboccature A, B, C, D dei condotti che corrispondono al recipiente MM, sono armate di cateratte per regolar l'ingresso delle acque ritenute nel recipiente medesimo.

§. VII. È armato pure di cateratta il principal canale PQRS nella situazione XZ per introdurre le acque nel recipiente MM, nella quantità che possono esigere i varj esperimenti.

§. VIII. Le acque intromesse negli andamenti AB, CD, EF, GH si versan poi in amplo scavo KNO, per il quale sgorgano nel fiume in sito alquanto inferiore al luogo degli Esperimenti.

§. IX. Disposte in tal guisa le cose, chiusi le cateratte dei tre canali CD, EF, GH, lasciando aperta quella del canale murato AB.

Regolai in seguito la cateratta del principal canale PQRS in modo da far debordare nel recipiente MM quella porzione dell'acqua atta a riempirne la capacità.

Successivamente lasciai che quel medesimo volume d'acqua scorresse nei canali CD, EF, GH, aprendo con ordine una cateratta, e chiudendo quella del canale in cui aveva decorso.

Avendo posto un galleggiante con *ordine successivo* nei quattro canali, feci le seguenti osservazioni sopra la velocità delle acque che in quelli decorsero.

I.ª

Canale Murato.

La celerità dell'acqua scorrente per il canale murato AB trasportò il galleggiante per il Tratto di piedi 80 in 26 minuti secondi.

II.ª

Canale CD *con fondo arenoso.*

La celerità dell'acqua scorrente per CD trasportò il galleggiante per lo spazio di piedi 80 in 32 secondi.

III.ª

Canale EF *con fondo coperto di minuta ghiaja.*

La celerità dell'acqua per questo canale EF fece scorrere al galleggiante li piedi 80 in 38 secondi.

IV.ª

Canale GH *con fondo coperto di ghiaja di mezzana grossezza.*

La celerità dell'acqua nell'ultimo canale GH fece che il galleggiante trapassasse piedi 80 in 44 secondi.

§. X. Tali osservazioni evidentemente mostrano

I.° Che le celerità del medesimo volume d'acqua decorso successivamente dal canale murato AB negli altri canali CD, EF, GH, saranno in ragione inversa dei numeri

26, 32, 38, 44,

i quali rappresentano i tempi, che il galleggiante ha spesi nello scorrere li 80 piedi per ciascun canale.

II.° Che in conseguenza gli attriti, o impedimenti ritardanti il muovimento di quella massa d'acqua per i quattro differenti andamenti, saranno proporzionali ai medesimi numeri

26 , 32 , 38 , 44 ,

come che questi seguono la proporzione inversa delle velocità, e diretta dei tempi spesi dal galleggiante nel percorrere spazj eguali.

III.° Che l'ordine degli attriti seguendo quello della serie dei numeri

26 , 32 , 38 , 44

progrediente in proporzione aritmetica, seguono certamente per i canali CD, EF, GH l'ordine delle scabrosità dei loro fondi, le quali furon da me disposte con tale analogìa. La continuazione di quest'istessa analogìa ancora per rapporto al canale murato AB, è cosa affatto casuale, non avendoci io cooperato neppur con la più piccola diligenza. Si vede che la qualità del suolo piuttosto arenoso, su cui i canali si apersero fu causa che l'acqua incontrasse tanta difficoltà nello scorrere dal primo nel secondo canale, quanta ne incontrò nel passare dal secondo nel terzo ec.

IV.° Che confrontando il muovimento dell'acqua per il canale murato AB, ordinatamente al muovimento della medesima per gli altri canali CD, EF, GH, si hanno i seguenti rapporti

$$\frac{16}{13}, \frac{19}{13}, \text{ e } \frac{22}{13}$$

indicanti le differenze degli attriti che l'acqua incontra per essi. Confrontando il canale CD con gli altri EF, GH, si hanno le frazioni

$$\frac{19}{16}, \text{ e } \frac{22}{16}$$

esprimenti le diversità degli attriti, che l'acqua incontra, scorrendo in sabbia oppure in ghiaja ec.

§. XI. Con l'indicazione di questi Esperimenti si mostra

ove tendono le mie ricerche ed i miei desiderj. Mentre conosco quante differenze sianvi fra gli esperimenti fatti in piccolo, e quelli da farsi in grande, tento pure di osservare le diverse resistenze che l'acqua incontra mentre scorre per differenti andamenti: tento d'investigare le maniere onde ritrarre utili conseguenze per rimediare ai danni, e per arginare i fiumi che scorrono in ghiaja, e per far le necessarie operazioni con buon successo.

§. XII. Allorquando col mezzo d'esperienze si pervenisse a stabilire con la sicurezza di cui son suscettibili tali ricerche, il differente muovimento di eguali masse d'acqua che scorrono per un *alveo regolare*, e per altri *irregolari*, non sarebbe difficile agl' Idraulici, i quali già conoscono i lavori e ritegni occorrenti per contener l'acque nel primo letto, lo stabilire i lavori necessarj per contenerle in altro andamento.

§. XIII. Ed in vero ben si posson tra loro confrontare le velocità delle acque che scorrono in due diversi alvei. Allorquando si conosce la pendenza dei medesimi, si può sempre conoscere essendo le altre cose eguali, la diversa celerità che una medesima massa d'acqua acquisterebbe scorrendo per l'uno, o per l'altro.

Dal conoscere il carattere di due fiumi, si viene ancora in cognizione delle diverse masse d'acqua, e delle diverse escrescenze dei medesimi.

Così, mentre sappiamo che le velocità delle acque dei fiumi sono in ragion composta delle pendenze e altezze rispettive (supposte eguali le capacità e attriti dei loro alvei), noi conosceremo in tal guisa prossimamente il rapporto dei muovimenti delle medesime. Ora se a tal rapporto vi si unisse quello delle scabrosità dei due alvei, che potrebbe conoscersi col mezzo di osservazioni simili a quelle del §. XII, noi saremmo in grado di conoscere altresì la differenza dell' impeto delle due correnti.

§. XIV. Dietro tali avvertenze il perito che può formare i ripari nei fiumi di corso regolare secondo la pratica usuale

desunta dai *Precetti dei Galilei*, *Viviani*, *Guglielmini*, *Castelli*, *Zendrini* ec., potrebbe con savio discernimento estenderli ancora ai fiumi, che scorrono irregolarmente. Esso potrà tenere a calcolo il maggior impeto dei secondi, onde accrescerne proporzionatamente la stabilità e sicurezza, sia con l'aumentare le dimensioni, o sia con l'esporli all'azione della corrente sotto un angolo più acuto.

§. XV. Tutte le volte che io mi son trovato nel caso di ordinar lavori nei fiumi, mi son sempre prevalso dei risultati delle passate osservazioni con ottimo successo (§. IX). Con l'ajuto di quelli, e con le avvertenze coerentemente al §. XIII, ho procurato di acquistar adequata idea dell'impeto delle loro acque in comparazione dei fiumi, su i quali essendo stati fatti dei lavori con le regole dell'arte, avean prodotti i più salutari effetti.

Così ho avuto il piacere di conoscere l'utilità delle spese occorse, e di veder riparati quei mali che furon l'oggetto delle medesime.

§. XVI. È vero che per istituire il confronto dell'impeto delle acque di due fiumi, o almeno delle sezioni in cui sono o devon formarsi dei ripari, si rende necessario il conoscere il muovimento delle acque per essi.

Ma è altresì vero che trattandosi di fiumi di corso regolare, è agevole il determinare il muovimento della corrente, mentre potrebbe conoscersi la *media velocità* della medesima col mezzo delle due macchine da me proposte nel *Tomo XIII degli Atti della Società Italiana delle Scienze*. Vedremo in seguito come ci possiamo servire di quelli istrumenti per giungere a tale scopo.

§. XVII. Questi sono i mezzi che mi han servito di scorta in simili operazioni, e questi son quelli cui ho sempre riferito la stabilità e sicurezza dei lavori, che ho fatti eseguire tanto su i fiumi che nei torrenti.

Tentativi per conoscere i cambiamenti che han luogo nelle altezze e velocità delle Acque correnti, in correspettività dell'aumento e decremento delle masse delle medesime.

§. XVIII. Avendo tolta la ghiaja e sabbia poste nei canali CD, EF, GH (*Fig. I*) per eseguire l'esperienze già indicate, ridussi questi della medesima forma del canale murato AB, conservando loro l'eguaglianza delle capacità e pendenze, che abbiamo osservate ai §§. II, e IV.

§. XIX. Chiusi le cateratte dei canali CD, EF, GH, e lasciai aperta l'imboccatura dell'altro AB. Disposi in seguito la cateratta XZ in tal modo, che dal bordo $\Delta\beta$ si versasse nel recipiente MM l'acqua bastante a riempire perfettamente la capacità del canale aperto AB.

§. XX. Scorrendovi poi l'acqua, notai la di lei altezza unitamente allo spazio percorso da un galleggiante in un tempo dato T.

Aprii in seguito la cateratta del secondo canale CD, dando luogo alla totalità dell'acqua di scorrere ancora per quest' altro, ed alla divisione perciò in due parti eguali della medesima (§. XVIII). Decorrendo in tal guisa il fluido ripartito per i due canali AB, CD, osservai l'altezza, e lo spazio che il galleggiante scorreva per essi nel medesimo tempo T.

Successivamente alzando le cateratte dei canali EF, GH, e riducendo l'acqua del canale AB alla terza, e quarta parte della massa primiera, continuai ad osservare ordinatamente le altezze, e li spazj respettivi, che il galleggiante passava nell'istesso tempo T.

I risultati di queste Osservazioni vedonsi raccolti nella seguente

TAVOLA.

Stato dell'Acqua nel canale AB	Altezze corrispettive espresse in pollici e linee.		Spazj percorsi dal galleggiante nel tempo espresso da T eguale a 16 minuti secondi.		
	Pollici	Linee	Piedi	Pollici	Linee
Totalità dell'acqua o sia canale pieno.	23	$2\frac{1}{2}$	50	—	—
Metà dell'acqua.	22	3	26	1	6
Terza parte.	21	—	18	6	6
Quarta parte.	18	—	16	1	—

§. XXI. Dalla presente Tavola chiaramente apparisce:

I.° Che calando la massa o volume dell'acqua nella proporzione della *metà*, *terza*, *e quarta parte*, la velocità respettivamente considerata dovendo esser proporzionale alli spazj percorsi dal galleggiante in tempi eguali, sarà proporzionale alle lunghezze espresse da P, Q, R, S; qualora sia

P = Piedi 50

Q = (Piedi 26, Poll. 1, e Lin. 6)

R = (Piedi 18, Poll. 6, e Lin. 6)

S = (Piedi 16, e Poll. 1),

eguali cioè alli spazj che il galleggiante ha percorsi durante il tempo T, equivalente a 16 minuti secondi. E se riduciamo tutto in linee, il rapporto più approssimato di quelle velocità sarà indicato dai numeri

3600, 1881, 1335, e 1158.

II.° Che alla diminuzione del volume dell'acqua nella proporzione di

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ec.

le altezze della medesima seguono ordinatamente la proporzione dei numeri

$23\frac{7}{33}$, $22\frac{1}{4}$, 21, 18, ec.

E per maggior semplicità se supponghiamo che l'altezza dell'acqua del canale sia divisa in 278 parti eguali, alla prima divisione si deprimerà il livello di 11 delle suddette parti: alla seconda divisione, o sia quando l'acqua è scemata per $\frac{2}{3}$, la di lei altezza si è abbassata di 26 parti: e quando l'intiera mossa si è residuata alla quarta parte soltanto, la sua altezza si è depressa per 62 delle parti in cui fu divisa l'altezza segnata dalla totalità dell'acqua, e conforme si vede notato nella *Fig. II*, in cui è accennata la sezione per lunghezza BADC di tutta la massa dell'acqua scorrente.

§. XXII. Tali sono i risultati delle mie esperienze, i quali ho ancora verificati ripetendo le medesime con ordine inverso, e con l'esattezza possibile.

§. XXIII. È agevole a riguardo dei miei canali, il calcolare li abbassamenti, o elevazioni del livello dell'acqua, ancor nel caso che questa scemasse o crescesse in qualunque altro rapporto, oltre quello su cui si è formata la descritta Tavola.

In vero osservando la legge delle depressioni ivi indicate, si rileva esser quelle proporzionali alle ordinate AH, FI, GO della parabola AFGL normali a quel diametro LH che accenna il livello dell'ultima depressione dell'intiera massa dell'acqua, e la di cui lunghezza HL è $\frac{3}{5}$ della massima ordinata AH. Per esser di ciò pienamente convinti, basta gettar gli occhi sulla *Fig. II*, in cui la curva si vede tracciata.

§. XXIV. Procurai estendere ai canali assai più grandi le mie osservazioni, e costantemente trovai verificarsi ancora in questi l'istessa legge.

§. XXV. Per quanto sempre abbia pensato ad estenderle almeno ai fiumi di corso regolare, e di stabilire in tal forma con la possibile esattezza le leggi, che le acque osser-

vano

vano comunque scorrenti, mi son dovuto per ora contentare di ciò che ho fatto, mancandomi i mezzi per progredire come desidero .

§. XXVI. Diverse volte mi son portato allo sbocco in Arno di varj influenti in tempo di grandi escrescenze, all' oggetto di fare osservazioni in conformità della Tavola descritta . Ivi ho usate varie diligenze onde acquistare adequata idea delle rispettive masse d'acqua prima della scambievole unione : mi sono assicurato della loro velocità superficiale col mezzo dei galleggianti, ed ho veduto costantemente che le acque di volume presso che eguali, e scorrenti con egual velocità , dopo la riunione non decorrono con la somma delle velocità rispettive, come rilevasi dagli Esperimenti del Sig. *Gennetè* (1), ma con velocità notabilmente minore delle due insieme unite . L'altezza di livello nel recipiente si accresce proporzionatamente alla differenza che passa tra la velocità dopo la riunione, alla somma delle velocità rispettive avanti la riunione, come presso a poco viene indicato dalla Tavola superiormente osservata .

§. XXVII. Potei ripetere tali Osservazioni allo sbocco in Arno del *Fiume Era* allorchè questo aveva una piena due volte maggiore di quella che avesse l'Arno in cui sgorga.

In tal circostanza dopo avere attentamente esaminate le velocità dei due fiumi avanti la scambievole riunione, trovai con l'ajuto della *mia Tavola*, che la velocità dell'Arno dopo ricevuta l'acqua dell'Era, doveva essere accresciuta di *un piede e mezzo per secondo* . Fattone poi il riscontro col mezzo del galleggiante, trovai ciò esattamente verificato; come ebbi luogo di verificare ancora l'aumento dell'altezza di livello egualmente dalla Tavola rilevata .

§. XXVIII. Dopo questi e altri molti confronti che ho

---

(1) *Esperimenti sopra il corso dei Fiumi esposti in una Lettera diretta ad un Rappresentante, o sia Maestrato Olandese.*

avuto luogo di fare in rapporto ai risultati delle mie Esperienze con le acque scorrenti in canali e fiumi naturali, par certo che la differenza dei risultati che presenta la Tavola, con quelli che si otterrebbero esperimentando nei gran fiumi, debba essere di piccolissimo rilievo, e perciò trascurabile: tanto più poi si accresce la considerazione vantaggiosa per tali esperienze, quanto che per il loro oggetto oltre al potersi riguardare come superflua la rigorosa esattezza, ancora un errore piccolissimo in cose nelle quali è impossibile ottener la prova della precisione rigorosamente e matematicamente concepita, si può non curare come presso che di niuna importanza.

§. XXIX. Le molte esperienze fatte in Leyden dal Sig. *Gennetè*, e dettagliate nella Lettera indicata (§. XXVI), presentano presso a poco li stessi risultati. Egli nella sua casa fece li esperimenti: ivi aveva fatti costruire i canali, cui diede il nome di fiumi: questi essendo alquanto più piccoli de' miei, è cosa facile che ad esso sfuggissero alcuni riflessi che formano certe differenze fra i di lui, ed i miei risultati.

Comincia a trovare un aumento di livello nel recipiente allorquando la massa delle di lui acque sia divenuta *tre* volte maggiore: io osservo la variazione di altezza subito che il recipiente riceva dei confluenti, i quali apportino dell'acqua ancora al di sotto della metà, conforme rilevasi da quanto osservai ne' §§. XX e XXIII.

§. XXX. Il Sig. *Gennetè* in relazione del suo *Esperimento II, Part. I*, crede, che raddoppiandosi le acque del suo fiume si raddoppi la velocità della corrente, e per questo non si alteri il primiero livello. Ecco le sue parole = Dimostrano i miei Esperimenti che un gran fiume può assorbire tutte le acque di un altro egualmente considerabile, senza che tale accrescimento faccia punto alzare il predetto fiume, la larghezza del di cui alveo resti la medesima di prima.

Succede questo (continua egli), perchè l'influente avendo raddoppiata la quantità dell'acqua del fiume, ha parimente

raddoppiata la velocità del suo corso. In tal guisa non ha potuto alzarsi. = Questo è quello che non ho mai potuto verificare non solo ne' miei canali, ma nemmeno nei fiumi naturali.

Prosegue poi = Se mai si rigettassero li sperimenti del mio fiume artefatto, perchè sono in piccolo, anderò sul *Danubio* e farò osservare che l'*Inn*, il quale entra in questo fiume a Passavia, è un influente quasi grande egualmente che il Danubio stesso. Pure il letto di questo influente, cioè tra *Passavia* e *Lintz*, non è niente più largo del letto dell'Inn, che in esso sbocca; ma l'acqua vi scorre più velocemente =.

Continua a riportare varie altre osservazioni fatte sul *Reno* quando riceve le acque del *Meno*, e della Mosella presso *Magonza* e *Coblentz*, e ne conclude che per tali aumenti d'acque il Danubio, ed il Reno non crescono di altezza nè di larghezza.

§. XXXI. A niuno può cader dubbio su tal proposito, qualora l'osservazione si ristringa soltanto al *luogo della confluenza*. Ma per esser sicuri di non prendere sbaglio in tal ricerca a me sembra necessario:

I.° Che allorquando un fiume entra in un altro, già ha luogo per legge Idraulica un rigonfiamento reciproco di acque nella loro unione, per il quale riducendosi per necessità il confluente ed il recipiente all'istesso livello, si rende impossibile di conoscere ivi le vere ed assolute altezze respettive. E siccome tal rigonfiamento è sensibile per una estensione più o meno lunga, secondo che la pendenza degli alvei è maggiore o minore; così sarebbe essenzialmente necessario di conoscere ancor questa pendenza, all'oggetto di sapere quanto al di sopra della confluenza fosse necessario rimontare per scandagliarne le altezze naturali. Non parlando il *Sig. Genneté*, come pure verun altro che siasi in ciò occupato, di questa osservazione essenzialmente necessaria per conoscere in grande gli effetti delle acque riunite, pare o che

egli l'abbia creduta di poco rilievo, oppure che non siasi punto affacciata alla di lui mente.

II.° Che trattandosi di raddoppiamento di acque (e molto più poi se gl'influenti ne portassero in minor copia del recipiente) l'aumento di livello è così piccolo essendo prossimamente la ventesima terza parte dell'altezza, che non può conoscersi senza porvi molta attenzione, e senza riflettere al regurgito, che ha luogo superiormente alla confluenza medesima.

§. XXXII. Quando le acque nel fiume di Leyda eran divenute tre volte maggiori, l'altezza primiera si era accresciuta soltanto di una *quarantottesima parte* di quell'altezza medesima (*Part. II. Esperimento II.*). Nel mio canale si è alzata dell'*undecima parte e mezza:* ciò che apporta una differenza quasi di un *quarto*. Tal differenza maggiormente divien vistosa facendo il confronto dei risultati relativi al quadruplo o quintuplo aumento del volume primiero.

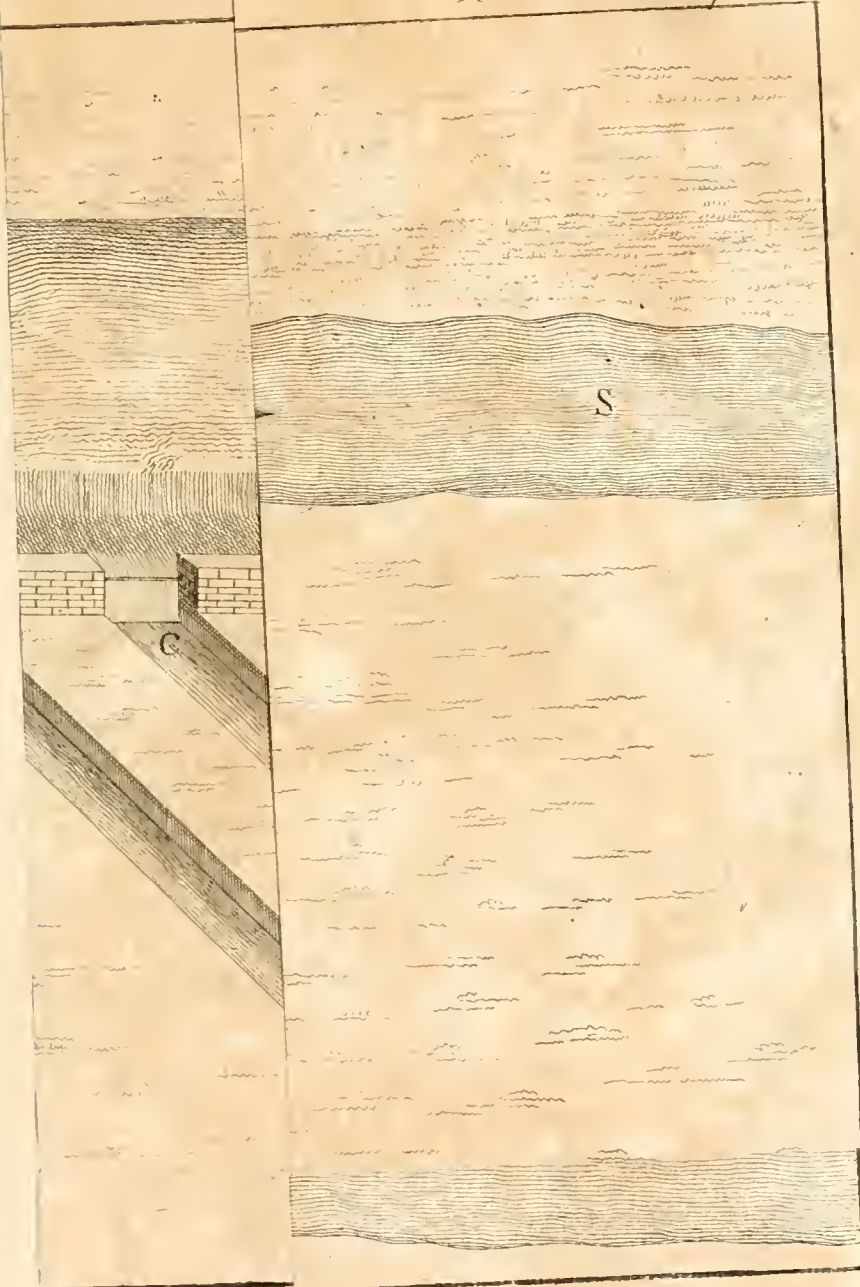
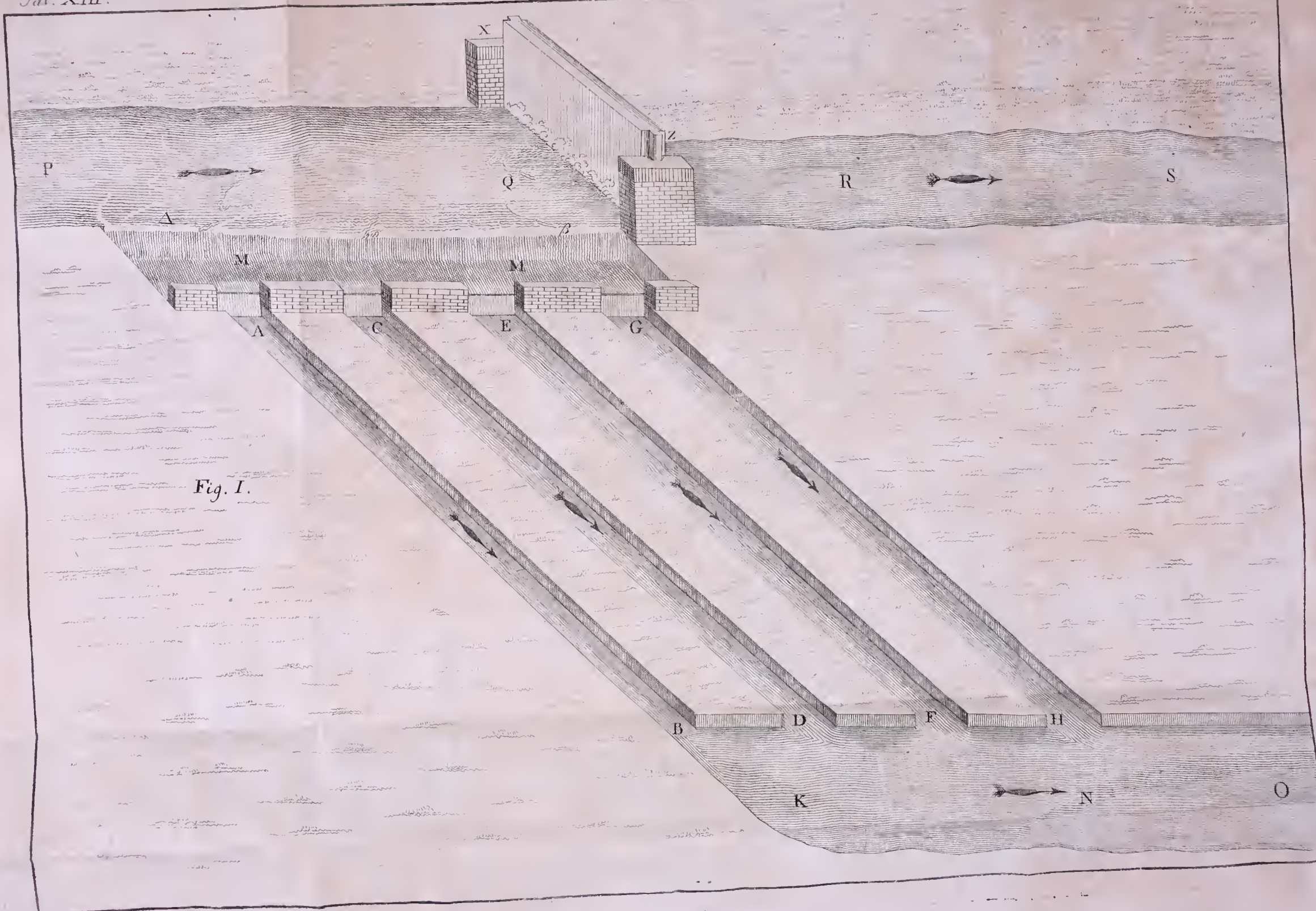
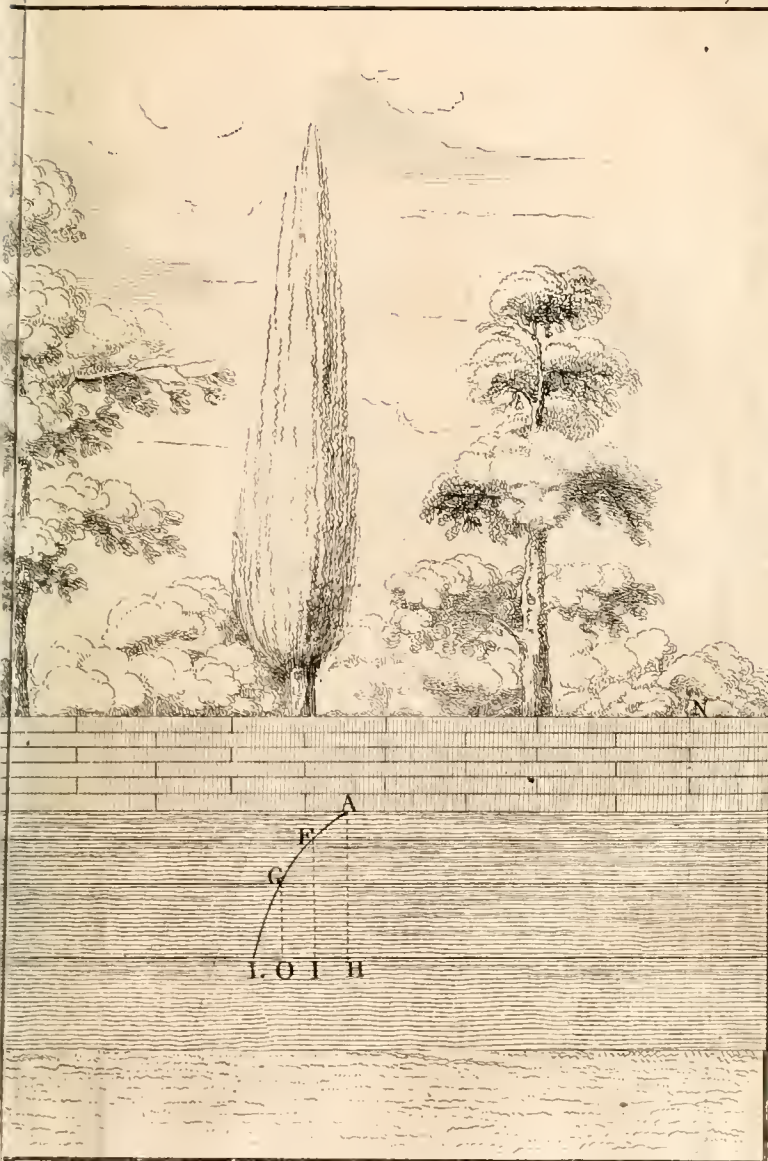
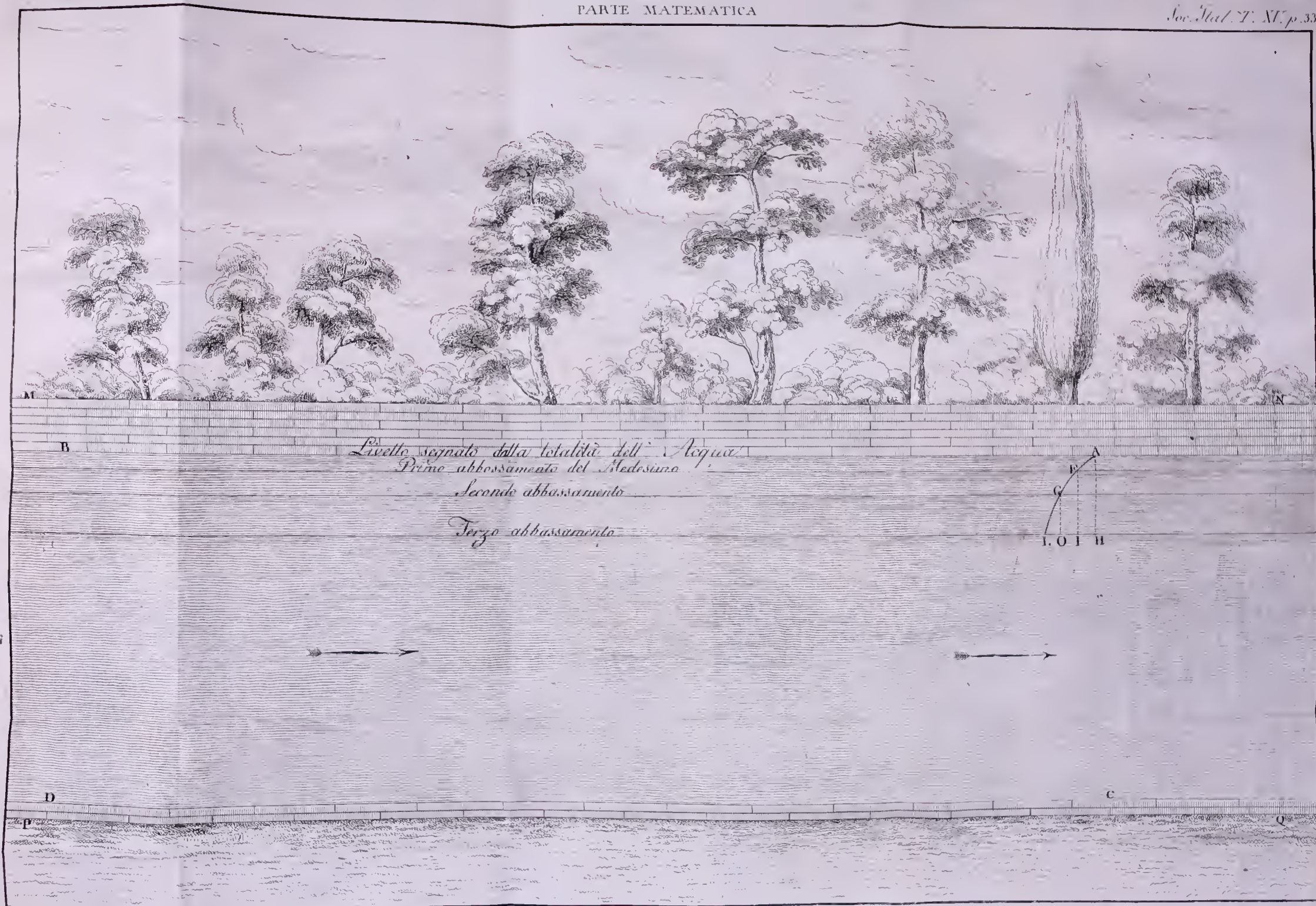
§. XXXIII. Le osservazioni che ho fatte su i fiumi, e specialmente sull'Arno, mi assicurano che i risultati della tavola (§. XX.) restano presso che comprovati in tutta la loro estensione. Ognuno può facilmente ripeterle e riscontrarle ancor col solo ajuto dei galleggianti, purchè si usi la necessaria circospezione per conoscere le diverse capacità e pendenze degli alvei dei confluenti, e delle alterazioni di corso che han luogo per la diseguaglianza di quelle. Usate tali diligenze si conosce, *che quanto la velocità delle acque riunite sarà minore della velocità, che esigerebbe l'aumentata massa nel recipiente onde fluire sotto l'istesso livello, tanto prossimamente, poste le altre cose eguali, si rialzerà il livello del fiume in cui scorrono riunite*. Se ciò non fosse, non potrebber passare eguali quantità d'acqua in tempi eguali nei confluenti e nel recipiente, ciò che sarebbe contrario all'ordin della natura.

§. XXXIV. Da quanto fin ora abbiamo avvertito si deduce:

S
C

Fig. I.

Soc. Ital. T. XV. p. 332.

M
N
B
Livello segnato dalla totalità dell' Acqua
Primo abbassamento del Medesimo
Secondo abbassamento
Terzo abbassamento
A
F
G
L O I H
D
C
P
Q

I.° Che col mezzo del galleggiante siamo avvertiti dell' aumento di velocità accaduto in un fiume, il quale riceve le acque di un altro (1).

II.° Che questa velocità non si aumenta nella proporzione che si aumenta la massa dell' acqua nel fiume principale, o sia recipiente, dentro ancora quelli stessi limiti, nei quali dovrebbe accadere secondo le osservazioni del *Sig. Genneté*, ma si accresce secondo quello che indica la tavola menzionata.

III.° Che l' aumento d' altezza in un fiume in cui ne sbocca un altro di eguali condizioni, è proporzionale alla differenza che passa tra la celerità del recipiente, e la somma delle celerità dei due confluenti. Qualora poi le condizioni sieno diverse, si rende necessario tenerle a calcolo coerentemente a quanto sopra abbiamo avvertito (§. XXXI.).

IV.° Che finalmente ci potremmo accostare tanto più da vicino alla cognizione degli effetti relativi alla riunione e suddivisione dei fiumi, quanto più da vicino si pervenisse a conoscere (e ciò appartiene non tanto a' miei che agli esperimenti del Sig. Genneté) il muovimento di quelle per essi, onde dedurne la proporzione delle *masse* o *volumi*, che si compongono, o che devono insieme comporsi e riunirsi.

§. XXXV. La determinazione della portata dei fiumi dipende dal conoscere il muovimento delle loro acque, il quale deriva dalla conoscenza della *media velocità* con cui scorrono. Nel seguito di questa memoria accennerò la maniera per conoscere tal celerità, mediante le considerazioni da farsi a riguardo dei risultati che si ottengono dall' uso delle mie due macchine sopra accennate *nel §. XVI.*

---

(1) E questo deve intendersi soltanto di quei fiumi che hanno gli alvei regolari, e per i quali le cause acceleranti e ritardanti il muovimento delle acque sieno eguali. Giacchè in tal caso non si vede ragione per cui i rapporti delle velocità superficiali di essi, debban esser diversi da quelli delle velocità medie, a cui rigorosamente è necessario riferirsi per conoscere non solo le masse e volumi acquei che si uniscono, ma ancora la velocità di ciaschedun fiume al punto della confluenza scambievole: questo riflesso è necessario per generalizzare maggiormente i risultati della tavola sopra descritta.

§. XXXVI. Per ora avvertirò soltanto che con somma intelligenza sono stati tolti ai gran fiumi quei *diversivi*, che nei trascorsi tempi furono ordinati per rimuovere il pericolo delle inondazioni. Questi eran più dannosi che utili, mentre per mezzo loro diminuendosi assai più la velocità che l'altezza delle acque, contribuivano al maggiore e più sollecito rialzamento del fondo degli alvei, ed in conseguenza a dar fomento ad una delle cause delle inondazioni.

OSSERVAZIONI E CALCOLI DI ALCUNE OPPOSIZIONI DE' PIANETI SUPERIORI

MEMORIA

Del Sig. Giovanni Santini

Presentata dal Sig. Cav. Ab. Cesaris li 2 Maggio 1810 ed approvata dal Sig. D. Pietro Cossali.

I.ª Opposizione di Urano osservata nella Regia Specola di Padova al Quadrante Murale di Ramsden di 8 piedi nell' Aprile, e Maggio 1807.

Questo Pianeta fu da me osservato in compagnia del Sig. Professor *Chiminello*, e confrontato alle stelle ξ' della Libra, ed α della Vergine. Lo stato del Cielo non ci permise di poterlo osservare ne' giorni contigui all' opposizione. Vi ho supplito applicando alle tavole del Sig. *De Lambre* inserite nella terza edizione dell' Astronomìa del Sig. *La-Lande* l' error medio delle medesime, e paragonando le posizioni di Urano così corrette a quelle del Sole prese dalle nuove tavole del *Bureau* delle Longitudini di Parigi, ho dedotto l' instante dell' opposizione. Le posizioni apparenti delle Stelle sono le seguenti.

ξ' della Libra AR appar. =	220° 59′ 31″, 6	secondo il ch. Sig. *Reggio*.
Declin. aust. =	11. 6. 19, 9	
α Vergine =	198° 46′ 24″, 7	secondo il ch. Sig. *Maskeline*.
Declin. aust. =	10. 9. 13, 6	

Ciò premesso passo ad esporre le osservazioni originali, avendo ridotto gli appulsi ai 5 fili del Micrometro al terzo filo mediante le distanze già determinate coi passaggi di molte stelle, e ridotte in tavole per ciascun grado di distanza al Zenit. Il pendolo è di *Le-Paute* a compensazione, rego-

lato sul tempo medio, ed il suo andamento potrà ricavarsi dai passaggi delle Stelle di confronto.

1807. Aprile.	Gior.	Pass. delle Stelle	Distanz. al Zen.	Pass. di Urano	Dist. al Zenit
ζ′ ♎	=... 12	13ʰ. 17′. 25″, 6	56°. 28′. 18″	= 12ʰ 20′ 47″ 30	55°. 41′. 11″ ::
α ♍	22	11 21 46, 10	55 31 7	= 11 52 9, 06	55 40 3
	23	11 17 51, 90	= 55 31 9	= 11 48 5, 20	55 39 10
	24	11 13 57, 36	55 31 11	= 11 44 0, 94	55 38 24
	26	11 6 7, 34	55 31 15	= 11 35 51, 54	55 36 11
	27	11 2 12, 37	55 31 15	= 11 31 47, 18	55 35 46
	28	10 58 16, 00	55 31 14	= 11 27 40, 80	55 34 48 ::
	30	10 50 24, 18	55 31 16	= 11 19 30, 05	55 33 20
Maggio.	— 1	10 46 27, 75	= 55 31 17	= 11 15 24, 90	55 32 18
	2	10 42 31, 92	= 55 31 19	= 11 11 19, 93	55 31 20

Da queste osservazioni ho dedotto le AR, e le declinazioni apparenti di Urano, e di qui le longitudini, e latitudini, come sono esposte nella seguente tavoletta. Si osservi, che le longitudini, e latitudini sono ridotte all'equinozio medio.

1807.	Gior.	Tempo Med.	AR app. di Urano.	Decl. Australe.	Long. osserv. dall'Eq. Med.	Lat. Bor. oss. dall'Eq. M.	Er. delle Tavole in long.	Er. delle Tavole in lat.
Aprile	12	12ʰ26′10″	206°.47′.41″,8	10°27′.13″,5	208°.36′.21″,8	0°.34′.33″,1	— 7″,9	—17″,0
	22	11 45 15	206.23.21,7	10 18 9,8	208.10.46,0	0.34.35,4	— 0,1	—19,4
	23	11 41 10	206.20.56,6	10 17 14,9	208. 8.13,8	0.34.31,1	— 0,6	—16,5
	24	11 37 5	206.18.29,6	10 16 26,9	208. 5.42,8	0.34.29,1	— 2,1	—14,0
	26	11 28 54	206.13.39,2	10 14 39,8	208. 0.35,9	0.34.27,2	+ 1,1	—12,9
	27	11 24 49	206.11.17,9	10 13 44,7	207.57.16,6	0.34.24,5	—10,7	—10,8
	28	11 20 43	206. 8.47,1	10 12 57,7	207.55.33,0	0.34.19,7	+ 2,3	— 6,6
	30	11 12 32	206. 4. 2,2	10 11 57,6	207.50.33,0	0.34.22,6	+ 3,1	—10,2
Magg.	1	11 8 26	206. 1.51,4	10 10 14,6	207.45. 1,3	0.34.24,8	— 3,3	—13,4
	2	11 4 21	205.59.27,9	10 9 14,6	207.45.37,7	0.34.35,4::	+10,3	—24,8
						Medio	— 0″,8	—15″,6

Si conchiude di qui, che l'error medio eliocentrico in longitudine fu = — 0″,7
in latitudine — 13″,8.

L'opposizione ebbe luogo il 18 Aprile 1807 a 20ʰ.49′.9″ t. medio al meridiano di Padova, momento, in cui la longitudine

tudine eliocentrica di ♅, e della ♄ erano = 208° 19′ 42″, 1; la latitudine geocentrica Boreale = 34′ 32″, 8; l'eliocentrica corretta dell'error medio = 32′. 42″, 1.

II.ª Opposizione di Saturno osservata nell'anno 1807 al Quadrante Murale.

Fu paragonato questo Pianeta colla stessa Stella, a cui fu riferito Urano; cioè con *α* Vergine, le cui osservazioni, se qui nuovamente trasferisco, ciò è per comodo dei confronti.

1807.	Giorni	App. di *α* Vergine al III.° filo.	Distanza al Zenit.	Appulso di Satur. al III.° filo.	Distanza lel lembo infer.
Aprile.	28	10ʰ 58′ 16″, 00	55° 31′ 14″	12ʰ 5′ 36″, 62	56°. 44′. 0″
	30	10 50 24, 18	55 31 16	11 57 9, 36	56. 41. 5
Maggio.	1	10 46 27, 65	55 31 17	11 52 55, 46	56. 39. 32
	2	10 42 31, 92	55 31 19	11 48 42, 82	56. 38. 16
	3	10 38 35, 66	55 31 20	11 44 28, 90	56. 36. 53

Per ridurre queste osservazioni ho adoperato la stessa posizione della Stella, che ci abbiamo sopra assegnata per Urano. Per calcolare il semidiametro di Saturno, mi sono servito delle determinazioni riferite dal Sig. *La-Lande* nella sua Astronomia fondate sulle osservazioni di *Pound*; così mi risulta il semidiametro di Saturno veduto in quel tempo dalla terra = 9″, 7; la sua paralasse = 0″, 8. Di più, nel calcolo delle longitudini, e latitudini mi sono servito dell'obbliquità apparente 23° 27′ 49″, 1 datami dalle nuove tavole del Sig. *De-Lambre*, e per ridurle all'equinozio medio, le ho applicato l'aberrazione — 13″, 5, e la nutazione in senso contrario — 17″, 2; con ciò ho ottenuto i seguenti resultati.

	Tempo Medio.	AR app. del centro di ♄	Decl. Aust. del centro.	Longit. dall' Eq. Med.	Lat. Bor.	Errori in longit.	Errori in latit.
28	11ʰ 38′ 41″	215° 39′ 29″.2	11° 21′ 51″,3	217°. 6′.13″,6	2° 40′ 58″,4	+ 24″,4	+ 5″.0
30	11 50 13	215 30 36.0	11 18 54,3	216.57.1,1	2 40 55,1	+ 33.3	+ 4,3
1	11 45 50	215 26 14.0	11 17 20,0	216.52.28,1	2 41 2,3	+ 33.9	− 5,1
2	11 41 27	215 22 0,5	11 16 2.2	216.48.7,1	2 40 55,3	+ 23.8	− 0,8
3	11 37 33	215 17 35,2	11 14 38.2	216.43.32,5	2 40 49,7	+ 27.3	+ 1,7
					Medio	+ 28,6	+ 1″,0

Le ultime due colonne indicano le differenze fra l'osservazione, e le tavole di Saturno del Sig. *De-Lambre* inserite nella terza edizione dell' Astronomia del Sig. *La-Lande*. Affine di dedurre da queste osservazioni l'istante dell'opposizione, si applichi alla longitudine di Saturno calcolata colle tavole per il 28 Aprile l'error medio, con che si otterrà la longitudine osservata $= 7^s . 7^\circ . 6' . 9'', 4$; la longitudine della terra nello stesso giorno fu $= 7^s . 7 . 41 . 48, 7$; la differenza $35' 39'', 3$ dovè esser in $13^h . 37' . 57''$ di tempo medio, supponendo il moto del Sole in $23^h 55' 46'' = 58' 3'', 4$; e quello di Saturno $= 4' 31'', 8$; onde risulta il moto relativo $= 62' 35'', 2$. Da questi dati risulta, che l'opposizione ebbe luogo il 27 Aprile a $22^h . 20' . 44''$ di t. m., tempo in cui la longitudine di Saturno, e della Terra contate dall'equinozio medio era $= 7^s . 7^\circ . 8' 44'', 2$; la latitudine geocentrica calcolata colle tavole, e corretta coll'error fu $= 2^\circ 41' 3'', 6$. L'error delle tavole nella longitudine eliocentrica di ♄ $= + 25'', 7$; nella latitudine $+ 0'', 9$.

III.ª Opposizione di Giove osservata al Quadrante Murale nell' anno 1807.

Nell' osservare questo pianeta, ho notato i suoi appulsi al primo, ed al secondo filo, le sortite dal 3, e 4 filo del micrometro; giacchè riducendo al terzo filo le osservazioni di tali istanti, la loro differenza dà il diametro apparente di Giove; la loro semisomma somministra il passaggio del centro. Ecco le osservazioni di questo Pianeta.

1807.	Giorni	ρ del Capro: pass. al III.° filo.	ρ del Capro: distanza al Zenit.	Giove: pass. del centro.	Giove: dist. del lembo sup.	η del Capro: pass. al III.° filo.	η del Capro: distanza al Zenit.	Diam. osser.
Luglio	25	12h 4′ 50″,8	63°.47′.47″	12h 29′ 11″,4	64° 23′ 56″	12h.40′.18″,4	65° 57′ 24″	3″, 1
	26	12 0 54, 1	63 47 45	12 24 43, 2	64 26 8	. . . . . .	. . . . . .	3, 5
	29	11 49 7, 3	63 47 42	12 11 21, 5	64 32 31	12 24 34, 8	65 57 23	3, 5
	30	11 45 11, 1	63 47 38±	12 6 54, 4	64 34 30	12 20 39, 0	65 57 25	3, 1
	31	11 41 15, 7	63 47 40	12 2 27, 0	64 36 37	12 16 43, 4	65 57 25½	3, 25
Agosto	1	11 37 20, 5	63 47 39	11 57 59, 8	64 38 48	12 12 48, 0	65 57 29	3, 3
	2	. . . .	. . . .	11 53 32, 7	64 40 50	12 8 52, 5	65 57 29	. . .
	3	. . . .	. . . .	11 49 7, 4	64 43 0±	12 4 56, 5	65 57 23	. . .
	4	. . . .	. . . .	11 44 37, 4	64 45 32	12 1 0, 7	65 57 29	. . .
							Medio diam. di ♃	3″,26
							in Arco . .	48″,9

Le posizioni apparenti delle stelle di confronto mi risultano (partendo dalle posizioni medie assegnate loro dal sopra lodato Sig. *Reggio*), come segue.

ρ Capro AR app. = 304° 28′ 39″, 6 . . . Decl. Australe = 18° 26′ 17″, 5
η del Capro . . . . = 313 22 3, 1 . . . . = 20 36 13, 0.

Con questi dati ho trovato le posizioni di Giove esposte nella seguente tavoletta. Le colonne chiamate *errori in* AR, *ed in declinazione*, indicano la differenza fra l'AR calcolata colle tavole di *De-Lambre*, e l'osservata, e ciò in modo, che il segno — indichi una posizione calcolata minore dell'osservata, e viceversa.

1807.	Gior.	Tempo medio	AR app. oss. di ♃	Errore in AR	Decl. Austr. App. oss.	Err. in Decl.
Luglio	25	12h 31′ 18″	310° 34′ 48″, 7	— 2″, 7	19° 2′ 55″, 1	+ 8″, 2
	26	12 26 52	310 26 54, 6	+ 1, 4	19 5 5, 6	+ 3, 4
	29	12 13 29	310 3 9, 2	+ 9, 3	19 11 34, 1	+ 0, 8
	30	12 8 57	309 55 21, 3	+ 2, 7	19 13 34, 1	+ 5, 9
	31	12 4 35	309 47 24, 1	— 0, 4	19 15 41, 1	+ 5, 2
Agosto	1	12 0 7	309 39 21, 7	+ 2, 4	19 17 50, 2	+ 3, 8
	2	11 55 40	309 31 29, 8	+ 3, 2	19 19 49, 7	+ 9, 3
	3	11 51 14	309 24 8, 3	. . . . .	19 22 16 ±	. . . . .
	4	11 46 48	309 16 33, 1	. . . . .	19 24 32, 2	. . . . .
		Medio degli errori		+ 2″, 3		+ 5″, 2

Per dedurre da queste osservazioni l'opposizione di Giove,

ho calcolato l'errore in longitudine, ed in latitudine mediante le formule seguenti

$$d\lambda = (\cos.\varepsilon.\cos.D + \text{sen}.\varepsilon.\text{sen}.D.\text{sen}.A.\frac{dD}{\cos.\lambda} - \text{sen}.\varepsilon.\cos.D \times \cos.A.\frac{dA}{\cos.\lambda}; \quad d.L = \frac{\cos.A.\text{sen}.D.dD + \cos.D.\text{sen}.A.dA}{\text{sen}.L.\cos.\lambda};$$

ove ε, D, A, L, λ, esprimono rispettivamente l'obbliquità dell'ecclittica, la declinazione, l'ascensione retta, la longitudine, e la latitudine. Nel caso presente, essendo $\varepsilon = 23^\circ\ 28'$; $D = -19^\circ\ 15'$; $A = 309^\circ.50'$; $L = 307^\circ\ 14'$; $\lambda = -0^\circ\ 47'$; $dA = +2'',3$; $dD = -5'',2$, trovo $d\lambda = -5'',6$ e $dL = +1'',0$. Converrà pertanto diminuire la longitudine calcolata colle tavole di 1'',0, e la latitudine Australe di 5'',6, per avere le posizioni vere osservate. In tal guisa correggendo le posizioni dei giorni 30, e 31 Luglio, trovansi le posizioni seguenti

		Long. dall'Eq. M.	Lat. Aust. di ♃	Long. di ♁ — nut. + 20''
1807. 30 Luglio	= 12ʰ. 8'. 57''...	= 307°. 17'. 39'',8 =	0°. 47'. 12'',4 =	306° 46' 30'',2
31 Luglio	= 12 . 4 . 35	= 307 . 9 . 49 ,8 =	0 . 47 . 19 ,4 =	307 43 47 ,4
Differenze	= 23 . 55 . 38	= 0 . 7 . 50 ,0 =	7'',0	0 . 57 . 17 ,2

Onde risulta il moto composto = 65' 7'', 2; la differenza delle longitudini il dì 30 Luglio fu = 31' 9'', 6. Quindi l'opposizione dovè aver luogo il 30 Luglio a $12^h\ 8'\ 57'' + \frac{31'.9'',6}{65'.7'',2}(23^h.55'.38'') = 23^h.35'.54''$ t. m. di Padova, epoca in cui la longitudine di Giove, e della Terra contate dall'equinozio medio erano coincidenti, ed eguali a 307° 13' 54'', 9; la latitudine geocentrica del Pianeta era = 0°. 47'. 15'', 7. Australe.

IV.ª Opposizione di Urano accaduta in Aprile del 1808.

Nel fine del 1807 fu trasportato in faccia al quadrante murale un buon pendolo di *Grant* a compensazione, ed il pendolo di *Le-Paute*, di cui ci siamo fin qui serviti, fu destinato ad altri usi dell'osservatorio. Il pendolo di *Grant* è

esso pure regolato sul tempo medio, ed il suo andamento facilmente potrà esplorarsi dal passaggio delle Stelle. Le seguenti osservazioni sono secondo il solito ridotte al III.° filo mediante le distanze de' fili del micrometro già note.

	Giorni	Nomi di Stelle.	Pass. al III.° filo in temp. del pend.	Distanze al Zenit osserv.
Aprile.	11	α della ♍	11ʰ 54′ 35″, 44	55° 31′ 6″
		Urano	12 45 4, 70	57 33 5 ±
	12	Urano	12 41 6, 56	57 32 21
		μ ♎	13 14 15, 78	58 42 0
		ζ 1 ♎	13 19 26, 1:	56 28 0
	14	Urano	12 33 7, 41	57 30 46
		μ ♎	13 6 36, 13	58 42 05
		ζ 1 ♎	13 11 45, 75	56 28 20
	15	Urano	12 29 8, 31	57 29 45
		λ ♍ =	12 32 47, 53	57 50 26
	16	Urano =	12 25 7, 14	57 28 58
		λ ♍ =	12 28 56, 94	57 50 26
		μ ♎ =	12 58 55, 91	58 42 1
	26	Urano =	11 45 24, 20	57 20 18
		λ ♍ =	11 50 51, 06	57 50 24

Ho tratto le posizioni delle Stelle dal Catalogo del celebre Sig. P. *Piazzi*, che ridotte all'equinozio apparente, ed applicatavi l'aberrazione mi risultano, come segue:

α ♍ . . . AR app. = 198° 47′ 2″, 0 . . . Decl. Aust. app. = 10° 9′ 23″, 2
μ ♎ . . . . = 219 42 53, 1 . . . . = 13 20 35, 8
ζ1 ♎ . . . . = 221 0 20, 8 . . . . = 11 6 29, 6
λ ♍ . . . . = 212 11 43, 7 . . . . = 12 28 56, 5

Dietro questi dati ho trovato le ascensioni rette, e declinazioni di Urano, come sono esposte nella seguente tavoletta.

1808.	Giorni	Tempo Medio.	AR app.	Decl. Austr.	Long osserv. dall' Eq. M.	Latit. Bor.	Errori in Long.	Errori in Lat.
Aprile	11	12ʰ 45′ 52″	211° 26′ 26″, 0	12° 11′ 28″, 4 ±	7ˢ 3° 28′ 56″, 3	0° 31′ 56″ ±	— 2″, 0	. . . .
	12	12 41 35	211 24 4, 0	12 10 53, 5	7 3 26 34, 1	0 31 41	— 5, 8	— 16″
	14	12 33 26	211 19 15, 4	12 9 17, 3	7 3 21 36, 2	0 31 35	— 6, 9	— 10
	15	12 29 20	211 16 46, 4	12 8 14, 3	7 3 18 57, 6	0 31 45	+ 1, 1	— 20
	16	12 25 14	211 14 12, 1	12 7 28, 0	7 3 16 20, 0	0 31 38	+ 7, 1	— 13
	26	11 44 18	210 49 47, 5	11 58 48, 8	7 2 50 56, 6	0 31 37	+ 15, 2	— 17
						Medio =	+ 1″, 4	— 15″, 2

Per calcolare le longitudini, e latitudini geocentriche di Urano qui sopra esposte mi sono servito dell'obbliquità apparente 23° 27′ 47″, 3, come mi è risultata dalle nuove tavole del Sig. *De-Lambre*, e per ridurre le longitudini apparenti all'equinozio medio vi ho applicato in senso contrario la nutazione — 14″, 6, e l'aberrazione — 14″, 8. L'ultime due colonne rappresentano il confronto delle osservazioni fatto colle tavole del Sig. *De-Lambre* inserite nella III edizione dell'Astronomia del Sig. *La-Lande*; il segno + indica una posizione calcolata maggiore, e viceversa. Si rileva di qui, che l'errore eliocentrico delle tavole in longitudine fu in quel punto dell'orbita + 1″, 3; in latitudine — 14″, 2, non molto differente da quelli, che si sono trovati nell'opposizione dello scorso anno. Riguardo poi alla latitudine, credo opportuno di notare, che io la presi sempre, come dalla tavola mi risultò senza tener conto della variazione secolare dell' inclinazione. Correggendo col sopranotato errore la longitudine eliocentrica delle tavole di Urano, e paragonandola alle posizioni del Sole del *Bureau* delle longitudini di Parigi, mi risulta l'instante dell'opposizione di Urano il 22 Aprile a $21^h\,41'\,56''$ t. m., mentre, che la longitudine della Terra, e di ♅ si trovavano d'accordo, essendo ciascuna $= 7^s.7^\circ.0'.11'',8$.

V.ª Opposizione di Saturno del 1808 *accaduta nel Maggio di detto anno.*

Come tutte le precedenti osservazioni; si fecero queste al quadrante Murale, e per determinare il diametro apparente del Globo di Saturno, si osservò l'appulso del lembo al primo, e secondo filo, e la sortita dal quarto, e quinto. La differenza di questi instanti ridotti al terzo filo dava il diametro apparente, la loro semisomma il passaggio del centro. Dopo ciò passiamo ad esporre le osservazioni originali.

1808.	Giorni	Nomi delle Stelle.	Tempo del Pendolo.	Distanze al Zenit.	Diam. di Satur. in tempo.	
Maggio.	2	α^2 ♎	$12^h\ 0'\ 29'',56$	$60°.35'.32''$		
		ν' ♎	12 15 6 ,28	60 51 31		
		Saturno	. . . .	60 34 40	. . . . . .	Lembo superiore di ♄
	3	α^2 della ♎	11 55 40 ,32	60 35 33		
		ν' ♎	12 11 17 ,56	60 51 33 ½		
		Saturno	12 25 46 ,86	60 33 27	1'', 35	
	4	α^2 della ♎	11 51 51 ,30	60 35 31 ½		
		ν' della ♎	12 7 28 ,18	60 51 30,5		
		Saturno	12 21 40 ,65	60 32 15	1'', 45	
	5	α^2 della ♎	11 48 0 ,85	60 35 32,8		
		ν' della ♎	12 3 37 ,92	60 51 32,5		
		Saturno =	12 17 32 ,51	60 31 3	1'', 55	
	6	α^2 della ♎	11 44 10 ,80	60 35 31,5		
		ν' della ♎	11 59 47 ,90	60 51 33,5		
		Saturno =	12 13 24 ,14	60 29 52	1 , 45	
	9	α^2 della ♎	11 32 40 ,03	60 35 33		
		γ della ♎	12 17 5 ,05	59 29 44		
		η della ♎	12 25 32 ,64	60 24 18		
		Saturno	12 0 59 ,78	60 26 19,5	1 , 75	
	11	ν' della ♎	11 40 36 ,15	60 51 35		
		γ della ♎	12 9 23 ,55	59 29 45		
		Saturno	11 52 42 ,90	60 24 2	1 , 40	
	13	ν' della ♎	11 32 54 ,20	60 51 32,5		
		γ della ♎	12 2 41 ,63	59 29 44		
		Saturno	11 44 25 ,35	60 21 36,5	1 , 10	
				Medio =	1'',436	

In tutte le precedenti osservazioni è da notarsi, che la distanza dal Zenit di Saturno è sempre quella del lembo superiore. Per dedurre le ascensioni rette, e le declinazioni del centro di Saturno, ho calcolato le posizioni apparenti delle Stelle di confronto mediante il Catalogo del celebre Profess. *Piazzi*, e mi risultano come segue

	AR apparente	Decl. Australe app.
AR apparente di α^2 ♎	= 220° 4' 53'',3	Decl. Australe app. = 15° 14' 17'',0
di ν' ♎	= 223 59 48 ,5	= 15 30 15 ,3
di γ ♎	= 231 12 49 ,6	= 14 8 24 ,3
di η ♎	= 233 20 8 ,0	= 15 3 6 ,0.

Aggiungendo alle declinazioni osservate del lembo superiore di Saturno il semidiametro osservato 10'', 77, e togliendo la paralasse d'altezza 0'',84, ho ottenuto i risultati esposti nella seguente tavoletta.

1808.	Giorni	Tempo Medio.	AR app. di ♄	Decl. Aust.	Long. oss. dall' Eq. M.	Lat. Bor.	Err. delle Tavole in longit	Errori in lat.
Maggio.	3	12h 23′ 47″	227° 37′ 43″,0	15° 12′ 18″,8	229° 22′ 44″,1	2° 28′ 47″,0	+ 16″,7	+ 1″,4
	4	12 19 39	227 33 27,2	15 11 11,6	229 18 28,0	2 28 45,4	+ 5,1	+ 2,5
	5	12 15 50	227 28 59,1	15 9 55,7	229 13 58,2	2 28 49	+ 6,3	− 2,0
	6	12 11 7	227 24 24,0	15 8 44,7	229 9 23,0	2 28 45,4	+ 11,7	+ 0,5
	9	11 57 25	227 10 55,1	15 5 15,1	228 55 53,4	2 28 36,3	+ 16,7	+ 4,4
	11	11 49 57	227 1 59,4	15 2 52,9	228 46 57,0	2 28 32,8	+ 13,9	+ 2,7
	13	11 41 30	226 53 3,5	15 0 28,9	228 37 59,1	2 28 30,5	+ 13,5	− 1,2
						Medio =	+ 12″,0	+ 1″,2

Per calcolare le sopra esposte longitudini, e latitudini di Saturno, mi sono servito dell' obbliquità apparente dell' ecclitica = 23° 27′ 46″, 6 calcolata colle tavole del Sig. *De-Lambre*, delle quali pure ci siamo serviti per calcolare i luoghi di Sole (*). Le ultime due colonne rappresentano gli errori delle tavole del medesimo Sig. *De-Lambre* esposte nella III edizione dell' Astronomia del più volte lodato Sig. *La-Lande*. Siccome l' opposizione ebbe luogo il 9 Maggio, per trovare il vero momento della medesima ho preso la differenza fra le longitudini del Sole, e di Saturno, che erano così espresse

9 Maggio. 11h 57′ 25″ longit. calcol. di Saturno	=	228° 56′ 10″, 1
Errore medio		− 12, 0
Longitudine vera Geocent.		228° 55′ 58″, 1
Longitudine di Terra . . . . + 20″	=	229 4 58, 9
Differenza	=	9′ 0″, 8

Col moto orario del Sole 2′ 24″, 77, e col moto orario di Saturno 11″, 29 formo il moto orario relativo 2′ 36″, 06, e quindi deduco, che l' istante dell' opposizione ebbe luogo il 9 Maggio a 8h 29′ 29″, essendo allora la longitudine vera di Saturno, e della Terra = 228° 56′ 37″, 2 contata dall' equinozio

(*) Calcolando i luoghi del Sole con le accennate Tavole, mi è avvenuto di notare il seguente error d' impressione, che non trovo segnato nè sull' *errata corrige* premessa alle tavole, nè sulla raccolta degli errori, che ha dato il cel. Sig. *Zach* nella edizione delle sue tavole Lunari fatta dai Sigg. *Molini, Landi* . . . Tav. XXII, 4.s 5° . . . rag. vett. = 1,0067 . . . Leggi 1,0097.

nozio medio; e la latitudine boreale 2° 28' 39", 7 . L'errore eliocentrico delle tavole in longitudine era = + 11", 2 ; in latitudine poi = + 1", 1 . L'aberrazione della Luce di Saturno applicata alle longitudini osservate fu = — 13", 8

La nutazione in senso contrario — 14", 2 .

VI.ª Opposizione del nuovo Pianeta Cerere osservata nell' anno 1808.

Avendo io dovuto in quest' estate allontanarmi dall' Osservatorio non potei principiare ad osservare i nuovi Pianeti, se non che tardi, de' quali i soli Cerere, e Vesta furono da me riconosciuti .

Le osservazioni originali di Cerere fatte al quadrante Murale sono esposte nella seguente tavoletta . Il pendolo è al solito quello di *Grant* regolato sul tempo medio, ed il suo andamento potrà rilevarsi dal passaggio delle Stelle di confronto .

1808.	Giorni	Nomi di Stelle .	Tempo del Pendolo .	Distanza al Zenit .	Barom.	Term.
Agosto .	3	Cerere =	12h 23' 55", 15	74° 9' 0"	28p . 3l	18°, 0
	4	Cerere =	12 19 3 , 64	74 15 48	28 . 3	19 , 4
		θ ♓ Australe	12 35 22 , 69	77 6 1 .		
		ε ♓ . . . . . =	13 28 48 , 27	73 22 29		
	5	Cerere =	12 14 11 , 50	74 21 36	28 . 3	20 , 0
		θ ♓ =	12 31 22 , 91 =	77 6 5 , 5		
		ε ♓ . . . . . =	13 24 48 , 84 =	73 22 30		
	6	Cerere. . . =	12 9 18 , 86 =	74 27 21	28 . 3	20 , 3
		ε ♓ . . . . . =	13 20 49 , 33 =	73 22 30		
	7	Cerere. . . =	12 4 25 , 47 =	. . . .		
		θ ♓ . . . . =	12 23 22 , 86 =	77 5 58		
	9	o Microscopi	11 36 33 , 0 :	74 34 12	27 . 11	21 , 0
		Cerere. . . =	11 54 37 , 69	74 43 31		
		θ ♓ . . . . =	12 15 22 , 87	77 6 7		
	10	Cerere. . . =	11 49 43 , 92	74 49 5	28 . 0	20 , 4
		θ ♓	12 11 22 , 75	77 6 7		
	15	Cerere	11 25 18 , 50	75 11 45 , 2	28 . 1	19 , 5
		θ ♓	11 51 23 , 57	77 6 5		
	21	Cerere	10 56 19 , 64	75 34 3	28 . 1	17 , 8
		θ ♓	11 27 30 , 92	77 6 6 , 5		
	26	Cerere. . . =	10 32 26 , 28	75 47 0	28 . 0	18 , 6
		θ ♓	11 7 35 , 28	77 6 2		
Settemb.	26	Cerere	8 17 44 , 90	75 47 4		
		ω Capricorno	8 9 41 , 80	72 57 57	28 . 2	11 , 5

Per dedurre da queste osservazioni le posizioni apparenti di Cerere, ho calcolato le AR, e declinazioni apparenti delle Stelle partendo dai dati del più volte nominato Catalogo del Sig. Prof. *Piazzi*, ed ho ottenuto i seguenti risultati.

o Microscopio asc. retta app.	= 314° 23′ 12″, 0	Decl. Aust. = 29° 13′ 46″, 7
θ del Pesce Australe	= 324 7 31, 3	= 31 46 19, 7
ε del Pesce Australe	= 337 31 0, 2	= 28 1 56, 5

Ho confrontato queste osservazioni con gli XI elementi del cel. Astronomo Dott. *Gauss*, calcolando nell'ipotesi d'un orbita ellittica le ascensioni rette, e declinazioni apparenti affine di poterle confrontare con l'osservate, e trovansi nell'ultime due colonnette della sottoposta tavola i risultati di tali confronti, ove al solito il segno — indica una posizione calcolata minore dell'osservata, e viceversa. Soggiungeremo gli XI elementi già menzionati per comodo di que' Lettori, che non gli avessero avuti sott'occhio, poi passeremo all'esposizione delle osservazioni ridotte.

Epoca 1806 al meridiano di *Seeberg* ...	108° 19′ 34″, 7
Afelio 1806	326 37 59, 0
Nodo ascendente 1806	80 53 23
Inclinazione	10 37 33, 7
Moto annuo tropico	78 9 23, 3
Moto diurno	12 50, 8584
Eccentricità	= 0,0783486
Logar. semiasse maggiore	= 0,4430728

	Giorni	Temp. Med.	AR app. oss. di ♀	Sua Decl. Aust.	Err. in AR	Err. in decl.
Maggio.	3	12ʰ 28′ 17″	320° 14′ 59″, 7	28° 48′ 29″, 1	— 11′ 9″, 3	+ 4′ 14″, 6
	4	12 26 43	320 2 0, 7	28 55 26, 1	— 11 18, 6	+ 4 11, 8
	5	12 21 54	319 48 50, 3	29 1 11, 6	— 11 26, 6	+ 4 13, 4
	6	12 17 4	319 35 24, 5	29 6 59, 5	— 11 19, 1	+ 4 5, 2
	7	12 12 17	319 22 23, 0:	....	— 11 34 ::	....
	9	12 2 37	318 55 14, 6	29 23 6, 8	— 11 34, 3	+ 4 13, 7
	10	11 57 47	318 41 54, 7	29 28 41, 3	— 11 42, 0	+ 3 48, 9
	15	11 33 43	317 35 10, 3	29 51 29, 1	— 11 11, 8	+ 4 13, 0
	21	11 6 2	316 18 27, 8	30 13 53, 2	....	....
	26	10 41 24	315 18 48, 9	30 26 59, 2	— 11 21, 4	+ 3 59, 7
Settemb.	26	8 26 48	312 7 12, 6	30 26 55, 8	....	....
				Medio ...	— 11′ 24″, 1	+ 4′ 7″, 5

Da questi errori, col mezzo delle formule differenziali già sopra riferite, ho dedotto l'error nella longitudine geocentrica — 11′ 1″, 2, e nella latitudine = + 49″, 3. Correggendo quindi con questi errori le longitudini calcolate per i giorni 4, e 5 Agosto, si avranno i seguenti risultati

		Tempo Med.	Long. Geoc. dall' Eq. M.	Latit. Aust. di ⚳	Long. di ☼ + 6′ + 20″ dalle tavole di *De-Lambre*.
Agosto.	4	12 26 43″	313° 26′ 19″, 6	12° 41′ 52″, 8	312° 18′ 8″, 9
	5	12 21 54	313 13 7, 8	12 43 45, 3	313 15 26, 6

Di qui si deduce, che l'opposizione ha avuto luogo il 5 Agosto a 11^h 34′ 48″, 5 momento, in cui le longitudini di Cerere, e della Terra erano le stesse ed uguali a 313° 13′ 33″, 8; la latitudine geocentrica Australe di Cerere fu = 12° 43′ 41″, 6. L'errore degli elementi ellittici ridotto al Sole in longitudine fu = — 7′ 13″, 6; in latitudine + 0′ 32″, 3.

Se per l'istante dell'opposizione si calcolano le perturbazioni in longitudine, e latitudine colle tavole del Sig. D.r *Gauss*, applicandole al luogo ellittico calcolato, e confrontandolo coll'osservato, si trova che l'errore eliocentrico in longitudine fu = — 1′ 2″, 8; in latitudine — 5″, 7. (*)

(*) Ho riferito qui quest' opposizione di Cerere, quantunque già si trovi esposta nell'eccellente Giornale del celebre Baron di *Zach* per il mese di Febbrajo 1809, perchè avendone riassunto il calcolo ho trovato qualche piccola differenza, e sopra tutto nelle perturbazioni prese dalle tavole del sullodato Sig. *Gauss*.

VII.ª Opposizione di Giove osservata nell' anno 1808.

Osservazioni originali ridotte al III.° filo del Quadrante Murale col metodo già superiormente esposto.

1808.	Gior.	82 ♒ Tempo di Grant.	Distanza al Zenit.	Balena Tempo di Grant.	Distanza al Zenit.	Centro di ♃ Tempo di Grant.	Distanza di Lembo Superiore.	Diamet. osserv.	
Agosto	30	12ʰ 7′40″,71	52°58′5″	12ʰ33′ 6″,51	57°51′51″	12ʰ17′36″,78	53° 6′ 1″	3″,03	
	31	12 3 41,47	52 58 2	12 29 7,61	57 51 51	12 13 9,00	53 9 36,5	2,88	
Sett.	1	11 59 42,39	52 58 2	12 25 8,15	57 51 53	12 8 40,32	53 12 44,0	2,88	
	4	11 47 43,76	52 58 0	12 13 9,47	57 51 49,5	11 55 13,74	53 22 4,5	3,18	
	5	11 43 45,35	52 58 0,5	12 9 11,17	57 51 46,0	11 50 45,85	53 25 10,0	.....	
	6	....	....	....	....	11 46 18,02	53 28 21,5	3,08	Nuvoloso
	7	11 35 48,73	52 58 1,5	12 1 14,57	57 51 50,8	11 41 51,02	53 31 23,0	2,83	
							Medio . .	=2″,98	

Nel ridurre queste osservazioni non ho tenuto conto della Stella Balena quanto all'ascensione retta, poichè essendo troppo forte la differenza di declinazione, la deviazione dello strumento rendesi troppo sensibile.

La posizione apparente delle Stelle del Catalogo più volte citato si ottiene, come segue

82 ♒ AR app. = 343° 9′ 29″, 0 Decl. Aust. = 7° 35′ 47″, 7
Balena . . . = ... = 12.29.59, 1

Per aver la declinazione del centro di Giove oltre di aver aggiunto alle declinazioni osservate del bordo superiore il semidiametro 22″, 5, ne ho tolto 1″, 7 per conto della paralasse d'altezza. Ho quindi calcolate le longitudini, e latitudini del Pianeta servendomi dell' obbliquità dell' ecclittica 23° 27′ 47″, 6, e riducendole all'equinozio medio coll' applicar l'aberrazione della luce — 10″, 8, e la nutazione — 13″, 1 alle longitudini osservate. Ho paragonato quest' ultime alle solite tavole, ed ho ritrovato i seguenti risultati.

1808.	Gior.	Tempo Med.	AR app. del centro di ♃	Decl. Australe.	Long. Media.	Latitudine Aust.	Er. delle Tavole in long.	Er. delle Tavole in lat.
Agosto	30	12ʰ27′ 1″	345°.38′.54″,9	7°43′ 52″,9	343°.47′.40″,7	. . . .	+ 4″,0	. . . .
	31	12 22 17	345 . 31 . 45 , 6	7 47 29 , 7	343 . 39 . 46 , 0	1°.28′.39″,1	+ 7 , 0	+10 , 7
Sett.	1	12 17 50	345 . 24 . 20 , 4	7 50 37 , 3	343 . 31 . 46 , 6	1 . 28 . 42 , 2	+15 , 5	+13 , 1
	4	12 5 36	345 . 2 . 17 , 2	8 0 0 , 3	343 . 7 . 59 , 7	1 . 28 . 57 , 0	+16 , 8	+15 , 3
	5	12 1 10	344 . 54 . 51 , 4	8 3 5 , 3	343 . 0 . 1 , 1	1 . 28 . 53 , 1	+19 , 6	+16 , 0
	6	11 55 45	344 . 47 . 29 , 7	8 6 17 , 6	342 . 52 . 3 , 4	1 . 29 . 7 , 4	+21 , 3	+10 , 0
	7	11 51 20	344 . 40 . 18 , 3	8 9 17 , 7	342 . 44 . 19 , 6	1 . 29 . 9 , 5	+13 , 8	+10 , 5
						Medio	+16″,8	+12″,3

Applicando questi errori ai luoghi geocentrici del pianeta calcolati per i giorni 4, e 5 Settembre, e prendendo i luoghi del Sole dalle tavole di *De-Lambre*, aggiungendovi $6^s\ 0^\circ\ 0'\ 20''$, si trovano le seguenti posizioni.

	Temp. Medio	Long. vera di ♃	Long. di ♁	Lat. Aust. di ♃
4	12ʰ 5′ 36″ . .	11ˢ 13° 7′ 59″, 7 . .	11ˢ 12° 10′ 23″, 2 . .	1° 28′ 58″, 0
5	12 1 10 . .	11 13 0 3 , 9 . .	11 13 8 26 , 5 . .	1 29′ 2″, 1

Quindi risulta il moto diurno composto 65′ 59″, 1; l'elongazione della Terra da Giove il dì 5 era = 8′ 22″, 6, quindi l'instante dell' opposizione ebbe luogo il 5 Settembre a $12^h\ 1'\ 10'' - \left(\frac{8'\ 22'',6}{65'\ 59'',1}\right) . (23^h . 55' . 34'') = 8^h\ 58'\ 55''$, alla qual epoca le longitudini di Giove, e della terra erano coincidenti, ed uguali = 11ˢ 13° 1′ 4″, 3; la latitudine geocentrica di Giove fu = 1° 29′ 1″, 6 A. L'errore eliocentrico delle tavole in longitudine fu = + 13″, 4; in latitudine = + 9″, 8.

VIII.ª Opposizione del nuovo Pianeta Vesta osservata nell' anno 1808.

Al quadrante Murale cercai questo nuovo Pianeta scoperto, com'è noto, nel decorso anno 1807, e lo trovai molto vicino alla posizione assegnatagli dall' effemeride del Dott. *Gauss* stabilita sui suoi III elementi (*M. C. September* 1807).

Unirò qui le osservazioni originali di questo Pianeta, che il tempo mi ha permesso di poter fare, affinchè ciascuno possa secondo il suo sistema verificarne le posizioni. Il segno ⚶ è stato adottato dagli Astronomi per indicare il Pianeta Vesta, e di questo ci serviremo per brevità.

1808.	Giorni	Nomi di Stelle	T. del pendolo di Grant.	Distanze al Zenit.
Agosto.	4	b ♒	13^h. 19'. 21", 13	57° 1' 6", 5
		ψ^3 ♒	14 7 42, 52	56 1 14, 0
		⚶	14 6 53, 16	56 33 16, 5
	5	b ♒	13 15 21, 98	57 1 5, 5
		ψ^3 ♒	14 3 43, 61	56 1 15, 0
		⚶ =	14 42 39, 66	56 39 54, 0
	6	b ♒	13 11 22, 63	57 1 5, 0
		ψ^3 ♒	13 59 43, 36	56 1 15
		⚶	14 38 23, 81	56 46 43
	10	ψ^3 ♒	13 43 43, 53	56 51 15
		Ceti	13 52 48, 24	57 51 58, 5
		⚶	14 21 1, 91	57 15 19, 0
	15	Ceti	13 32 49, 66	57 51 54, 5
		Ceti	13 36 36, 29	58 22 1, 8
		⚶ =	13 58 41, 91	57 53 29, 2
	21	Ceti	13 8 57, 17	57 51 53, 0
		Ceti	13 12 43, 65	58 21 1, 0
		⚶ =	13 31 9, 84	58 41 51, 8
	27	τ^2 ♒	12 6 29, 13	59 57 45, 2
		Ceti =	12 45 3, 47	57 52 : :
		⚶ =	13 2 50, 29.	59 31 21, 5
	28	⚶ =	12 58 3, 94	59 39 20
	29	Ceti =	12 37 5, 40	57 52 0 ±
		Ceti =	12 40 52, 19	58 22 2
		. . . .	12 46 22, 00	59 45 28
		⚶	12 53 15, 51	59 47 42
	30	τ^2 ♒	11 54 32, 19	59 57 41, 5
		Ceti	12 33 6, 51	57 51 51
		Ceti	12 42 40, 66	59 28 51, 5
		⚶ =	12 48 26, 08	59 55 40
	31	τ^2 ♒	11 50 33, 39	59 57 41, 2
		Ceti =	12 29 7, 61 =	57 51 51
		Ceti =	12 38 42, 38 =	59 28 49
		⚶ =	12 43 37, 40	60 3 34, 5
Settemb.	1	τ^2 ♒	11 46 33, 78	59 57 41, 0
		Ceti =	12 25 8, 15	57 51 53
		Ceti =	12 34 42, 49	59 28 54
		⚶ =	12 38 46, 48	60 11 38, 2
	3	Ceti =	12 17 8, 61	57 51 50, 8
		Ceti =	12 26 43, 26 =	59 28 52, 0
		⚶ =	12 29 2, 54 =	60 27 14, 2
	4	τ^2 ♒ =	11 34 35, 15 =	59 57 39, 0
		Ceti =	12 13 9, 47 =	57 51 49, 5
		⚶ =	12 24 10, 23 =	60 34 52, 2
	5	τ^2 ♒ =	11 30 37, 3 : :	57 57 39, 5
		Ceti =	12 9 11, 17	57 51 46
		⚶ =	12 19 18, 17 =	60 42 30
		o 1 ♒ =	12 20 52 : : =	60 38 18

	Giorni	Nomi di Stelle	T. del pendolo di Grant .	Distanze al Zenit .	
Settemb.	7	Ceti ≡	12ʰ. 1′. 14″, 57 ≡	57° 51′ 50″, 8	
		⚶ ≡	12 9 33 , 50 ≡	60 57 11	
		ω¹ ♒ ≡	12 12 55 , 38 ≡	60 38 22	
	17	δ ♒ ≡	10 48 2 , 76	62 11 36	
		⚶ . . ≡	11 20 51 , 16	62 1 32 , 5	
		. . . . . .	11 30 35 , 45	59 58 58	
	18	δ ♒ ≡	10 44 5 , 61	62 11 36	
		⚶ . . ≡	11 16 1 , 44	62 6 48	
	20	. . . . . .	11 1 16 , 01	62 11 3	
		⚶ ≡	11 6 23 , 70	62 16 57	
	21	δ ♒	10 32 15 , 25	62 11 41 , 5	
		. . . . ≡	10 57 19 , 60	62 11 7 , 5	
		⚶ ≡	11 1 36 , 20	62 21 41 , 0	
	23	⚶ ≡	10 53 2 , 4	62 30 30	Fra le nubi .
	26	δ ♒ ≡	10 12 29 , 94	62 11 36	
		⚶ ≡	10 37 49 , 20	62 41 44	
		Ceti . ≡	10 32 45 , 80	62 38 6	
		Ceti . ≡	11 7 29 , 84	62 16 50	
	29	⚶ ≡	10 23 46 , 84	62 51 5	
		. . . . ≡	10 55 39 , 62	62 16 54	
		2g Ceti ≡	11 9 54 , 42	63 45 28	
Ottobre .	3	δ ♒	9 44 55 , 12	62 11 37 , 5	
		⚶	10 5 24 , 12	62 59 50	
		Ceti . . .	10 25 10 , 78	61 39 25	
		ω¹ ♒	10 30 10 , 12	60 38 20	
		2g Ceti ≡	10 54 10 , 00	63 45 29	
	4	⚶ ≡	10 0 52 , 12	63 1 31	
		Ceti ≡	10 21 15 , 20	61 39 25 , 5	
		ω¹ ♒ ≡	10 26 14 , 54	60 38 24	
		2g Ceti ≡	10 50 14 , 40	63 45 27	
	14	δ ♒	9 23 58 , 31	61 11 44	
		⚶	9 39 11 , 92	63 4 4	
	24	⚶	8 57 42 , 12	62 45 24	
		99 ♒	9 15 17 , 44	67 2 34	
		ω¹ ♒	9 30 39 , 55	60 38 25	
		2g Ceti	9 53 37 , 36	63 45 35	
	31	56 ♒	7 52 21 , 58	60 55 16	
		δ ♒	8 16 45 , 67	62 11 42	
		⚶ ≡	8 30 24 , 33	62 20 17	

Per ridurre le precedenti osservazioni, ho calcolato le posizioni apparenti delle Stelle partendo dai dati del Catalogo del celebre P. *Piazzi* .

Ho paragonato in seguito alcune di queste osservazioni intorno all' opposizione ai III elementi del rinomatissimo Astro-

nomo, e Geometra D. *Gauss*, ai quali ho applicate le loro variazioni secolari da me calcolate per esercizio dietro la teoria del celebre Senator *La-Grange*. Gli elementi accennati sono i seguenti

Epoca. 31 Marzo 1807 Mezzodì. Medio a Bremen. 192° 23′ 30″,1
Moto diurno tropico . . . . 981″, 8459
Afelio . . . . 69° 50′ 31″,9
Longitudine del Nodo Ascendente. . . 103 18 28
Inclinazione . . . . = 7 8 10,7
Eccentricità . . . . = 0,0855050
Logarit. distanza Media . . . . = 0,3720160

Variazioni annue di questi elementi, come a me risultarono dal sopralodato metodo del Sig. *La-Grange* ridotte all'equinozio vero, ed all'ecclittica vera

Moto annuo dell'Afelio . . . . + 71″, 32
Moto annuo del Nodo . . . . + 31 , 43
Variazione dell'inclinazione . . . . . 0 , 02
Variazione annua dell'eccentricità + 0,000002023264

Facendo agli accennati elementi le precedenti correzioni, l'equazione del centro per il Settembre del 1808 si trova colle formule del celebre *Oriani* espressa per

$$\begin{aligned} E = &- 35242'', 35 \text{ sen.}\, p \\ &+ 1880, 11 \text{ sen.}\, 2p \\ &- 139, 07 \text{ sen.}\, 3p \\ &+ 11, 75 \text{ sen.}\, 4p \\ &- 1, 07 \text{ sen.}\, 5p \\ &+ 0, 10 \text{ sen.}\, 6p \\ &- 0, 01 \text{ sen.}\, 7p \end{aligned}$$

ove p rappresenta l'anomalia media del Pianeta. Il logaritmo del raggio vettore si calcola col mezzo della formula 0, 3688291 — Log. (1 — e cos. v), ove v rappresenta l'anomalia vera di Vesta, e la sua eccentricità il cui logaritmo è = 8,9320068.

Per calcolare le ascensioni rette, e le declinazioni, si ponga l'anomalia vera = v; la longitudine della ⚶ = λ computata dall'equinozio medio. L'obbliquità media dell'eclittica = ε;

tica $= \varepsilon$; la distanza della Terra al Sole $= R$, e finalmente sia r la distanza del Pianeta al Sole. Si calcolino le seguenti formule

$$x = r.\text{sen}.a.\text{sen}.(A+v) \quad \ldots \quad X = R.\cos.\lambda$$
$$y = r.\text{sen}.b.\text{sen}.(B+v) \quad \ldots \quad Y = R.\cos.\varepsilon.\text{sen}.\lambda$$
$$z = r.\text{sen}.c.\text{sen}.(C+v) \quad \ldots \quad Z = R.\text{sen}.\varepsilon.\text{sen}.\lambda$$

ove a, b, c, A, B, C sono costanti almeno per un corto intervallo di tempo, e tali, che

$$\text{Log. sen}.a = 9,9968031 \quad \ldots \quad A = 159^{\circ}\ 58'\ 15'',5$$
$$\text{Log. sen}.b = 9,9682456 \quad \ldots \quad B = 72\ 44\ 27,2$$
$$\text{Log. sen}.c = 9,5889954 \quad \ldots \quad C = 53\ \ 9\ 49,9 \quad (1)$$

Se ora si chiama α l'ascension retta del Pianeta; δ la sua declinazione sarà cotang. $\alpha = \frac{x-X}{y-Y}$; tang. $\delta = \frac{z-Z}{y-Y}.\text{sen}.\alpha$;

distanza alla Terra $= \frac{z-Z}{\text{sen}.\delta}$. Dai precedenti elementi ho dedotto i seguenti risultati.

(1) Queste formule sono quelle stesse, che furono date dal sopralodato Dottor *Gauss* nell' opera periodica pur citata (*M. Corresp. May* 1804). Esse possono dedursi analiticamente dalla permutazione delle coordinate nel modo seguente. Siano x, y, z le coordinate del Pianeta riportate al centro del Sole, in modo, che la prima x sia diretta verso l'equinozio di primavera; la seconda y sia a questa perpendicolare nella superficie dell'equatore, e la terza z sia a tutte due perpendicolare, e diretta verso il polo Boreale. Se tenendo fisso l'asse delle x, si riferisce il corpo a tre coordinate simili prese nella superficie dell' ecclittica inclinata sopra quella dell'equatore di un angolo ε, chiamando x', y', z' le nuove coordinate, sarà evidentemente $x = x'$; $y = y'.\cos.\varepsilon - z'.\text{sen}.\varepsilon$; $z = y'\ \text{sen}.\varepsilon + z'.\cos.\varepsilon$.

Sia ora n la longitudine del nodo ascendente dell' orbita del Pianeta, o chiamando x'', y'', z'' le coordinate del punto in questione relativamente alla linea de' nodi, ed alla sua perpendicolare nell'ecclittica, sarà $x' = x''.\cos.n - y'' \times \text{sen}.n$; $y' = x''.\text{sen}.n + y''.\cos.n$; $z' = z''$. Finalmente siano x''', y''' le coordinate del Pianeta nella sua orbita riferite alla linea de'nodi; i l'inclinazione dell'orbita del Pianeta; r il suo raggio vettore, e t la sua distanza al nodo, o sia la longitudine del Pianeta nell'orbita meno quella del nodo; sarà $x'' = x''' = r.\cos.t$; $y'' = y'''.\cos.i = r\cos.i.\text{sen}.t$; $z'' = y'''.\text{sen}.i = r.\text{sen}.i.\text{sen}.t$.

1808.	Giorni	Tempo Medio.	AR app. di ⚶	Decl. aust. app.	Err. in AR	Errori in Decl.
Agosto.	4	14h 54′ 29″, 8	357° 4′ 38″,8	11° 11′ 5″,6	−6′ 1″,9	+2′ 1″,5
	5	14 50 18 , 8	357 1 1 , 6	11 17 43 , 0	−6 2 , 0	+2 9 , 3
	6	14 46 6 , 8	356 57 0 , 5	11 24 32 , 6	−6 4 , 0	+2 14 , 2
	10	14 29 7 , 6	356 36 31 , 7	11 55 12 , 5	−6 40 , 8	+2 2 , 1
	15	14 7 2 , 5	356 1 20 , 0=	12 31 21 , 3	....	....
	21	13 39 53 , 9	355 6 20 , 4	13 19 47 , 6	....	....
	26	13 16 29 , 6	354 11 33 , 6	14 1 4 , 3	....	....
	27	13 11 48 , 4	353 59 42 , 6	14 9 8 , 6	−6 19 , 6	+2 57 , 1
	29	13 2 17 , 7	353 35 25 , 0	14 25 37 , 7	−6 23 , 7	+2 52 , 5
	30	12 57 31 , 2	353 22 47 , 0	14 33 43 , 4	−6 16 , 7	+2 53 , 0
	31	12 52 45 , 5	353 9 47 , 1	14 41 39 , 6	−5 59 , 5	+2 59 , 4
Settemb.	1	12 47 59 , 8	352 57 25 , 0	14 49 40 , 2	−6 30 , 0	+2 56 , 1
	3	12 38 23 , 8	352 31 10 , 9	15 5 19 , 4	−6 29 , 8	+2 59 , 1
	4	12 33 34 , 1	352 17 56 , 0	15 12 58 , 8	−6 35 , 3	+3 2 , 0
	5	12 28 44 , 0	352 4 24 , 1=	15 20 38 , 0	−6 33 , 8	+2 59 , 0
	7	12 19 13 , 0	351 37 27 , 1	15 35 15 , 2	−6 37 , 8	+2 54 , 3
	17	11 30 41 , 1=	349 21 3 , 4	16 39 42 , 8	−6 53 , 4	+3 15 , 1
	18	11 25 53 , 6=	349 7 52 , 9	16 44 58 , 6	−7 7 , 0	+2 34 , 8
	20	11 16 16 , 6	348 41 51 , 8	16 55 6 , 6	−7 10 , 3	+3 24 , 9
	21	11 11 30 , 3	348 29 6 , 7	16 59 46 , 4	....	....
	23	11 2 : :	....	17 8 40		
	26	10 47 48 , 8	347 28 28 , 6	17 19 56 , 8	....	....
	29	10 33 56 , 0	346 55 30 , 1	17 29 17 , 9	....	....
Ottobre.	3	10 15 27 , 2	346 15 38 , 2	17 38 3 , 5	....	....
	4	10 10 45 , 5	346 6 41 , 6	17 39 45 , 7	....	....
	14	9 26 58 , 0	344 56 50 , 3	17 42 10 , 9	....	....
	24	8 45 44 , 7	344 28 13 , 1	17 23 29 , 4	....	....
	31	8 18 31 , 6	344 32 52 , 5	16 58 21 , 0	....	....

Dalle precedenti equazioni si ricavano con facili eliminazioni le seguenti equazioni

$$x = r.\cos.n.\cos.t - r.\text{sen}.i.\text{sen}.n.\text{sen}.t = r.\text{sen}.a.\text{sen}.(A'+t)$$

$$y = r.(\cos.i\cos.n.\cos.\varepsilon - \text{sen}.i\,\text{sen}.\varepsilon).\text{sen}.t + r.\cos.\varepsilon.\text{sen}.n.\cos.t = r.\text{sen}.b.\text{sen}.(B'+t)$$

$$z = r.(\cos.i.\cos.n.\text{sen}.\varepsilon + \text{sen}.i.\cos.\varepsilon)\,\text{sen}.t + r.\text{sen}.\varepsilon.\text{sen}.n.\cos.t = r.\text{sen}.c.\text{sen}.(C'+t).$$

Per determinare le costanti a, b, c, A′, B′, C′ si avranno le seguenti equazioni

(1) . . . $\cos.n = \text{sen}.a.\text{sen}.A'$

(2) . . . $-\cos.i.\text{sen}.n = \text{sen}.a.\cos.A'$

(3) . . . $\cos.i.\cos.n.\cos.\varepsilon - \text{sen}.i.\text{sen}.\varepsilon = \text{sen}.b.\cos.B'$;

(4) . . . $\cos.\varepsilon.\text{sen}.n = \text{sen}.b.\text{sen}.B'$

(5) . . . $\cos.i.\cos.n.\text{sen}.\varepsilon + \text{sen}.i.\cos.\varepsilon = \text{sen}.c.\cos.C'$

(6) . . . $\text{sen}.\varepsilon.\text{sen}.n = \text{sen}.c.\text{sen}.C'$

Da queste equazioni mediante la divisione si ricava subito

$\cot. A' = - \cos. i \,.\, \operatorname{tang}. n$, $\cot. B' = \frac{- \operatorname{sen}. i \,.\, \operatorname{tang}. \varepsilon + \cos. n \,.\, \cos. i}{\operatorname{sen}. n}$;

$\cot. C' = \frac{\cos. n \,.\, \cos. i + \operatorname{sen}. i \cot. \varepsilon}{\operatorname{sen}. n}$. Per trovare gli angoli a, b, c si sommino insieme i quadrati della (1) e (2); della (3) e (4); della (5), e (6) equazione, e con facili riduzioni si otterrà $\cos. a = \operatorname{sen}. n \,.\, \operatorname{sen}. i$, $\cos. b = \cos. \varepsilon \,.\, \cos. n \,.\, \operatorname{sen}. i + \operatorname{sen}. \varepsilon \,.\, \cos. i$; e $\cos. c = \cos. i \,.\, \cos. \varepsilon - \operatorname{sen}. i \,.\, \operatorname{sen}. \varepsilon \,.\, \cos. n$; nelle quali formole riguardando i valori di sen. a, sen. b, sen. c, come positivi, si conoscerà facilmente a qual quadrante appartengano gli angoli A', B', C'. Nelle formole di Vesta abbiamo scritto in luogo dei costanti A', B', C' calcolati colle formole precedenti i medesimi aumentati della distanza dell'Afelio al nodo. Trovate le coordinate del Pianeta, il resto è evidente per sè, e non ha alcuna difficoltà.

Per dedurre dalle osservazioni precedenti l'opposizione di Vesta, prendo il medio degli errori degli elementi dal 1 Settembre fino ai 17; un tal medio in ascensione retta è =-6'36",7; in declinazione + 3' 0",9. Correggendo con tal medio le posizioni calcolate per i giorni 7, e 8 Settembre fra quali cade l'opposizione, e quindi derivandone le longitudini, e latitudini dell'equinozio medio ho trovato i seguenti risultati

		Long. di Vesta	Long. di ♁	Lat. Aust. di ⚶
7 Sett. T. medio	= 12^h 19' 13",0	346° 6' 32",0	345° 5' 46",7	10° 59' 19",6
8 Settembre	= 12 19 13 ,0	345 51 3 ,0	346 4 7 ,7	11 0 37 ,9
Differenze	= 24^h 0' 0",	15' 29",0	0.58.21 ,0	1'.18",3

Donde si deduce, che l'opposizione ebbe luogo il dì 8 Settembre a 8^h 4' 8" tempo medio; che la longitudine di Vesta fu = 345° 53' 47",5 e la sua latitudine geocentrica = 11° 0' 24",1.

IX.ª Opposizione di Marte osservata nell'Aprile del 1809.

Le osservazioni di Marte furono fatte al solito quadrante Murale; ma il tempo fu osservato ad un pendolo regolato sul tempo sidereo, fabbricato dal Signor *Giuseppe Meghele*.

Non era esso a compensazione, e siccome la verga metallica risentiva molto le alterazioni dell'atmosfera, il Sig. Profess. *Chiminello* vi ha fatto sostituire una verga di legno. Ciò presupposto passo ad esporre le poche osservazioni, che per l'incostanza della stagione si poterono fare. Si osservi, che le distanze al Zenit di Marte sono quelle del lembo superiore.

1809.	Giorni	Nomi di Stelle.	T. del Pendolo.	Distanza al Zenit.
Marzo.	30	Vergine	11ʰ 41′ 39″, 19	49° 39′ 31″
		. . . .	11 46 3 , 42	49 27 27
		. . . .	12 13 42 , 58	51 37 28
		28 della Vergine	12 32 27 , 65	51 50 1
		Marte =	13 25 49 , 84	51 32 47
Aprile.	7	532 Vergine =	12 37 54 , 99	50 38 26
		Vergine =	12 45 46 , : :	48 51 30
		θ Vergine =	13 0 17 , 74	49 54 6
		Marte =	13 14 38 , 35	50 39 10
	11	Vergine =	12 45 39 , 65	48 51 25
		θ Vergine =	13 0 10 , 34	49 54 9
		Marte =	13 8 40 , 73	50 11 45
	13	Vergine	12 45 36 , 81	48 51 25
		θ Vergine =	13 0 7 , 28	49 54 6
		Marte =	13 5 42 , 50	49 58 13

Per ridurre le precedenti osservazioni, ho calcolato le posizioni apparenti delle Stelle di confronto partendo dalle determinazioni medie del Catalogo del Sig. *Piazzi*, ed ho ottenuto i seguenti risultati.

Nomi	AR app. in Tempo.	Decl. Aust.
Vergine.	11ʰ 41′ 18″, 74	4° 16′ 32″, 4
. . . .	11 45 42 , 69	4 4 33 , 0
. . . .	12 13 22 , 17	6 14 34 , 2
28 Vergine	12 32 7 , 97	6 27 4 , 7
532 Vergine	12 37 43 , 88	5 15 27 , 3
. . . .	12 45 36 , 14	3 28 20 , 8
θ Vergine	13 0 6 , 60	4 31 9 , 0

Dalle ascensioni rette, e dalle declinazioni del centro di

Marte ricavate dalle precedenti osservazioni, correggendo quest'ultime dall'effetto della paralasse d'altezza — 10″, 8, ed aggiungendoli il semidiametro ricavato dalle medesime osservazioni + 8″, 6, ho dedotto le longitudini, e latitudini del Pianeta, servendomi dell'obbliquità apparente 23°27′44″,7. Ho ridotto le posizioni all'equinozio medio applicando alle longitudini osservate l'aberrazione — 4″, 7; e la nutazione — 10″, 1. Dietro ciò ho ottenuto i seguenti risultati, ove le colonne = errori in longitudine, e latitudine = indicano la differenza fra il luogo calcolato colle tavole del chiarissimo *Triestneker* (Vienna 1804), e il luogo osservato, il segno + indicando un luogo calcolato maggiore, e viceversa.

	Gior.	Tempo Medio.	AR app. osser. di Marte.	Decl. Austr. del centro.	Long. media.	Latitudine Boreale.	Errori in Long.	Errori in Lat.
Marzo	30	12ʰ53′41″,5	201°22′24″,2	6° 9′51″,4±	6ˢ22° 3′10″,1	2°37′22″±	+24″,4	+5″,0:
Aprile	7	12 11 13,7	198 36 48,7	5 16 8,1	6 19 10 6,3	2 25 29,1	+13,9	−4,1
	11	11 49 40,9	197 9 16,8	4 48 43,5	6 17 38 57,3	2 17 46,5	+27,7	−2,5
	13	11 38 54,3	196 25 27,4	4 35 11,1	6 16 53 27,6	2 13 36,7	+18,2	−5,5
						Medio	+21″,1	−4″,0

Si osservi, che nel prendere il medio degli errori in latitudine, ho esclusa la prima osservazione, giacchè avevo qualche sospetto sulla declinazione osservata. Con un calcolo d'approssimazione trovo, che l'opposizione ebbe luogo il dì 8 Aprile a 13ʰ 41′ 40″, epoca per la quale calcolando i luoghi della Terra, e di Marte, e correggendo quest'ultimo dall' errore eliocentrico delle tavole, che in longitudine è = + 8″,0 in latitudine — 1″, 5 si ottengono i seguenti risultati.

8 Aprile 13ʰ 41′ 40″ Longit. elioc. di ♂ = 6ˢ 18° 45′ 45″,6 Moto orario di ☼ = 2′ 27″,14
Longitudine di ♁ = 6 18 45 35,1 — di ♂ = 1 9,5
Differ. = 10″,5 — Moto relativo = 1 17″,6

Ho dedotto di qui, che il vero momento dell'opposizione ebbe luogo il medesimo giorno a 13ʰ 50′ 35″. La longitudine vera eliocentrica di Marte era allora = 6ˢ 18° 45′ 54″, 9; la latitudine eliocentrica Boreale = 0° 54′ 25″, 5.

X.ª Opposizione di Urano osservata l'anno 1809.

Non mi riuscì di fare per l'incostanza del tempo, che le tre seguenti osservazioni, dalle quali col soccorso delle tavole del Sig. *De-Lambre* sopra citate ho ricavato il vero momento dell'opposizione.

1809.	Giorni	Nomi di Stelle.	Tempo del pend. di Meghele.	Distanza dal Zenit.
Aprile.	26	♍ =	13ʰ 53′ 25″, 50	59° 25′ 29″
		λ ♍ =	14 8 5 , 91	57 51 54
		532 Mayer	14 14 16 , 34	57 51 35
		Urano =	14 21 17 , 15	59 1 56 ±
	29	♍ =	13 53 17 , 11	59 25 30
		λ ♍ =	14 7 57 , 36	57 51 52 , 5
		Urano =	14 20 39 , 36	58 58 39 , 0
Maggio.	1	♍ =	13 53 10 , 01	59 25 30 , 0
		λ ♍ =	14 7 50 , 05	57 51 48
		572 Mayer =	14 14 0 , 44	57 51 36
		Urano =	14 20 12 , 30	58 57 18

Per calcolare le posizioni di Urano, mi sono servito delle seguenti posizioni apparenti delle Stelle dedotte dal Catalogo sopra citato.

Vergine . . . AR app. = 13ʰ 54′ 10″, 24 Decl. Austr. = 14° 2′ 52″, 2
λ Vergine . . . . = 14 8 49 , 97 . . . . = 12 29 12 , 0
572 Mayer . . . . = 12 15 0 , 78 . . . . = 12 29 5 , 1

Di qui mi risultano le seguenti posizioni osservate; a lato delle longitudini e latitudini si troveranno al solito gli errori delle tavole del Sig. *De-Lambre*.

	Gior.	Tempo Medio.	AR app. oss.	Decl. Aust.	Longit. Media osservata.	Latit. B.	Errori in lon.	Errori in lat.	Long. di Terra + 20″
Aprile	26	12ʰ 3′35″	7ˢ5°30′28″,8	13°39′24″.4 ±	7ˢ7°42′35″,1 ±	0°28′ : :	. . . .	. . . . .	7ˢ 6°15′49″,8
	29	11 51 38	7 5 23 4 , 5	13 36 24 , 5	7 7 34 48 , 2	0 28 26,0	−1″,1	−12″,5	7 9 9 59 , 8
Magg.	1	11 43 26	7 5 18 7 , 5	13 34 47 , 4	7 7 29 43 , 7	0 28 24,2	−0 , 0	−12 , 3	7 11 5 36 , 3
						Medio =	−0″,6	−12″,4	

Si deduce dai dati precedenti, che l'opposizione ebbe luogo il giorno 27 Aprile a $22^h\,14'\,14''$ t. m.; mentre la longitudine di Urano, e della Terra erano $= 7^s\,7^\circ\,38'\,47'',2$; la latitudine geocentrica $0^\circ\,28'\,26'',5$.

XI.ª Opposizione di Pallade osservata nell'anno 1809.

È questa la prima opposizione di Pallade, che abbia potuto osservare. Nello scorso anno lo cercai lungo tempo inutilmente al quadrante murale. L'essere stato egli di luce molto debole, e confuso fra infinite altre Stelle piccole nella via lattea, fu causa, che non lo potei riconoscere. In quest'anno, sebbene di luce molto languida, pure soffriva una debole illuminazione nel cannocchiale. In tal guisa ne potei fare le seguenti osservazioni intorno alla sua opposizione. Avrei desiderato di continuar la serie delle osservazioni; ma il suo indebolimento, e lo stato dell'Atmosfera, che si caricò di vapori densi, da non togliere in vero la vista delle Stelle di 6.ª in 7.ª grandezza, ma bensì quella del Pianeta, mi fecero perder la speranza di più rivederlo in quest'anno.

1809.	Giorni	Nomi di Stelle.	Temp. del pend. di Megh. regol. sul temp. sidereo	Distanze al Zenit.
Settemb.	8	*i* Balena =	$0^h\,10'\,14'',7$	$55^\circ\,15'\,7''$
		Pallade =	0 21 3, 2±	48 43 40
	13	29 ♓	23 52 25,80	49 27 47
		i Balena =	0 10 4,69	55 15 7
		. . . . =	0 14 37,89	49 54 30
		Pallade =	0 17 36,93	49 57 30
	14	♓ 971 Mayer	23 22 0,61	50 30 5
		29 ♓ . . . =	23 52 23,78	49 27 49
		i Balena =	0 10 2,35	55 15 18
		Pallade =	0 16 52,39	50 12 14
	17	♓ 971 Mayer	23 21 57,31	50 30 10
		29 ♓ . . . =	23 52 20,18	49 27 54
		Pallade	0 14 40, 2	50 58 ½
		. . . .	0 14 46, 7	50 56 0
	18	♓ 971 Mayer	23 21 55,85	50 30 3
		983 ≈	23 38 59,29	52 48 44
		29 ♓	23 52 18,87	49 27 53
		Pallade =	0 13 55,00	51 12 29

1809.	Giorni	Nomi di Stelle.	Temp. del pend. di Megh. regol. sul temp. sidereo	Distanze al Zenit.
Settemb.	21	♓ 971 Mayer =	23ʰ 21′ 48″,49	50° 30 1,5
		983 ♒ =	23 38 51,80	52 48 38
		30 ♓	23 52 18,34	52 26 45
		Pallade =	0 11 32, 7:	51 58 15
	22	♓ 971 Mayer =	23 21 45,13	50 30 7
		983 ♒	23 38 48,64	52 48 38
		30 ♓	23 52 14,86	52 26 50
		Pallade =	0 10 45,34	52 13 15
	23	♓ 971 Mayer	23 21 42,23	50 30 11
		983 ♒	23 38 46, 2:	52 48 45
		30 ♓	23 52 11,50	52 26 57
		Pallade	0 9 56,73	52 28 22
	24	983 ♒	23 38 42,66	52 48 42
		30 ♓	23 52 8,74	52 26 49
		Pallade	0 9 7,56	52 43 13
	25	30 ♓	23 52 5,31	52 26 52
		Pallade	0 8 18,35	52 58 49

Per dedurre da queste osservazioni le posizioni di Pallade ho adoperato i seguenti elementi.

i della Balena AR app. =	2° 26′ 12″,3	Decl. Aust. 9° 52′ 31″,9
29 de' Pesci . . . . =	358° 1 19,1	= 4 4 55,0
♓ 971 del Mayer . . . . =	350 25 39,6	= 5 7 13,6
30 de' Pesci . : . . . . . =	358 3 6,3	= 7 3 58,3
983 dell' Aquario . . . . =	354 41 31,7	= 7 25 56,5

Per ridurre le ascensioni rette di Pallade, e le declinazioni all'equinozio medio, e renderle comparabili alle ascensioni rette, e declinazioni calcolate ho applicato alle AR osservate l'aberrazione in AR = — 7″,5, e la nutazione — 7″,6; alle declinazioni vi ho aggiunto + 10″,0 per l'aberrazione, + 2″,5 per la nutazione, e — 3″,7 per conto della paralasse d'altezza. Ho paragonato le osservazioni agli elementi del Sig. *Carlini* adoperando i seguenti costanti.

A′ = 263°.47′.58″,8 . . . . Log. sen. a = 9,9987957
B′ = 172 58 37,0 . . . . Log. sen. b = 9,9920952
C′ = 14 51 48,7 . . . . Log. sen. c = 9,3078573.

In tal guisa ho ottenuti i seguenti risultati.

1809.

1809.	Gior.	Tempo Medio .	AR Media osserv.	AR calcol.	Differ.	Decl. Aust. osserv.	Declin. calcol.	Differ.
Sett.	8	13^{h}10′ 0″,7	5° 8′ 4″,7	5° 8′ 0″,2	− 4″,5	3° 20′ 56″,2	3° 24′ 54″,6	+ 3′ 58″,4
	13	12 47 0,4	4 18 55,9	4 17 43,2	− 72,7	4 34 49,8	4 39 3,0	+ 4 13,2
	14	12 42 27,1	4 8 20,7	4 7 51,8	− 28,9	4 49 28,8	4 53 47,0	+ 4 13,2
	17	12 28 30,3	3 36 4,7	3 35 38,1	− 26,6	....	....	....
	18	12 23 51,0	3 25 9,0	3 24 38,7	− 30,3	5 49 46,5	5 53 53,7	+ 4 7,2
	21	12 9 49,0	2 51 28,3	2 51 6,7	− 21,6	6 35 38,4	6 39 27,8	+ 3 49,4
	22	12 5 9,1	2 40 27,7	2 39 46,8	− 40,9	6 50 35,8	6 54 32,3	+ 3 56,5
	23	12 0 28,0	2 29 5,8	2 28 23,3	− 42,5	7 5 37,7	7 9 34,8	+ 3 57,1
	24	11 55 46,0	2 17 31,8	2 16 56,7	− 35,1	7 20 34,0	7 24 35,1	+ 4 1,1
	25	11 51 4,0	2 6 6,8	2 5 30,7	− 36,1	7 36 5,6	7 39 35,1	+ 3 29,5
				Medio =	− 33,9		Medio =	+ 3 58,9

Per dedurre l'opposizione da queste osservazioni ho applicato i qui riferiti errori medi alle ascensioni rette, e declinazioni calcolate per i giorni 22, e 23 Settembre, e quindi coll'obbliquità media dell'ecclittica 23° 27′ 52″, o ho calcolato le longitudini e latitudini medie di Pallade, e la longitudine eliocentrica della Terra colle tavole del Sig. *De-Lambre*, onde ho ottenuto i seguenti risultati.

	Giorni	T. Medio	Longit. media di ⚴ osserv.	Longit. di ♁ + 20″	Latit. Aust. di ⚴
Settemb.	22	12^h 5′ 9″,1	359° 42′ 45″,2	359° 29′ 45″,0	7° 20′ 17″,4
	23	12 0 28,0	359 26 13,5	360 28 21,8	7 29 31,8

Si deduce da questi dati, che l'opposizione ebbe luogo il giorno 22 Settembre a 16^h 13′ 31″, 9 essendo allora la sua longitudine contata dall'equinozio medio = 359° 39′ 53″, 6. La sua latitudine australe geocentrica = 7° 21′ 53″, 3.

XII.ª Osservazione del nuovo Pianeta Cerere intorno alla sua opposizione nell'anno 1809.

Le osservazioni di quest'anno sono state fatte al solito quadrante murale, servendosi del pendolo di Meghele regolato sul tempo sidereo, e riducendole tutte al terzo sito del quadrante Murale mediante le già note distanze degli altri.

Esporremo nella seguente tabella quelle, che lo stato dell' atmosfera ci ha permesso di fare.

1809.	Giorni	Nomi di Stelle	T. del pendolo	Distanze al Zenit.
		Gran.		
Ottobre.	18	Balena 7.8	2^h 3′ 0″,90	41° 16′ 2″
		ν Balena 4.5	2 25 21 , 38	40 37 49
		Balena 6.7	2 29 41 , 72	40 6 4
		Cerere =	2 58 50 , 66	39 55 17
	22	ν Balena	2 25 9 , 40	40 37 47
		Balena	2 29 29 , 88	40 6 1
		Cerere	2 55 26 , 08	40 4 55
	24	Balena ≡	2 2 42 , 18	41 16 1 , 5
		ν Balena ≡	2 25 2 , 68	40 37 46
		Balena ≡	2 29 23 , 12	40 6 2
		Cerere ≡	2 53 38 , 16	40 9 34
	25	Balena ≡	2 2 38 , 46	41 16 1
		ν Balena ≡	2 24 58 , 90	40 37 46
		Balena ≡	2 29 19 , 26	40 6 0
		Cerere ≡	2 52 42 , 44	40 11 46
	26	Balena ≡	2 2 34 , 60	41 16 3
		ν Balena ≡	2 24 55 , 12	40 37 49
		Balena ≡	2 29 15 , 80	40 6 2
		Cerere ≡	2 51 46 , 21 =	40 14 0
Novemb.	2	Balena ≡	2 2 11 , 66	41 16 4
		ν Balena	2 24 31 , 48	40 37 46
		Balena ≡	2 28 52 , 24	40 6 3
		Cerere ≡	2 45 58 , 76	40 25 45
	8	Balena	2 1 51 , 16	41 16 3
		ν Balena	2 24 11 , 47	40 37 46
		Cerere ≡	2 39 9 , 27	40 35 45
	9	Balena ≡	2 1 47 , 09	41 16 2
		ν Balena	2 24 7 , 84	40 37 45
		Balena	2 28 28 , 02	40 6 0
		Cerere	2 38 9 , 92	40 36 44
	10	Balena	2 1 43 , 69	41 16 2
		ν Balena	2 24 4 , 19	40 37 46
		Balena	2 28 24 , 54	40 6 2
		Cerere	2 37 10 , 1 :	40 37 43
	22	Balena	2 1 28 , 77	41 16 2
		ν Balena	2 23 49 , 32	40 37 45
		Cerere	2 26 36 , 70	40 39 0
	23	Balena	2 1 27 , 15	41 16 0
		ν Balena	2 23 47 , 50	40 37 46
		Cerere	2 25 48 , 53	40 38 19

Servendomi delle posizioni apparenti delle Stelle calcolate mediante le posizioni medie del Catalogo del Sig. *Piazzi*, ho

ottenuto per Cerere i seguenti risultati, facendo uso, per ridurre al centro della Terra le declinazioni, della paralasse d'altezza + 3″, o .

1809.	Gior.	Tempo Medio .	AR apparente .	Decl. Boreale .	Long. di ⚳ dell'Eq. Med.	Latitudine Aust.	Errore in long.	Errore in lat.
Ottob.	18	13ʰ 11′ 2″,8	44°51′ 12″,0	5°28′ 7″,1	44° 1′ 1″,1	11° 4′ 31″,2	+ 16″,4	+ 23″,2
	22	12 52 14 , 2	44 3 2 , 7	5 18 27 , 0	43 11 24 , 7	10 59 54 , 0	+ 28 , 9	+ 27 , 0
	24	12 42 41 , 5	43 37 44 , 5	5 13 47 , 7	42 45 28 , 8	10 56 58 , 7	+ 28 , 7	+ 26 , 5
	25	12 37 53 , 7	43 24 45 , 6	5 11 34 , 9	42 32 13 , 9	10 55 14 , 7	+ 29 , 4	+ 32 , 3
	26	12 33 5 , 5	43 11 37 , 7	5 9 23 , 0	42 18 51 , 0	10 53 32 , 0	+ 31 , 7	+ 30 , 2
Nov.	1	12 4 6 , 7	41 50 34 , 6	4 57 37 , 3	40 56 50 , 0	10 40 38 , 5	+ 29 , 2	+ 28 , 3
	8	11 30 7 , 4	40 13 20 , 0	4 47 36 , 0	39 19 53 , 1	10 20 35 , 4	+ 27 , 2	+ 28 , 7
	9	11 25 16 , 5	39 59 26 , 7	4 46 36 , 0	39 6 11 , 4	10 17 15 , 4	+ 29 , 4	+ 31 , 4
	10	11 20 24 , 1	39 45 22 , 8 ±	4 45 37 , 9	38 52 20 , 9	10 13 49 , 5	+ 45 : :	+ 42 : :
	22	10 22 56 , 4	37 10 45 , 5	4 44 20 , 4	36 23 34 , 6	9 26 18 , 3	+ 26 , 9	+ 29 , 9
	23	10 18 14 , 0	36 59 8 , 7	4 45 1 , 0	36 12 41 , 5	9 21 56 , 3	+ 15 , 3	+ 25 , 4
						Medio . .	+ 27″,4	+ 29″,3

Nel prendere il medio de' precedenti errori ho escluso le osservazioni del 18 Ottobre, 10 e 23 di Novembre, perchè un poco troppo lontane dall' altre, massime per rapporto alla longitudine. Gli elementi, ai quali ho paragonate le precedenti osservazioni sono i XIII del Sig. Dott. *Gauss* riferiti anche dal Sig. *Carlini* nelle sue Efemeridi per il 1810. Ho corretto poi i luoghi ellittici colle tavole di perturbazioni del medesimo Sig. *Gauss* date nel VII volume della corrispondenza mensuale del cel. Baron di *Zach* . Conviene di più notare, che per il calcolo delle longitudini mi sono servito dell' obbliquità apparente 23° 27′ 43″, 4, e per ridurle all' equinozio medio ho applicato alle longitudini la nutazione — 7″, 2, e l' aberrazione — 8″, 4; dalle latitudini poi ho sottratto per conto dell' aberrazione della luce 1″, 2 .

L' opposizione del Pianeta col Sole avendo avuto luogo fra il 2 e 3 di Novembre, ho calcolato per questi due giorni a mezzo giorno medio i luoghi del Sole colle più volte citate tavole del Sig. *De-Lambre*, e correggendo coi surriferiti errori le posizioni calcolate di Cerere, ho ottenuto i seguenti risultati .

	Giorni	Tempo Med.	Longit. Med. di Cerere.	Longit. di ♁ + 20″	Latit. Aust. di Cerere.
Novembre	2	0ʰ 0′ 0″	40° 49′ 51″,1	39° 39′ 8″,7	10° 40′ 8″,7
	3	0 0 0	40 36 20,8	40 39 20,1	10 36 54,9

Di qui mi risulta, che l'opposizione ebbe luogo il 2 Novembre a 23ʰ 1′ 36″, 5 t. m. La longitudine di Cerere, e della Terra dall'equinozio medio essendo = 40° 36′ 53″, 6. La sua latitudine australe geocentrica = 10° 37′ 2″, 8.

XIII.ª Opposizione del nuovo Pianeta Vesta dell'anno 1810 *osservata al quadrante murale di Ramsden.*

1809.	Giorni	Nomi di Stelle	Tempo Sidereo del pendolo.	Dist. al Zenit nello strumento.
Dicembre	27	D ♓ =	6ʰ 36′ 7″,38	23° 25′ 30″
		⚶ =	6 47 6,14	23 11 37
		δ ♓	7 4 43,74	23 4 41,5
	29	μ ♓ ≡	6 7 16,64	22 47 59
		D ≡	6 35 59,40	23 25 31
		⚶ ≡	6 44 44,80	23 3 22
		δ ≡	7 4 35,76	23 4 40,5
	30	μ ≡	6 7 13,72	22 47 58
		D ≡	6 35 55,20	23 25 30
		⚶ ≡	6 43 33,90	22 59 14,5
		δ ≡	7 4 31,50	23 4 38
	31	μ ≡	6 7 9,82	22 47 58
		D ≡	6 35 51,30	23 25 31
		⚶ ≡	6 42 22,56	22 55 8
		δ ≡	7 4 27,44	23 4 42
1810. Gennajo	1	D ≡	6 35 46,90	23 25 31
		⚶ ≡	6 41 10,30	22 51 3
		δ ≡	7 4 23,10	23 4 41,5
	2	D ≡	6 35 42,64	23 25 32
		⚶ ≡	6 39 58,32	22 47 4
		δ ≡	7 4 18,88	23 4 42
	5	⚶ ≡	6 36 21 ±	22 35 27
		δ ≡	7 4 3	23 4 44
Febbrajo	9	⚶	6 11 58,59	20 45 53
		ε ♓ =	6 31 8,10	20 5 35
	10	⚶ ≡	6 11 36,52	20 43 50
		ε ≡	6 31 3,24	20 5 36

	Giorni	Tempo Medio.	AR app. di ⚶	Decl. Bor.
Dicemb.	27	$12^h 27' 3'',4$	$102° 47' 28'',6$	$22° 12' 12'',1$
	29	12 16 58 , 6	102 14 8 , 7	22 20 26 , 5
	30	12 11 56 , 1	101 57 26 , 8	22 24 32 , 4
	31	12 6 53 , 0 =	101 40 36 , 1	22 28 40 , 8
Gennajo	1	12 1 49 , 6 =	101 23 38 , 6	22 32 47 , 1
	2	11 56 45 , 8 =	101 6 42 , 5	22 36 46 , 8
	5	11 41 37 : =	100 16 ½	22 48 23 :
Febbrajo	9	8 56 6	93 16 35 , 2	24 37 59 , 8
	10	8 51 53	93 12 17 , 1	24 40 3 , 8

Le AR , e declinazioni delle Stelle sonosi prese dalle Efemeridi di Milano del 1810, eccettuata D de' Gemini, la quale non ritrovandosi in quel Catalogo si è desunta dal gran Catalogo di *Piazzi* aggiungendo $4''$, o all' AR[a] , e togliendo $1'' , 5$ alla declinazione .

Ecco le posizioni apparenti delle Stelle, per il 1 Gennaro 1810.

μ Gemini = AR app. = $92° 52' 21'',8$ Decl. = $22° 35' 46'',18$
D Gemini = =100 2 45,9 =21 58 19, 3
δ Gemini = =107 11 53,4 =22 19 3, 1

10 Febbrajo 1810.

ε Gemini = = 98 3 58,2 =25 18 16, 9

Alle declinazioni osservate del Pianeta ho aggiunto $2'' , 1$ per la paralasse d'altezza nelle osservazioni di Decembre e Gennajo; ed $1'' , 7$ nell'osservazioni di Febbrajo.

Ho calcolato le longitudini, e latitudini osservate con l'obbliquità apparente $23° 27' 42'' , 4$ togliendo dalle longitudini $-7'' , 4$ per conto dell'aberrazione, $-6'' , 4$ per conto della nutazione; e dalle latitudini $-1'' , 5$ per l'aberrazione.

Ho confrontate alcune di queste osservazioni ai IV Elementi del celebre Dott. *Gauss* ridotti al 1 Gennajo col mezzo delle variazioni secolari, calcolando l'equazione del centro colla formula seguente, (che mi risultò adottando l'eccentricità 0 , 0887897).

$$
\begin{aligned}
E = & - 36592'',34 \text{ sen. } z \\
& + 2026,88 \text{ sen. } 2z \\
& - 155,66 \text{ sen. } 3z \\
& + 13,67 \text{ sen. } 4z \\
& - 1,29 \text{ sen. } 5z \\
& + 0,13 \text{ sen. } 6z \\
& - 0,01 \text{ sen. } 7z
\end{aligned}
$$

Prendendo i luoghi del Sole dalle tavole del Sig. *De-Lambre*, ho ottenuti i risultati qui esposti.

	Giorni	Longit. osserv. dall' Eq. M.	Longitudine calcolata.	Errori degli Elementi	Latitudine Australe osservata.	Latitudine calcolata.	Errori degli Elemen.	Longit. di Sole + 6ˢ 0° 0' 20'' — Nutazione.
Decemb.	27	101°.49'.32'',3	101.57.34,4	+8' 2'',1	0° 44' 1'',6	0°.44'.18'',0	+16'',4	3ˢ 5° 54' 20'',8
	29	101.18. 5,6	101.26. 6,8	+8 1,2	0 38 28,8	0.38.42,7	+13,9	3 7 56 14,7
	30	101. 2.22,0	101.10.26,4	+8 4,4	0 35 41,0	0.35.53,7	+12,7	3 8 57 11,4
	31	100.46.30,5	100.54.36,8	+8 6,3	0 32 49,6	0.33. 4,1	+14,5	3 9 58 9,5
Gennajo	1	100.30.34,0	100.38.44,2	+8 10,2	0 29 58,9	0.30.14,1	+15,2	3 10 59 7,6
	2	100.14.40,0	100.22.52,1	+8 12,1	0 27 13,1	0.27.23,2	+10,1	3 12 0 5,7
			Medio	+8 6,1			+13,8	

L'opposizione cadendo fra i giorni 31 Decembre, e 1 Gennajo, correggo le posizioni calcolate per questi due giorni mediante l'error medio, e confrontandoli colle longitudini del Sole, deduco l'instante dell'opposizione, come segue.

		T. Medio	Long. Geoc. di ⚶	Longit. di ♁	Lat. Aust. di ⚶
1809. =	31 Decemb. =	12^h 6' 53'',0 =	100° 46' 30'',6 =	99° 58' 9'',5 =	0.32.50,3
1810. =	1 Gennajo =	12 1 49,6 =	100 30 38,0 =	100 59 7,6 =	0.30. 0,3
	Differenze =	23.54.56,6 =	15.52'',6 =	60.58'',1 =	2.50,0

Si deduce di qui, che l'opposizione ebbe luogo il 1 Gennajo a 3^h 9' 45'',5 mentre la longitudine di ⚶ era = 100° 36' 31'',2

La latitudine Australe = 0 31 3,3

Errore eliocentrico in longitudine + 5 0,6

Errore eliocentrico in latitudine + 0 8,5

APPENDICE.

Contenente le formule numeriche delle perturbazioni del nuovo Pianeta Vesta calcolate dietro la Teorìa del Sig. Senatore *La-Place*, supposta l'eccentricità di Vesta, e gli altri elementi ellittici, come sono rappresentati dai III Elementi del celebre Dott. *Gauss*, e la sola massa perturbatrice esser quella di Giove, non avendo di più riguardo, che alle prime potenze dell'eccentricità. Si è eseguito il calcolo in due differenti Ipotesi del moto medio per poter più facilmente applicare le medesime formule ad un altro sistema del moto medio. La I[a] ipotesi suppone il moto medio, come è rappresentato dai suddetti elementi; nella seconda si è fatto aumentare il moto annuo di 20'.

Perturbazioni in longitudine.		*Perturbazioni nel raggio vettore.*	
I. Ipotesi.	II. Ipotesi.	I. Ipotesi.	II. Ipotesi.
−113",82 sen. D	−112",89	− 0,000044	− 0,000044
+131, 03 sen. 2D	+129, 58	+ 0,000481 cos. D	+ 0,000475
+ 13, 66 sen. 3D	+ 13, 49	− 0,000919 cos. 2D	− 0,000905
+ 2, 84 sen. 4D	+ 2, 81	− 0,000117 cos. 3D	− 0,000115
+ 0, 77 sen. 5D	+ 0, 65	− 0,000027 cos. 4D	− 0,000026
+ 0, 23 sen. 6D	+ 0, 22	− 0,000008 cos. 5D	− 0,000005
− 21",75 sen. (D − A)	− 21",67	− 0,000003 cos. 6D	− 0,000002
− 14, 41 sen. A'	− 14, 40	+ 0,000023 cos. A	+ 0,000024
+137, 03 sen. (2D − A)	+134, 17	+ 0,000002 cos. (D + A')	+ 0,000003
− 24, 13 sen. (D − A')	− 23, 63	− 0,000082 cos. (D − A)	− 0,000081
−143, 03 sen. (3D − A)	−139, 43	+ 0,000025 cos. A'	+ 0,000025
+165, 40 sen. (2D − A')	+153, 93	− 0,000292 cos. (2D − A)	− 0,000287
− 5, 24 sen. (4D − A)	− 4, 93	+ 0,000062 cos. (D − A')	+ 0,000061
+ 6, 03 sen. (3D − A').	+ 5, 58	+ 0,000871 cos. (3D − A)	+ 0,000851
+ 13, 47 sen. (D + A)	+ 12, 33	− 0,000999 cos. (2D − A')	− 0,000930
− 0, 88 sen. (2D + A')	− 0, 88	+ 0,000044 cos. (4D − A)	+ 0,000041
− 15, 39 sen. (2D + A)	− 15, 19	− 0,000048 cos. (3D − A')	− 0,000045
− 0, 35 sen. (3D + A')	− 0, 35	+ 0,000070 cos. (D + A)	+ 0,000060
− 1, 92 sen. (3D + A)	− 1, 92	+ 0,000007 cos. (2D + A')	+ 0,000007
− 0, 13 sen. (4D + A')	− 0, 13	− 0,000076 cos. (2D + A)	− 0,000075
		+ 0,000003 cos. (3D + A')	+ 0,000003
		− 0,000011 cos. (3D + A)	− 0,000011
		+ 0,000001 cos. (4D + A')	+ 0,000001

Le perturbazioni in latitudine sono state calcolate nella sola prima Ipotesi, giacchè esse non ricevono un sensibile aumento per la variazione supposta del moto medio. Esse mi risultano, come segue.

Disuguaglianze di Vesta in latitudine = + 3″,00 sen. (♃ − π)
− 5,02 sen. (⚶ − 2♃ + π)
+ 13,03 sen. (2⚶ − 3♃ + π)
+ 0,56 sen. (3⚶ − 4♃ + π)
− 1,25 sen. (2⚶ − ♃ − π)
− 0,26 sen. (3⚶ − ♃ − π).

Convien rimarcare, che nelle formole precedenti si è supposto

♃ = alla longitudine media di Giove
⚶ = alla longitudine media di Vesta
D = ⚶ − ♃
A = Anomalia media di Vesta
A′ = Anomalia media di Giove
$\pi = 284^\circ\ 24'$ = Nodo ascendente dell'orbita di Giove sopra quella di Vesta.

Quando i calcoli precedenti furono da me eseguiti, non m'erano ancora venuti alle mani i IV Elementi del più volte lodato Sig. *Gauss*, i quali soddisfano mirabilmente alle osservazioni, che si hanno, di Vesta. Credo pertanto cosa non inopportuna aggiungere le inuguaglianze dipendenti dai IV Elementi medesimi, che si possono vedere esposti nell'Efemeridi di Milano per il 1810.

Si ricavano facilmente dalle 2 ipotesi surriferite, aumentando i coefficienti nella I ipotesi di una quantità conveniente alla diminuzione del moto medio annuo, che nel caso nostro è di 26′ 19″; e moltiplicando i coefficienti dipendenti da A per il rapporto delle due eccentricità, che è di $1 : 1 + \frac{1}{26}$ incirca. Sommando i termini dipendenti da un medesimo angolo variabile nell'ipotesi de' III, e IV elementi, ottengo i due seguenti sistemi di inuguaglianze.

Equa-

Equazioni di Vesta in longitudine dipendentemente da Giove ne' III elementi .	Le stesse calcolate nell' Ipotesi de' IV elementi .
− 113",82 sen. D	− 114",78 sen. D
+ 131 , 03 sen. 2 D	+ 132 , 52 sen. 2 D
+ 13 , 66 sen. 3 D	+ 13 , 85 sen. 3 D
+ 2 , 84 sen. 4 D	+ 2 , 87 sen. 4 D
+ 0 , 77 sen. 5 D	+ 0 , 89 sen. 5 D
+ 0 , 23 sen. 6 D	+ 0 , 24 sen. 6 D
+ 31 , 75 sen. (♃ + 312° 57′)	+ 32 , 61 sen. (♃ + 312° 17′)
+ 151 , 02 sen. (⚶ − 2 ♃ + 62° 0′)	+ 159",57 sen. (⚶ − 2 ♃ + 62° 18′)
+ 269 , 25 sen. (2 ⚶ − 3 ♃ + 218° 13′)	+ 287 , 66 sen. (2 ⚶ − 3 ♃ + 218° 8′)
+ 9 , 83 sen. (3 ⚶ − 4 ♃ + 218° 21′)	+ 10 , 71 sen. (3 ⚶ − 4 ♃ + 218° 43′)
+ 13 , 96 sen. (2 ⚶ − ♃ + 293° 12′)	+ 15 , 68 sen. (2 ⚶ − ♃ + 292° 51′)
+ 15 , 21 sen. (3 ⚶ − 2 ♃ + 109° 2′)	+ 15 , 62 sen. (3 ⚶ − 2 ♃ + 109° 3′)
+ 1 , 82 sen. (4 ⚶ − 3 ♃ + 106° 35′)	+ 1 , 86 sen. (4 ⚶ − 3 ♃ + 106° 33′)

Equazioni del raggio vettore espresse in millionesime parti.

− 0,000044	− 1,000044
+ 481 cos. D	+ 487 cos. D
− 919 cos. 2 D	− 936 cos. 2 D
− 117 cos. 3 D	− 119 cos. 3 D
− 27 cos. 4 D	− 28 cos. 4 D
− 8 cos. 5 D	− 9 cos. 5 D
− 3 cos. 6 D	− 3 cos. 6 D
+ 22 cos. (⚶ + 285° 44′)	+ 24 cos. (⚶ + 286° 56′)
+ 97 cos. (♃ + 122 49)	+ 100 cos. (♃ + 121 . 57)
+ 329 cos. (⚶ − 2 ♃ + 299° 25′)	+ 346 cos. (⚶ − 2 ♃ + 299° 5′)
+ 1632 cos. (2 ⚶ − 3 ♃ + 38 . 21)	+ 1742 cos. (2 ⚶ + 38° . 14′)
+ 80 cos. (3 ⚶ − 4 ♃ + 39 . 9)	+ 85 cos. (3 ⚶ − 4 ♃ + 37°.49)
+ 67 cos. (2 ⚶ − ♃ + 285° 0′ ½)	+ 80 cos. (2 ⚶ − ♃ + 285°.57′)
+ 78 cos. (3 ⚶ − 2 ♃ + 112° . 3′)	+ 82 cos. (3 ⚶ − 2 ♃ + 112°.11′)
+ 11 cos. (4 ⚶ − 3 ♃ + 116° .34′)	+ 11 cos. (4 ⚶ − 3 ♃ + 116 . 34)

SULLA TEORIA DELL'ATTRAZIONE DEGLI SFEROIDI ELITTICI

MEMORIA

Del Sig. Giovanni Plana.

Presentata dal Sig. Senatore Oriani li 24 Novembre 1810 ed approvata dal Sig. Cav. Cesaris.

1. Il metodo del celebre Sig. *La-Place* per determinare l'attrazione degli sferoidi elittici sopra i punti situati fuori della loro superficie, quale trovasi esposto al Capitolo primo del Tomo secondo della Meccanica celeste, presenta, a mio giudizio, alcune difficoltà, che fanno desiderare una maggiore spiegazione. La brevità, e la singolarità di questo metodo mi hanno indotto a produrlo in un modo più chiaro lusingandomi, che un tal lavoro potrà per avventura riuscire di vantaggio se non a tutti, ad alcuni di que' lettori almeno, che si daranno all'esame dell'opera suddetta.

Per soddisfare al mio assunto nel miglior modo di cui sono capace, comincierò a svolgere in serie la funzione cercata in una maniera analoga a quella, che lo stesso Signor *La-Place* pubblicò nel suo libro intitolato: *Théorie du mouvement et de la figure Elliptique des planétes*, ed appoggiandomi in seguito ad alcune proprietà, che da essa facilmente derivano cercherò di giungere ai principali risultati di questa teorìa.

2. Consideriamo in generale l'attrazione di uno sferoide omogeneo sopra un punto esteriore alla sua superficie, le di cui ordinate ortogonali sono espresse per a, b, c. Siano x, y, z le ordinate di una molecula dello sferoide, che chiameremo δM, indicando la lettera M la totalità della massa. Ciò posto

egli è chiaro, che dinotando con V la somma delle molecule dello sferoide divise per la loro distanza al punto attratto, si avrà

$$V = \int . \frac{\delta M}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}} .$$

Siano A, B, C le attrazioni rispettivamente parallele agli assi delle ordinate x, y, z; noi avremo, siccome è noto, le seguenti equazioni

$$A = -\left(\frac{\delta V}{\delta a}\right), \; B = -\left(\frac{\delta V}{\delta b}\right), \; C = -\left(\frac{\delta V}{\delta c}\right)$$

le quali riducono il problema alla ricerca del valore di V.

Ora abbiamo

$$V = \int . \frac{\delta M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} . \sqrt{1 - \left(\frac{2ax+2by+2cz-x^2-y^2-z^2}{a^2+b^2+c^2}\right)}},$$

e riducendo in serie si otterrà

$$V = \int . \frac{\delta M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} . \left(1 + \tfrac{1}{2} Z + \frac{1.3}{2.4} Z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} . Z^3 + \text{ec.}\right)$$

ponendo

$$Z = \frac{2ax+2by+2cz-x^2-y^2-z^2}{a^2+b^2+c^2} .$$

Essendo finora arbitraria la posizione dell'origine delle ordinate, nulla impedisce di supporla al centro di gravità dello sferoide, d'onde risultano le equazioni

$$\int . x\delta M = 0, \; \int . y\delta M = 0, \; \int . z\delta M = 0,$$

e per conseguenza

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \int \frac{\delta M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} . \left(\frac{1}{2} . \frac{(x^2+y^2+z^2)}{a^2+b^2+c^2} - \frac{1.3}{2.4} Z^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} Z^3 - \text{ec.}\right).$$

Si concepisca adesso un piano, che passi per l'asse delle ordinate x, e per la molecula δM; chiamando q l'angolo, che questo piano forma con quello delle (xy); p l'angolo formato dall'asse delle x e dal raggio, che unisce il centro di gravità colla stessa molecula, e chiamando u il valore di questo stesso raggio, si avranno le equazioni

$$x = u \cos.p, \; y = u \,\text{sen}.p \cos.q, \; z = u \,\text{sen}.p \,\text{sen}.q,$$

$$\delta M = u^2 \,\delta u \,\delta p \,\delta q \,\text{sen}.p, \; u^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$Z = u \left(\frac{2a \cos. p + 2b \operatorname{sen}. p \cos. q + 2c \operatorname{sen}. p \operatorname{sen}. q - u}{a^2 + b^2 + c^2} \right),$$

dalle quali si ottiene

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} . \int . u^4 \partial u \partial p \partial q \operatorname{sen}. p \times$$

$$\left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{2.4} . \left(\frac{2a \cos. p + 2b \operatorname{sen}. p \cos. q + 2c \operatorname{sen}. p \operatorname{sen}. q - u}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 \right\}$$

$$- \frac{1.3.5}{2.4.6} . \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} . \int . u^5 \partial u \partial p \partial q \operatorname{sen}. p \times$$

$$\left(\frac{2a \cos. p + 2b \operatorname{sen}. p \cos. q + 2c \operatorname{sen}. p \operatorname{sen}. q - u}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \right)^3$$

$$- \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} . \int . u^6 \partial u \partial p \partial q \operatorname{sen}. p \times$$

$$\left(\frac{2a \cos. p + 2b \operatorname{sen}. p \cos. q + 2c \operatorname{sen}. p \operatorname{sen}. q - u}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \right)^4 - \text{ec.}$$

Sviluppando le potenze della funzione sottoposta al segno integrale, facilmente si scorge, che questo valore di V può venire espresso sotto la forma

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} . \iiint . u^4 \partial u \partial p \partial q \operatorname{sen}. p . \times$$

$$(G + G'u + G''u^2 + \text{ec.});$$

ove le lettere G, G', G'', ec. rappresentano delle funzioni razionali e intere di sen. p, cos. p, sen. q, cos. q.

Occupiamoci ora dell'integrazione della precedente serie. In primo luogo osservo, che chiamando U il raggio u condotto dal centro fino alla superficie da una parte dello sferoide, e U' quello, che va alla superficie dalla parte diametralmente opposta, si dovrà integrare da $u = -U'$ fino a $u = U$; ma negli sferoidi elittici si ha $U' = U$, dunque

$$V = \frac{M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{2}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} . \iint U^5 \partial p \partial q \operatorname{sen}. p \times$$

$$\left(\frac{G}{5} + \frac{G''}{7} U^2 + \frac{G''''}{9} U^4 + \text{ec.} \right).$$

Prima di procedere alle ulteriori integrazioni si osservi, che essendo

$$G = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{8} \cdot \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen.} p \cos. q + 2c \text{ sen.} p \text{ sen.} q}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2$$

$$G'' = -\tfrac{3}{8} \cdot \frac{1}{a^2+b^2+c^2} - \frac{3\ 5}{2.4.6} \cdot 3 \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen.} p \cos. q + 2c \text{ sen.} p \text{ sen.} q}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \right)^2$$

$$+ \frac{3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \left(\frac{2a \cos. p + 2b \text{ sen.} p \cos. q + 2c \text{ sen.} p \text{ sen.} q}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \right)^4$$

ec.

le funzioni G, G'', G'''', ec. sono omogenee per rapporto alle quantità a, b, c, di un grado rispettivamente eguale a 0, -2, -4, ec. e che come tali hanno la proprietà di soddisfare alle equazioni

$$a \left(\frac{\partial G}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial G}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial G}{\partial c} \right) = 0,$$

$$a \left(\frac{\partial G''}{\partial a} \right) + b \left(\frac{\partial G''}{\partial b} \right) + c \left(\frac{\partial G''}{\partial c} \right) = - 2C'',$$

ec.

Si vedrà in seguito l'utilità di quest'osservazione.

Ritorniamo ora all'integrazione del valore di V, che ancora dobbiamo eseguire per rapporto agli angoli p, e q i quali hanno entrambi per limiti $0°$, e $180°$.

Sia $x^2 + my^2 + nz^2 = K^2$

l'equazione, che appartiene alla superficie dell'elissoide. Facendo in questa

$$x = U \cos. p,\ y = U \text{ sen.} p \cos. q,\ z = U \text{ sen.} p \text{ sen.} q,$$

ne risulterà

$$U^2 = \frac{K^2}{1 - \text{sen.}^2 p \cdot \left\{ (1-m) \cos.^2 q + (1-n) \text{ sen.}^2 q \right\}}.$$

Siccome questo valore di U non permette l'integrazione, è necessario di svolgerlo in una serie ordinata secondo le potenze di $1-m$, e $1-n$; allora il termine $\int\int \partial p\, \partial q \text{ sen.} p . \frac{2}{5} GU^5$, che appartiene al valore di V, darà una serie composta di termini facili ad integrarsi; supponendo adunque le due integrazioni fatte, si avrà

$$\tfrac{2}{5} \int\int . \partial p\, \partial q \text{ sen.} p\ GU^5 = K^5 R,$$

indicando R una serie ordinata secondo le potenze di $1-m$, e $1-n$. Invece delle quantità $1-m$, $1-n$ sarà più oppor-

tuno di far uso delle eccentricità dell' elissoide . A questo uopo osservisi , che chiamando θ , ϖ i quadrati delle eccentricità si ha

$$\theta = K^2 . \frac{1-m}{m} , \ \varpi = K^2 . \frac{1-n}{n} ,$$

e per conseguenza

$$1 - m = \frac{\theta}{K^2 + \theta} = \frac{\theta}{K^2} - \frac{\theta^2}{K^4} + \frac{\theta^3}{K^6} - \text{ec.},$$

$$1 - n = \frac{\varpi}{K^2 + \varpi} = \frac{\varpi}{K^2} - \frac{\varpi^2}{K^4} + \frac{\varpi^3}{K^6} - \text{ec.}$$

Sostituendo questi valori in quello della serie rappresentata da R , si otterrà una nuova serie ordinata secondo le potenze di $\frac{\theta}{K^2}$, e $\frac{\varpi}{K^2}$, che chiameremo R' . Avremo adunque

$$\tfrac{2}{5} \iint . \partial p \, \partial q \text{ sen.} p \, GU^5 = K^5 R' ,$$

ovvero

$$\tfrac{2}{5} \iint . \partial p \, \partial q \text{ sen.} p \, . GU^5 = MK^5 . \frac{R'}{M} = MK^2 . \frac{R'}{\frac{4}{3}\pi \sqrt{mn}} ,$$

osservando , che

$$M = \frac{4\pi K^3}{3\sqrt{mn}} = K^3 . \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(1 + \frac{\theta}{K^2}\right)\left(1 + \frac{\varpi}{K^2}\right)}$$

si potrà per conseguenza ridurre $\frac{R'}{\frac{4\pi}{3}\sqrt{mn}}$ in una serie ordinata secondo le potenze di $\frac{\theta}{K^2}$, e $\frac{\varpi}{K^2}$; chiamando S questa serie , si avrà finalmente

$$\tfrac{2}{5} \iint \partial p \, \partial q \text{ sen.} p \, GU^5 = MK^2 S .$$

Collo stesso raziocinio si dimostrerà , che il termine seguente $\frac{2}{7} \iint \partial p \, \partial q \text{ sen.} p \, G''U^7$ del valore di V potrà essere espresso da una quantità della forma $MK^4 S'$, indicando parimenti con S' un' altra serie ordinata secondo le potenze di $\frac{\theta}{K^2}$, e $\frac{\varpi}{K^2}$.

Resta adunque dimostrato , che il valore di V può essere messo sotto la forma

$$V = \frac{M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} . \left(a^2 + b^2 + c^2 - K^2 S - K^4 S' - K^6 S'' - \text{ec.} \right)$$

ove bisogna ritenere, che K^2S, K^4S', K^6S'', ec. sono funzioni omogenee riguardo alle quantità a, b, c delle quali le rispettive dimensioni sono 0, -2, -4, ec.

Sia U la somma di tutti i termini della serie

$$(a^2+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}.(a^2+b^2+c^2-K^2S-K^4S'-K^6S''-\text{ec.}),$$

che sono indipendenti dalla lettera K. Egli è chiaro, che questi termini si trovano prendendo nella serie S quelli soltanto moltiplicati per $\frac{\theta}{K^2}$, e $\frac{\varpi}{K^2}$; e prendendo parimenti nelle serie S', S'', ec. quelli moltiplicati per le potenze di K eguali a -4, -6, ec. Tra i termini dipendenti dalla lettera K, prendiamo solamente quelli moltiplicati per la più piccola potenza di $\frac{\theta}{K^2}$, che noi chiameremo r; tra questi si considerino soltanto quelli moltiplicati per la più piccola potenza di $\frac{\varpi}{K^2}$ che noi chiameremo r'; e finalmente fra i coefficienti di $\frac{\theta^r}{K^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}}$ conserviamo solamente quelli, che sono moltiplicati per la più piccola potenza di K^2, che noi chiameremo i.

La somma di tutti questi termini dati dalla serie

$$-(a^2+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}(K^2S+K^4S'+\text{ec.}),$$

potrà adunque essere espressa da una funzione della forma $K^{2i}.\frac{\theta^r}{K^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}}.P$, indicando P una funzione delle ordinate a, b, c indipendente dalle quantità K, θ, e ϖ.

Ciò posto si avrà

$$V=M.\left\{U+K^{2i}.\frac{\theta^r}{K^{2r}}.\frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}}P+\text{ec.}\right\},$$

i essendo eguale o superiore all'unità, e r, r' indicando dei numeri interi, e positivi. Il valore di V posto sotto questa forma ci sarà utile in seguito, e prima di andare più oltre osserviamo, che P deve essere la somma di parecchie funzioni omogenee per rapporto alle quantità a, b, c delle quali

la più piccola in dimensione è di un ordine eguale a -3, giacchè la frazione

$$\frac{-K^2S - K^4S' - K^6S'' - \text{ec.}}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

è composta di funzioni omogenee le dimensioni delle quali procedono secondo la serie $-3, -5, -7$, ec.

3. Col precedente metodo si può soltanto arrivare ad un valore approssimato di V; ma le cognizioni, che noi n' abbiamo tratto sulla forma di questa funzione serviranno per farci giungere al bellissimo teorema del Sig. *Legendre* mediante il quale, l' attrazione di un elissoide sopra un punto esteriore alla sua superficie dipende in ogni caso da quella dei punti situati sulla superficie.

Secondo ciò, che trovasi dimostrato al Capitolo primo del Tomo secondo della Meccanica Celeste si hanno le seguenti equazioni

$$V = 2\iint . \partial p\, \partial q \,\text{sen.}\, p \,.\, \frac{I\sqrt{R}}{L^2},$$

$$A = 2\iint . \partial p\, \partial q \,\text{sen.}\, p \cos.\, p \,.\, \frac{\sqrt{R}}{L},$$

$$B = 2\iint . \partial p\, \partial q \,\text{sen.}^2 p \cos.\, q \,.\, \frac{\sqrt{R}}{L},$$

$$C = 2\iint . \partial p\, \partial q \,\text{sen.}^2 p \,\text{sen.}\, q \,.\, \frac{\sqrt{R}}{L},$$

$$I = a\cos.p + mb\,\text{sen.}p\cos.q + nc\,\text{sen.}p\,\text{sen.}q,$$

$$L = \cos.^2 p + m\,\text{sen.}^2 p\cos.^2 q + n\,\text{sen.}^2 p\,\text{sen.}^2 q,$$

$$R = I^2 + (K^2 - a^2 - mb^2 - nc^2)L.$$

I limiti delle integrali sono determinati dall'equazione $R=0$.

Le quantità A, e V essendo fra loro legate per via dell' equazione $A + \left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) = 0$ ne risulta, che se fosse possibile di formare tra le medesime un' altra equazione, si potrebbe allora eliminarne A, ed avere un' equazione fra le differenze parziali di V prese per rapporto alle sei costanti a, b, c, m, n, K di cui è funzione. La ricerca del valore di V sarebbe

in

in questo modo ridotta all' integrazione di un' equazione a differenze parziali, e siccome trattasi qui di aver soltanto un valore particolare della variabile principale, la forma stessa dell' equazione potrebbe servire a determinarlo.

Non sarebbe facile, a mio avviso, il dimostrare *a priori* l'esistenza di una simile equazione; ma egli è certo, che se ella esiste deve essere del secondo ordine, poichè non v' hanno, che le equazioni di questo ordine cui si possa soddisfare per via di doppie integrali definite, siccome trovasi dimostrato dal Sig. *La-Place* (*Académie de Paris année* 1779).

Questa considerazione ci porta a combinare le differenze parziali del primo ordine delle quantità A, e V. Al cui fine vuolsi dimostrare, che per differenziare A per rapporto a qualsivoglia delle sei costanti di cui è funzione, basterà differenziare per rapporto alle stesse costanti la funzione sottoposta al segno integrale, e considerare in seguito la doppia integrazione fra li stessi limiti assegnati alla funzione A.

Quindi si avrà, per esempio

$$\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right) = 2 \cdot \iint \partial p \, \partial q \, \text{sen.} p \cos . p \, . \, \partial \, . \frac{\frac{\sqrt{R}}{L}}{\partial m}$$

i limiti di p, e q essendo sempre quelli, che danno $R = 0$.

Per dimostrare l'equazione precedente è necessario fare alcune osservazioni sul principio conosciuto della differenziazione delle funzioni sottoposte al segno integrale. Allorchè si ha $y = \int X \partial x$, e che X rappresenta una funzione qualunque di x, e di una costante a, si sa, che in generale, $\frac{\partial y}{\partial a} = \int \frac{\partial X}{\partial a} \partial x$; ma importa molto di osservare, che quest' equazione cessa d'essere vera ove i limiti di x sono funzioni di a. Per darne un esempio semplicissimo, sia $X = a^2 x^2 - ax + b$; si otterrà

$$y = a^2 \frac{x^3}{3} - a \frac{x^2}{2} + bx + \text{costante},$$

e prendendo per i limiti di x; $x = 0$, $x = p$, si avrà

$$y = a^2 \frac{p^3}{3} - a\frac{p^2}{2} + bp,$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{2}{3} ap^3 - \frac{p^2}{2},$$

ossia $\frac{\partial y}{\partial a} = \int \frac{\partial X}{\partial a} \partial x$ entro gli stessi limiti. Supponiamo ora, che i limiti di x siano $x = 0$, $x = a$; in questa ipotesi

$$y = \frac{a^5}{3} - \frac{a^3}{2} + ba,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{5}{3} a^4 - \frac{3}{2} a^2 + b$$

risultato molto diverso da quello, che si avrebbe prendendo il valore di $\int \frac{\partial X}{\partial a} \partial x$ da $x = 0$ fino a $x = a$.

Per dimostrare la stessa cosa in generale, sia U il valore indefinito di $\int X \partial x$, e siano x', x'' i valori di x corrispondenti ai limiti dell'integrale; noi avremo $y = U'' - U'$ (chiamando U', U'' i valori di U corrispondenti ai limiti dati). Ciò posto, se si considerano le quantità x' x'' come funzioni di a, egli è manifesto, che si avrà

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \left(\frac{\partial U''}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial U'}{\partial a}\right) + \left(\frac{\partial U''}{\partial x''}\right) \cdot \frac{\partial x''}{\partial a} - \left(\frac{\partial U'}{\partial x'}\right) \cdot \frac{\partial x'}{\partial a}.$$

Ora si comprende senza difficoltà, che $\left(\frac{\partial U''}{\partial x''}\right)$ è eguale a ciò, che diventa X quando si sostituisce x'' in luogo di x; dunque chiamando X'', X' i valori di X corrispondenti a $x = x''$, e $x = x'$, si avrà

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \left(\frac{\partial U''}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial U'}{\partial a}\right) + X'' \cdot \frac{\partial x''}{\partial a} - X' \cdot \frac{\partial x'}{\partial a}:$$

Ma $\left(\frac{\partial U''}{\partial a}\right) - \left(\frac{\partial U'}{\partial a}\right)$ è evidentemente eguale al valore di $\int \frac{\partial X}{\partial a} \partial x$ preso da $x = x'$ fino a $x = x''$, dunque

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \int \frac{\partial X}{\partial a}\, dx + X'' \cdot \frac{\partial x''}{\partial a} - X' \cdot \frac{\partial x'}{\partial a}.$$

Questo risultato ci mostra chiaramente, che l'equazione

$$\frac{\partial y}{\partial a}=\int \frac{\partial X}{\partial a}\,\partial x$$

non può sussistere, se non nei due casi seguenti; 1.° allorchè $\frac{\partial x''}{\partial a}=0$, $\frac{\partial x'}{\partial a}=0$, la qual cosa accade quando i limiti sono indipendenti dalla costante a; 2.° allorchè $X''=0$, $X'=0$, il che ha luogo quando i limiti dell'integrale riducono a zero uno dei fattori della funzione X, ed è appunto quello, che accade alle quantità V, A, B, C. Infatti riprendiamo il valore di

$$A=2.\int \partial q \int \partial p \,\text{sen.}\,p\,\cos.\,p\,.\,\frac{\sqrt{R}}{L},$$

e chiamisi Q il valore di $\int \partial p\,\text{sen.}\,p\,\cos.\,p\,.\frac{\sqrt{R}}{L}$ preso entro i limiti che danno $R=0$; noi avremo $A=2\int Q\,\partial q$. Se ora si considera, che Q rappresenta l'attrazione di una porzione qualunque dell'elissoide compresa fra due piani infinitamente vicini, che passano pel punto attratto, si vedrà senza difficoltà, che i valori di q corrispondenti ai limiti dell'integrale debbono rendere nulla la funzione Q, come quella, che dà la forza attrattiva di una porzione nulla verso i limiti di q. In vigore del principio dimostrato si avrà adunque $\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)=2\int \frac{\partial Q}{\partial m}\,\partial q$; ma i limiti di p sono tali, che $R=0$, per conseguenza

$$\frac{\partial Q}{\partial m}=\int \partial p\,\text{sen.}\,p\,\cos.\,p\,.\,\frac{\partial\,.\,\frac{\sqrt{R}}{L}}{\partial m},$$

e finalmente

$$\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)=2\iint \partial p\,\partial q\,\text{sen.}\,p\,\cos.\,p\,.\,\frac{\partial\,.\,\frac{\sqrt{R}}{L}}{\partial m}.$$

Stabilito in questo modo il principio della differenziazione sotto il doppio segno integrale, avremo

$$\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right) = 2 \,.\iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p \,.\frac{\partial R}{\partial b} : 2L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right) = 2 \,.\iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p \,.\frac{\partial R}{\partial c} : 2L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial K}\right) = 2 \,.\iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p \,.\frac{\partial R}{\partial K} : 2L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right) = 2 \iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p \,.\frac{\partial R}{\partial m} : 2L\sqrt{R}$$

$$- 2 \,.\iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p R \frac{\partial L}{\partial m} : L^2\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right) = 2 \iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p \,.\frac{\partial R}{\partial n} : 2L\sqrt{R}$$

$$- 2 \,.\iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p R \frac{\partial L}{\partial n} : L^2\sqrt{R}\,.$$

Sostituendo in luogo di $\frac{\partial R}{\partial b}$, $\frac{\partial R}{\partial c}$, $\frac{\partial R}{\partial K}$ i loro valori si otterrà

$$\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right) = 2m \iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p \,.(\text{I sen.}p \cos.q - bL) : L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right) = 2n \iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p \,.(\text{I sen.}p \text{ sen.}q - cL) : L\sqrt{R}$$

$$\left(\frac{\partial A}{\partial K}\right) = 2K \iint.\partial p\,\partial q \text{ sen.}p \cos.p : \sqrt{R}\,.$$

Osservisi adesso, che essendo

$$L = \cos.^2 p + m \text{ sen.}^2 p \cos.^2 q + n \text{ sen.}^2 p \text{ sen.}^2 q\,,$$

ne risulta

$$\frac{\partial L}{\partial m} = \text{sen.}^2 p \cos.^2 q\,,\quad \frac{\partial L}{\partial n} = \text{sen.}^2 p \text{ sen.}^2 q\,,$$

e per conseguenza

$$\frac{\partial L}{\partial m} + \frac{\partial L}{\partial n} = \text{sen.}^2 p\,,$$

$$m\,.\frac{\partial L}{\partial m} + n\,.\frac{\partial L}{\partial n} = L - \cos.^2 p\,.$$

Sottraendo queste due equazioni l'una dall'altra, si avrà

$$(m - 1)\frac{\partial L}{\partial m} + (n - 1)\frac{\partial L}{\partial n} = L - 1\,.$$

Col soccorso di questa equazione, se si moltiplica $\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)$ per $1-m$, $\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)$ per $1-n$, si otterrà

$$-(m-1)\cdot\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)-(n-1)\cdot\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)=$$

$$-2\int\int\partial p\,\partial q\,\frac{\text{sen.}p\cos.p}{2L\sqrt{R}}\cdot\left((m-1)\frac{\partial R}{\partial m}+(n-1)\frac{\partial R}{\partial n}\right)$$

$$+2\int\int\partial p\,\partial q\,\text{sen.}p\cos.p\,.\frac{\sqrt{R}}{L}-2\int\int\partial p\,\partial q\,\text{sen.}p\cos.p\cdot\frac{R}{L^2\sqrt{R}},$$

ossia

$$-(m-1)\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)-(n-1)\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)-A=$$

$$-2\int\int.\partial p\,\partial q\,\frac{\text{sen.}p\cos.p}{2L\sqrt{R}}\cdot\left((m-1)\frac{\partial R}{\partial m}+(n-1)\frac{\partial R}{\partial n}\right)$$

$$-2\int\int.\partial p\,\partial q\,\text{sen.}p\cos.p\cdot\frac{R}{L^2\sqrt{R}}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(\alpha)$$

ricordandosi, che $A=2\int\int\partial p\,\partial q\,\text{sen.}p\cos.p\,.\frac{\sqrt{R}}{L}$.

Ora abbiamo

$$\frac{\partial R}{\partial m}=2Ib\,\text{sen.}p\cos.q-b^2L+(K^2-a^2-mb^2-nc^2)\text{sen.}^2p\cos.^2q,$$

$$\frac{\partial R}{\partial n}=2Ic\,\text{sen.}p\,\text{sen.}q-c^2L+(K^2-a^2-mb^2-nc^2)\text{sen.}^2p\,\text{sen.}^2q,$$

e sostituendo questi valori nell'equazione (α) si avrà

$$-(m-1)\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)-(n-1)\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)-A=-2\int\int\partial p\,\partial q\times$$

$$\text{sen.}p\cos.p\cdot\frac{R}{L^2\sqrt{R}}-2\int\int\partial p\,\partial q\,\frac{\text{sen.}p\cos.p}{L\sqrt{R}}\times$$

$$\left\{(m-1)Ib\,\text{sen.}p\cos.q+(n-1)Ic\,\text{sen.}p\,\text{sen.}q-\left(\frac{m-1}{2}\right)b^2L-\left(\frac{n-1}{2}\right)c^2L\right\}$$

$$+2(K^2-a^2-mb^2-nc^2)\int\int.\partial p\,\partial q\,\frac{\text{sen.}p\cos.p}{2L\sqrt{R}}$$

$$-2(K^2-a^2-mb^2-nc^2)\int\int\partial p\,\partial q\,\frac{\text{sen.}p.\cos.p}{2L\sqrt{R}}.$$

Paragonando il secondo membro di quest' equazione con i valori precedenti di $\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)$, $\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)$, $\left(\frac{\partial A}{\partial K}\right)$ facilmente si trova la seguente equazione

$$-(m-1).\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)-(n-1)\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)-A+\left(\frac{m-1}{m}\right)b.\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)$$
$$+\left(\frac{n-1}{n}\right)c.\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)+\left(\frac{K^2-a^2-b^2-c^2}{2K}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial K}\right)$$
$$=\int\int\partial p\,\partial q\,\mathrm{sen}.p\cos.p.\left(\frac{K^2-a^2-mb^2-nc^2}{L\sqrt{R}}\right)-2\int\int.\partial p\,\partial q\,\mathrm{sen}.p\cos.p.\frac{R}{L^2\sqrt{R}},$$

la quale, per essere

$$R=I^2+(K^2-a^2-mb^2-nc^2)L$$

si riduce a

$$-(m-1).\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)-(n-1).\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)-A+\left(\frac{m-1}{m}\right)b.\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)$$
$$+\left(\frac{n-1}{n}\right)c\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)+\left(\frac{K^2-a^2-b^2-c^2}{2K}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)$$
$$=-\int\int\partial p\,\partial q\,\mathrm{sen}.p\cos.p.\frac{(R+I^2)}{L^2\sqrt{R}}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(\beta)$$

Per togliere il segno d'integrazione dal secondo membro di quest' equazione osservisi, che

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)=2.\int\int\partial p\,\partial q\,\mathrm{sen}.p\cos.p.\frac{(R+I^2)}{L^2\sqrt{R}}-2a\int\int\partial p\,\partial q\,\mathrm{sen}.p\frac{I}{L\sqrt{R}}$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial K}\right)=2K\int\int\partial p\,\partial q\,\mathrm{sen}.p.\frac{I}{L\sqrt{R}},$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)+\frac{a}{2K}\left(\frac{\partial V}{\partial K}\right)=\int\int\partial p\,\partial q\,\mathrm{sen}.p\cos.p.\frac{(R+I^2)}{L^2\sqrt{R}}.$$

Questo risultato essendo sostituito nell'equazione (β), si avrà

$$0=-(m-1)\left(\frac{\partial A}{\partial m}\right)-(n-1)\left(\frac{\partial A}{\partial n}\right)-A+\left(\frac{m-1}{m}\right)b\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)$$
$$+\left(\frac{n-1}{n}\right)c\left(\frac{\partial A}{\partial c}\right)+\left(\frac{K^2-a^2-b^2-c^2}{2K}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial K}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)+\frac{a}{2K}\left(\frac{\partial V}{\partial K}\right).$$

Tale è l'equazione fra le funzioni A, e V, che si trattava di rinvenire in un modo diretto. Egli è attualmente

chiaro, che per via di un calcolo affatto simile al precedente si debbono ottenere due altre equazioni analoghe a questa, delle quali una esisterà fra le funzioni B e V, e l'altra fra le funzioni C e V, di modo che si avrà

$$o=-(m-1)\left(\frac{\partial B}{\partial m}\right)-(n-1)\left(\frac{\partial B}{\partial n}\right)-B+\left(\frac{m-1}{m}\right)b\left(\frac{\partial B}{\partial b}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)c\left(\frac{\partial B}{\partial c}\right)$$
$$+\left(\frac{K^2-a^2-b^2-c^2}{2K}\right)\left(\frac{\partial B}{\partial K}\right)+\frac{1}{2m}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)+\frac{b}{2K}\left(\frac{\partial V}{\partial K}\right),$$

$$o=-(m-1)\left(\frac{\partial C}{\partial m}\right)-(n-1)\left(\frac{\partial C}{\partial n}\right)-C+\left(\frac{m-1}{m}\right)b\left(\frac{\partial C}{\partial b}\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)c\left(\frac{\partial C}{\partial c}\right)$$
$$+\left(\frac{K^2-a^2-b^2-c^2}{2K}\right)\left(\frac{\partial C}{\partial K}\right)+\frac{1}{2n}\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)+\frac{c}{2K}\left(\frac{\partial V}{\partial K}\right).$$

Eliminando A, B, C col soccorso delle equazioni

$$A+\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)=o,\quad B+\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)=o,\quad C+\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)=o,$$

ne risulterà

$$o=\frac{1-m}{m}b\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\right)+\frac{1-n}{n}c\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial c}\right)+\left(\frac{a^2+b^2+c^2-K^2}{2K}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial K}\right)$$
$$-(1-m)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial m}\right)-(1-n)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial n}\right)+\tfrac{3}{2}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)+\frac{a}{2K}\left(\frac{\partial V}{\partial K}\right);\ \ldots\ldots\ (1)$$

$$o=\frac{1-m}{m}b\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}\right)+\frac{1-n}{n}c\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial c}\right)+\left(\frac{a^2+b^2+c^2-K^2}{2K}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial K}\right)$$
$$-(1-m)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial m}\right)-(1-n)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial n}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)+\frac{b}{2K}\left(\frac{\partial V}{\partial K}\right)\ \ldots\ (2)$$

$$o=\frac{1-m}{m}b\cdot\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial c}\right)+\frac{1-n}{n}\cdot c\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c^2}\right)+\left(\frac{a^2+b^2+c^2-K^2}{2K}\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c\,\partial K}\right)$$
$$-(1-m)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c\,\partial m}\right)-(1-n)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c\,\partial n}\right)+\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)+\frac{1}{2n}\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)+\frac{c}{2K}\left(\frac{\partial V}{\partial K}\right)\ \ldots\ (3)$$

Per dedurre da queste equazioni il valore di V ricordiamoci ora, che alla fine del N.° 2 abbiamo trovato

$$V=M\left\{U+K^{2i}\cdot\frac{\theta^{r}}{K^{2r}}\cdot\frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}}P+\text{ec.}\right\},$$

e che per conseguenza è permesso di supporre

$$V=Mv=\frac{4\pi\cdot K^3}{3\sqrt{mn}}\cdot v,$$

facendo

$$v = \mathrm{U} + \mathrm{K}^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{\mathrm{K}^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}{\mathrm{K}^{2r'}} \mathrm{P} + \text{ec.}$$

Trattasi adunque di trovare il valore di v; ma questo essendo espresso in funzione delle ecentricità bisognerà introdurre le medesime nelle equazioni (1), (2), (3). Al cui uopo riprendiamo le equazioni

$$\theta = \mathrm{K}^2 \cdot \left(\frac{1-m}{m}\right), \quad \varpi = \mathrm{K}^2 \cdot \left(\frac{1-n}{n}\right),$$

e facilmente ne conchiuderemo le seguenti equazioni

$$m = \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2+\theta}, \quad n = \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{K}^2+\varpi}, \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial\mathrm{K}}\right) = \frac{2\theta}{\mathrm{K}}.$$

$$\left(\frac{\partial\varpi}{\partial\mathrm{K}}\right) = \frac{2\varpi}{\mathrm{K}}, \quad \left(\frac{\partial\theta}{\partial m}\right) = -\frac{\mathrm{K}^2}{m^2}, \quad \left(\frac{\partial\varpi}{\partial n}\right) = -\frac{\mathrm{K}^2}{n^2}$$

$$\mathrm{K}\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial\mathrm{K}}\right) = \mathrm{M} \cdot \left\{ 2\theta\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + 2\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right) + \mathrm{K}\left(\frac{\partial v}{\partial\mathrm{K}}\right) + 3v \right\},$$

$$\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial m}\right) = -\mathrm{M} \cdot \left\{ \frac{\mathrm{K}^2}{m^2}\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{v}{2m} \right\},$$

$$\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}\right) = -\mathrm{M} \cdot \left\{ \frac{\mathrm{K}^2}{n^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right) + \frac{v}{2n} \right\}$$

per via delle quali le equazioni (1), (2), (3) vengono trasformate nelle seguenti

$$\begin{aligned} 0 = {} & (a^2+b^2+c^2+\theta) \cdot \theta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial\theta}\right) + (a^2+b^2+c^2+\varpi)\,\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial\varpi}\right) + b\theta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial b}\right) \\ & + c\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial c}\right) + \left(\frac{a^2+b^2+c^2-\mathrm{K}^2}{2}\right)\mathrm{K}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial\mathrm{K}}\right) + a\theta \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + a\varpi \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right) \\ & + \frac{a\mathrm{K}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial\mathrm{K}}\right) + \left\{ \tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\varpi \right\}\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) + \tfrac{3}{2}av; \quad \ldots (4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & (a^2+b^2+c^2+\theta)\,\theta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial\theta}\right) + (a^2+b^2+c^2+\varpi)\,\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial\varpi}\right) + b\theta \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial b^2}\right) \\ & + c\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial c}\right) + \left(\frac{a^2+b^2+c^2-\mathrm{K}^2}{2}\right)\mathrm{K}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\mathrm{K}\,\partial b}\right) + b\theta\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + b\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right) \\ & + \frac{b\mathrm{K}}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial\mathrm{K}}\right) + \left\{ \tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) + \theta + \tfrac{1}{2}\varpi \right\}\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right) + \tfrac{3}{2}bv; \quad \ldots\ldots (5) \end{aligned}$$

0 =

$$\text{o}=(a^2+b^2+c^2+\theta)\,\theta\,.\left(\frac{\partial^2 v}{\partial c\,\partial\theta}\right)+(a^2+b^2+c^2+\varpi)\,\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial c\,\partial\varpi}\right)+b\theta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial c}\right)$$

$$+c\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial c^2}\right)+\left(\frac{a^2+b^2+c^2-\text{K}^2}{2}\right)\text{K}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \text{K}\,\partial c}\right)+c\theta\,.\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+c\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right)$$

$$+\frac{c\text{K}}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \text{K}}\right)+\left\{\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)+\varpi+\tfrac{1}{2}\theta\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)+\tfrac{3}{2}cv\;\ldots\ldots\;(6).$$

Per poco, che si riffletta su queste equazioni facilmente si scorge, che si può ad esse soddisfare prendendo per v una funzione delle quantità a, b, c, θ, ϖ indipendente dalla lettera K, come quella, che per sè stessa fa svanire tutti i termini moltiplicati per K. Ciò posto vuolsi dimostrare, che questo particolar modo di risolvere le tre precedenti equazioni è il solo, che possa convenire alla funzione, che deve dare l'attrazione dell'elissoide.

Riprendiamo la formola

$$v=\text{U}+\text{K}^{2i}\,.\,\frac{\theta^r}{\text{K}^{2r}}\,.\,\frac{\varpi^{r'}}{\text{K}^{2r'}}\,\text{P}+\text{ec}.$$

ed osserviamo, che sostituendo questo valore di v nell'equazione (4) si ottiene un risultato composto di due parti distinte; la prima dipendente da U sarà senza K, e dovrà essere nulla per sè stessa; la seconda dipendente da K (se si considera il solo termine $\text{K}^{2i}\,.\,\frac{\theta^r}{\text{K}^{2r}}\,.\,\frac{\varpi^{r'}}{\text{K}^{2r'}}\,\text{P}$ del valore di v) darà

$$\text{K}^{2i}\,.\,\frac{\theta^r}{\text{K}^{2r}}\,.\,\frac{\varpi^{r'}}{\text{K}^{2r'}}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{1}{2}(\theta+\varpi)\left(\frac{\partial \text{P}}{\partial a}\right)\\ +\theta r\left(\frac{\partial \text{P}}{\partial a}\right)+\varpi r'\left(\frac{\partial \text{P}}{\partial a}\right)+b\theta\left(\frac{\partial^2 \text{P}}{\partial a\,\partial b}\right)+c\varpi\left(\frac{\partial^2 \text{P}}{\partial a\,\partial c}\right)\\ -\text{K}^2(i-r-r')\left(\frac{\partial \text{P}}{\partial a}\right)+\left((a^2+b^2+c^2)\left(\frac{\partial \text{P}}{\partial a}\right)+a\text{P}\right)(i+\tfrac{1}{2})\end{array}\right\}=\text{o}.$$

Chi provasse difficoltà nell'ammettere quest'equazione, a cagione dei termini, che seguono $\text{K}^{2i}\,\frac{\theta^r}{\text{K}^{2r}}\,.\,\frac{\varpi^{r'}}{\text{K}^{2r'}}$ nel valore di v, potrà distruggerla, ricordandosi, che almeno uno dei tre numeri i, r, r' deve, per ipotesi, essere più grande in quei termini, che in questo, d'onde ne deriva, che la loro

sostituzione non potrà mai far nascere un termine moltiplicato per $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}}$.

Dovendo la precedente equazione essere vera per via di identità ne risulta, che la funzione

$$(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) + aP$$

deve, da sè stessa, essere nulla, come quella, che non può essere distrutta dagli altri termini. Dunque si avrà

$$o = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) + aP.$$

Lo stesso raziocinio fatto sulle equazioni (5) e (6) ci somministrerà le due seguenti

$$o = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{\partial P}{\partial b}\right) + bP,$$

$$o = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{\partial P}{\partial c}\right) + cP.$$

Integrando la prima di queste equazioni si ottiene

$$P = \frac{H}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

indicando H una funzione di b e c.

Sostituendo questo valore di P nelle altre due si hanno le equazioni

$$\left(\frac{\partial H}{\partial b}\right) = o, \left(\frac{\partial H}{\partial c}\right) = o$$

le quali provano, che H deve essere una quantità costante indipendente dalle ordinate del punto attratto.

Ciò posto avremo

$$V = M \cdot \left\{ U + K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}} \cdot \frac{H}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + \text{ec.} \right\}$$

Ma abbiamo dimostrato N.° 2, che la più piccola dimensione delle funzioni omogenee per rapporto alle quantità a, b, c, che possa entrare nel termine $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}} P$, è dell'ordine -3; e siccome la funzione $\frac{H}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ è dell'ordine -1,

ne segue, che si deve avere $H = 0$. Ricordiamoci ora, che $K^{2i} \cdot \frac{\theta^r}{K^{2r}} \cdot \frac{\varpi^{r'}}{K^{2r'}}$ P è il termine, in cui gli esponenti i, r, r' sono i più piccoli, dunque giacchè questo termine è eguale a zero, tutti gli altri debbono parimenti essere nulli. Si avrà per conseguenza

$$V = MU.$$

Per trovare attualmente la forma della funzione U, riprendiamo la formola

$$V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} (a^2 + b^2 + c^2 - K^2S - K^4S' - K^6S'' - \text{ec.})$$

dimostrata nel N.° 2, ed osservisi, che dovendo in essa svanire la quantità K, è necessario, che abbiano luogo le seguenti equazioni

$$S = A \cdot \frac{\theta}{K^2} + A' \cdot \frac{\varpi}{K^2},$$

$$S' = B \cdot \frac{\theta^2}{K^4} + B' \cdot \frac{\theta\varpi}{K^4} + B'' \cdot \frac{\varpi^2}{K^4},$$

$$S'' = C \cdot \frac{\theta^3}{K^6} + C' \cdot \frac{\theta^2\varpi}{K^6} + C'' \cdot \frac{\varpi^2\theta}{K^6} + C''' \cdot \frac{\varpi^3}{K^6}$$

ec.

nelle quali A, A′ rappresentano delle funzioni omogenee per rapporto alle quantità a, b, c dell'ordine zero; B, B′, B″, dell'ordine -2; C, C′, C″, C‴ dell'ordine -4, e così delle altre.

Avremo dunque

$$(d) \ldots U = v = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} (A\theta + A'\varpi + B\theta^2 + B'\theta\varpi + B''\varpi^2 + \text{ec.})$$

Egli è chiaro, che questo valore di v sarà lo stesso per tutti quelli elissoidi, che hanno lo stesso centro, la stessa posizione degli assi, e le medesime ecentricità $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\varpi}$; dunque, se, senza cambiare questi dati, si fa passare la superficie di un elissoide per il punto attratto, e che chiamisi V′ il valore di V corrispondente a questo nuovo elissoide, di cui supporremo la massa eguale a M′, si avrà $V' = M'U$, ma $V = MU$,

dunque

$$V = \frac{M}{M'} V' \ldots \ldots (b).$$

Quest' equazione degna di attenzione fa dipendere la ricerca del valore di V da quello di V'; e si sa, che questo si può ottenere per via delle funzioni ordinarie ove l' elissoide sia di rivoluzione, oppure colle trascendenti elittiche quando tutte le sezioni dell' elissoide sono di figura elittica.

4. Abbenchè si possa, mediante l' equazione (b), ottenere il valore di V sotto una forma finita, sarà bene di calcolare i coefficienti della serie (d) cui daremo la forma

$$v = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} \ldots + U^{(i)} + U^{(i+1)} + \text{ec.}$$

ponendo

$$U^{(0)} = (a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$U^{(1)} = -(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{3}{2}}.(A\theta + A'\varpi),$$

$$U^{(2)} = -(a^2 + b^2 + c^2)^{-\frac{3}{2}}.(B\theta^2 + B'\theta\varpi + B''\varpi^2),$$

ec.

Essendo v indipendente da K, le equazioni (4), (5), (6) trovate nel numero 3.° si riducono a queste

$$o = \theta.(a^2+b^2+c^2+\theta)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial\theta}\right) + \varpi(a^2+b^2+c^2+\varpi)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial\varpi}\right) + b\theta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial b}\right)$$
$$+ c\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial a\,\partial c}\right) + a\theta\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + a\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right) + \left\{\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\varpi\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) + \tfrac{3}{2}av;$$

$$o = \theta.(a^2+b^2+c^2+\theta)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial\theta}\right) + \varpi(a^2+b^2+c^2+\varpi)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial\varpi}\right) + b\theta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial b^2}\right)$$
$$+ c\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial c\,\partial b}\right) + b\theta\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + b\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right) + \left\{\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) + \theta + \tfrac{1}{2}\varpi\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right) + \tfrac{3}{2}bv;$$

$$o = \theta.(a^2+b^2+c^2+\theta)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial c\,\partial\theta}\right) + \varpi(a^2+b^2+c^2+\varpi)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial c\,\partial\varpi}\right) + b\theta.\left(\frac{\partial^2 v}{\partial b\,\partial c}\right)$$
$$+ c\varpi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial c^2}\right) + c\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + c\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial\varpi}\right) + \left\{\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2) + \varpi + \tfrac{1}{2}\theta\right\}\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right) + \tfrac{3}{2}cv.$$

Si moltiplichi ora la prima di queste equazioni per a, la seconda per b, la terza per c, e se ne faccia l' addizione dopo averle così moltiplicate; ponendo

$$Q = a\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right) + b\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right) + c\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)$$

si troverà

$$o=(a^2+b^2+c^2).\left\{\theta\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)+\varpi\left(\frac{\partial Q}{\partial \varpi}\right)+\theta\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)+\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial \varpi}\right)+\tfrac{3}{2}Q+\tfrac{3}{2}v\right\}$$

$$+\theta^2.\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)+\varpi^2\left(\frac{\partial Q}{\partial \varpi}\right)+b\theta.\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)\right\}+c\varpi\left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)\right\}$$

$$+\left(\frac{\theta+\varpi}{2}\right)Q+\theta.\frac{b}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)+\varpi\frac{c}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (A).$$

Per rendere più semplice questa equazione osservisi, che $U^{(0)}$ è una funzione omogenea dell'ordine -1, per rapporto alle quantità a, b, c; che $U^{(1)}$ è una funzione omogenea dell'ordine -3 riguardo alle medesime quantità, e dell'ordine 2 relativamente a $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\varpi}$; e che per conseguenza $U^{(1)}$ è una funzione omogenea dell'ordine -1, relativamente alle quantità $a, b, c, \sqrt{\theta}, \sqrt{\varpi}$. Si proverà nello stesso modo, che $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ ec. sono funzioni omogenee dell'ordine -1, rispetto alle medesime quantità. In conseguenza del noto teorema riguardo a queste funzioni si avrà l'equazione

$$a\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)+b\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)+c\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)+2\theta\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)+2\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial \varpi}\right)=-v$$

ossia

$$2\theta\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)+2\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial \varpi}\right)=-v-Q.$$

Per lo stesso principio sarà

$$a\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)+b\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right)+c\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right)+2\theta\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)+2\varpi\left(\frac{\partial Q}{\partial \varpi}\right)=-Q.$$

Si potrà adunque trasformare nella seguente l'equazione (A);

$$o=(a^2+b^2+c^2)\left\{v+\tfrac{1}{2}Q-\tfrac{1}{2}\left(a\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)+b\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right)+c\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right)\right\}+\theta^2\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)\right.$$

$$+\varpi^2\left(\frac{\partial Q}{\partial \varpi}\right)+\tfrac{1}{2}(\theta+\varpi)Q+b\theta\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right)+c\varpi\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right)-\tfrac{1}{2}b\theta\left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)-\tfrac{1}{2}c\varpi\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right).$$

Facciasi ora in questa equazione la sostituzione della serie

$$U^{(0)}+U^{(1)}+U^{(2)}\ \ldots\ldots+U^{(i)}+U^{(i+1)}$$

in luogo di v. Chiaminsi s, s' le dimensioni di $U^{(i)}$, $U^{(i+1)}$ riguardo alle eccentricità $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\varpi}$; si avrà $-(s+1)$, $-(s'+1)$ pel valore delle dimensioni di queste funzioni rispetto alle

ordinate a, b, c; osservando poscia, che per la natura delle funzioni omogenee si hanno le equazioni

$$a\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial a}\right)+b\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b}\right)+c\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c}\right)=-(s+1)\,U^{(i)}$$

$$a\left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial a}\right)+b\left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial b}\right)+c\left(\frac{\partial U^{(i+1)}}{\partial c}\right)=-(s'+1)\,U^{(i+1)}$$

si otterrà

$$U^{(i+1)}=\left\{\frac{\begin{array}{l}-(s+1)\theta^2\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\theta}\right)-(s+1)\varpi^2\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\varpi}\right)-\left(\frac{s+1}{2}\right)(\theta+\varpi)U^{(i)}\\ -(s+\frac{3}{2})b\theta.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b}\right)-(s+\frac{3}{2})\,c\varpi\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c}\right)\end{array}}{s'\left(\frac{s'+3}{2}\right)(a^2+b^2+c^2)}\right\}$$

Per mezzo di questa equazione si ha il valore di $U^{(i+1)}$ conoscendo quello di $U^{(i)}$; ma noi abbiamo

$$U^{(0)}=(a^2+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dunque si conoscerà $U^{(1)}$, e per conseguenza tutti i termini della serie, che rappresenta il valore di v.

La precedente formola è suscettibile di riduzione, se si osserva, che le dimensioni di $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ec. crescono di due in due unità riguardo a $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\varpi}$, d'onde ne segue, che ponendo $s=2i$ si avrà $s'=2i+2$. Si ha inoltre, per via della omogeneità

$$\varpi\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\varpi}\right)=i\,U^{(i)}-\theta\,.\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\theta}\right)$$

dunque

$$U^{(i+1)}=\left\{\frac{\begin{array}{l}(2i+1)\theta.(\varpi-\theta)\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial\theta}\right)-(2i+\frac{3}{2})b\theta\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial b}\right)\\ -(2i+\frac{3}{2})c\varpi\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial c}\right)-\frac{1}{2}(2i+1)\Big(\theta+(2i+1)\varpi\Big)U^{(i)}\end{array}}{(i+1)(2i+s)(a^2+b^2+c^2)}\right\}$$

Tale è la formola, che dà il termine generale della serie, che rappresenta il valore di v, ed è chiaro, ch'essa sarà convergente se le ecentricità $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\varpi}$ sono molto piccole, e nel caso in cui la distanza $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ del punto attratto al centro dell'elissoide sarà molto grande riguardo alle dimensioni del corpo attraente.

ERRORI OCCORSI NELLA PARTE MATEMATICA

Del Tomo XIV della Societa' Italiana delle Scienze.

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
(5)	10	*Giannantonio*	*Gianverardo*
17	5	Cielo	gelo
44	9	(en bicis)	(en biais)

ERRORI CONTENUTI IN QUESTA PRIMA PARTE

E VARIAZIONI POSTERIORMENTE INTRODOTTE DAGLI AUTORI.

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
XXII	12	Impareggiali	Impareggiabili
10	8, 9	al lato K	all' altro lato della bocca K
—	15	$\frac{(1-f)^2}{a^2} x^2$	$\frac{(1-f)^2}{a^2} x^2 \partial x$
11	17	per lati rette	per lati due rette
13	9	$\int \pi y^2 \partial x$	$\int \pi y^2 \partial u$
14	1, 2	che in un vase allo insu convergente risultare maggiore	che in un vase dello stesso fondo ed uniformemente ampio all' insù; ed all' incontro deve z in un vase convergente risultare maggiore
15	1	$P \pm t$	$P \mp t$
—	10	$xr^2 vG$	$\pi r^2 vG$
18	33	$nR^2(n \mp z)$	$\pi R^2(n \mp z)$
20	4	sarebbe a giusta porzione	starebbe a giusta proporzione
—	6	col tubo	nel tubo
—	28	un altro equilibrio	un altro peculiar equilibrio

Pagina	*Linea*	*Errori*	*Correzioni*
21	1, 2	e le attorniate	e le attornianti
22	18	dal tubo	del tubo
26	24	*p*.	P.
28	12	623	§. 23
30	2	$\frac{\frac{1}{2}l-\frac{1}{2}l}{100}$	$\frac{1}{2}l-\frac{\frac{1}{2}l}{100}$
38	17	di pressione	di elasticità e di aumento di pressione
—	24	braccio vi avea	braccio corto vi avea
39	31	$8x=\frac{27}{32}=$	$8x=6\frac{3}{4}$, ricavasi $x=\frac{27}{32}=$
41	13, 23, 25	Carbois	Casbois
	23	all'altezze barometriche	all'altezza barometrica
42	29	dell' $\frac{1}{64}$	della frazione $\frac{1}{64}$
45	2	Chimboraco	Chimboraço
—	17	di A troverà	di A si troverà
48	15	specifica, sempre	specifica. Sempre
56	1	dunque, percosso che fu	dunque, che fu quello dell' esperienza suggerita dal *Beccaria*, percosso che fu
119	12, 15, 16	8	γ
126	22	delle due sfere	che se D è il centro di gravità delle due sfere.
185	11	dalla	della
279	21	mutazione	nutazione
289	8	corrette	corretta
317	21	più delle forze	le più delle forze
361	penul.	sito	filo